

NOMBRE:

NOTA:

1. (1,75 puntos/apartado) Resuelve los siguientes límites.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2+1}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{5}$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$
 $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$
 $x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}) \cdot (\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+x - (4-x)}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} =$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{1 + 2x^2}{2x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2x-1)(x^2-1) - x(1+2x^2)}{x(2x-1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x - x^2 + 1 - x - 2x^3}{2x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{(\sqrt{x^2 - 2x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{2x} = -1$$

2. (1,5 puntos) Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$

- Calculamos los valores que anulan el denominador:

$$x-3=0 \rightarrow \boxed{x=3}$$

- Estudiamos la continuidad en $x=3$.

$$x=2,99 \quad f(x) = \frac{2,99^2+1}{2,99-3} = -994,01 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+1}{x-3} = -\infty$$

$$x=3,01 \quad f(x) = \frac{3,01^2+1}{3,01-3} = 1006,01 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+1}{x-3} = +\infty$$

En $x=3$ la función presenta una discontinuidad de salto infinito.

3. (1,5 puntos) Halla las asíntotas de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas.

$$f(x) = \frac{x+3}{2x^2-2}$$

Asíntotas verticales

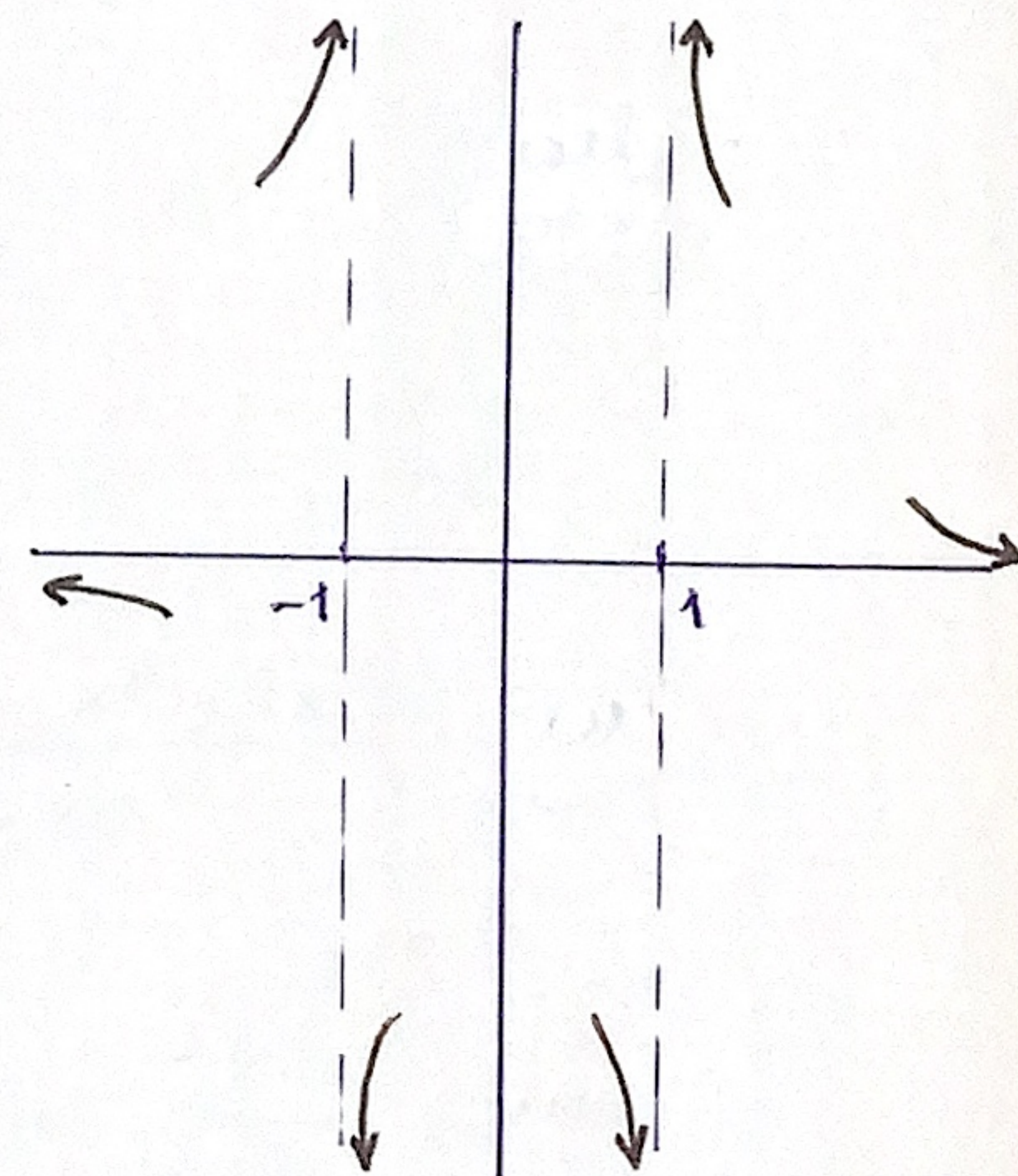
$$2x^2-2=0 \rightarrow \boxed{x=\pm 1}$$

$$x=-1,01 \quad f(x)=+ \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$x=-0,99 \quad f(x)=- \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$x=0,99 \quad f(x)=- \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$x=1,01 \quad f(x)=+ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$



Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{2x^2+2} = 0 \rightarrow \text{la función está por encima de la asíntota}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{2x^2-2} = 0 \rightarrow \text{la función está por debajo de la función.}$$