CONCEPTOS CLAVE

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Si *a* y *b* son dos números reales $\lim_{x \to a} f(x) = b$, si siempre que x toma valores próximos a *a*, tanto menores ($\lim_{x \to a-} f(x)$, límite por la izquierda) como mayores ($\lim_{x \to a+} f(x)$, límite por la derecha), los correspondientes valores de *f(x)* se aproximan a *b*.

LÍMITES EN EL INFINITO

Son los valores a los que tiende la función f cuando x tiende a valores muy grandes en valor absoluto, positivos ($\lim_{x \to +\infty} f(x)$) o negativos ($\lim_{x \to -\infty} f(x)$).

LÍMITES INFINITOS

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ significan que cuando x toma valores próximos a *a*, por ambos lados, los correspondientes valores de *f* se hacen arbitrariamente grandes y positivos o negativos.

LÍMITES INFINITOS O CON INFINITOS, PERO QUE SE PUEDEN DETERMINARSE

SUMA	PRODUCTO	COCIENTE	
$\infty \pm K = \infty$	$K \cdot \infty = \infty$	$\frac{0}{K} = 0$	$\frac{K}{0} = \infty$
$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{\infty}{K} = \infty$	$\frac{K}{\infty} = 0$
$\infty - \infty =$ Indeterminado	$0 \cdot \infty =$ Indeterminado	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{0} = \infty$
		$\frac{0}{0} =$ Indeterminado	$\frac{\infty}{\infty} =$ Indeterminado

POTENCIAS		
$K^0 = 1$	$0^K = \begin{cases} 0 & si\ K \geq 0 \\ \infty & si\ K < 0 \end{cases}$	$0^0 =$ Indeterminado
$0^\infty = 0$	$K^{+\infty} = \begin{cases} 0 & si\ 0 < K < 1 \\ +\infty & si\ K > 1 \end{cases}$	$\infty^0 =$ Indeterminado
$+\infty^{+\infty} = +\infty$	$e^{+\infty} = +\infty \quad e^{-\infty} = 0^+$	$1^\infty =$ Indeterminado

INDETERMINACIONES

Expresiones sin sentido en $\mathbb{R}$, que se resuelven con las técnicas apropiadas:

$$\frac{\infty}{\infty}\ ,\ \infty - \infty\ ,\ \frac{0}{0}\ ,\ 0 \cdot \infty\ ,\ 1^\infty\ ,\ \infty^0\ ,\ 0^0$$

- Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$
  - Se resuelve dividiendo numerador y denominador por la potencia de mayor grado de la variable (nos quedamos con el término de mayor grado).

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{13x+2}{\sqrt{4x^2+3x+2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{13x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{13+\frac{2}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{13}{\sqrt{4}} = \frac{13}{2}$$

- Indeterminación $\frac{0}{0}$
  - Si solo hay polinomios, se resuelve factorizándolos.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2-6)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6}{x + 5} = \frac{-2}{7}$$

  - Si aparecen radicales, se resuelve multiplicando ambos términos de la fracción por las conjugadas de las expresiones radicales presentes.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} \overset{\boxed{\frac{0}{0}}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 3 - 4}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)} \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{1+3} + 2} = \frac{1}{4}$$

- Indeterminación $\infty - \infty$
  - Si solo contiene fracciones algebraicas, se opera y se calcula de nuevo el límite.

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2}{2x-1} - \frac{3x^2}{x+2} \right] \overset{\boxed{\infty - \infty}}{=} \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 \cdot (x+2) - 3x^2 \cdot (2x-1)}{(2x-1) \cdot (x+2)} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 + 2x^2 - 6x^3 + 3x^2}{2x^2 + 4x - x - 2} \right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{-5x^3 + 5x^2}{2x^2 + 3x - 2} \right] = -\infty$$

- Si hay expresiones con radicales, se multiplica y divide por la expresión conjugada.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}) \overset{\boxed{\infty-\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+5})^2-(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x+5-x}{\sqrt{n+5}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}} = \frac{5}{\infty} = 0$$

CONTINUIDAD

Una función $f(x)$ es **continua en el punto** $x = a$ sí, y solo sí, se cumplen estas tres condiciones:

- Que para el punto $x = a$ exista $f(a)$.
- Que exista y sea finito el límite de la función para $x = a$, lo que implica que existan los límites laterales y coincidan.
- Que los dos valores anteriores coincidan:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Bajo estas tres condiciones, la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$.

TIPOS DE DISCONTINUIDADES

*En el archivo de teoría.

ASÍNTOTAS

*En el archivo de teoría.