

Asíntotas verticales

Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ tiene una asíntota horizontal en $x = a$.

Las posibles asíntotas verticales de una función se buscan en los puntos que anulan el denominador, si la función es racional, o en los extremos del dominio.

Asíntotas horizontales:

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \Rightarrow y = a$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

En las funciones racionales las asíntotas horizontales en $-\infty$ y $+\infty$ coinciden y solo existen si el grado del numerador es menor o igual que el del denominador.

Asíntotas oblicuas:

Si $m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ $n_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m_1x) \Rightarrow y = m_1x + n_1$ es asíntota oblicua en $-\infty$.

Si $m_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $n_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - m_2x) \Rightarrow y = m_2x + n_2$ es asíntota oblicua en $+\infty$.

Se estudia la existencia de asíntotas oblicuas cuando no existan horizontales.

En las funciones racionales las asíntotas oblicuas en $-\infty$ y $+\infty$ coinciden y solo existen si el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

1. Encuentra las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+2}$

g) $f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2}$

m) $f(x) = xe^{x-3}$

b) $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{-x^2-4}$

h) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

n) $f(x) = \frac{2x+3}{e^x}$

c) $f(x) = \frac{2+x}{x^2+3x+2}$

i) $f(x) = \frac{-x^3}{x^2+2}$

ñ) $f(x) = e^{x^2} \ln x$

d) $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+3x}$

j) $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}$

o) $f(x) = 3e^{1-x^2}$

e) $f(x) = \frac{2x^2-5}{x^2+4}$

k) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

p) $f(x) = \sqrt{x-4}$

f) $f(x) = \frac{x-3}{x^2}$

l) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$

q) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Asíntotas de funciones definidas a trozos

Para hallar las asíntotas de una función a trozos se estudian las asíntotas de cada función por separado teniendo en cuenta los dominios de definición de cada función.

2. Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x-2 & x < 0 \\ \frac{x^2+x-2}{x^2+x-2} & x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3} & x \leq 2 \\ \frac{2x^3-1}{x^2-3x} & x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2-1} & x < 0 \\ \ln(x+1) & x \geq 0 \end{cases}$

CONSOLIDACIÓN
Ficha Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas

1. a) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-1}{x^2+1} = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No existen.

- b) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+2x+3}{-x^2-4} = -1 \Rightarrow y = -1$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No existen.

- c) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+2}{x^2+3x+2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+2}{x^2+3x+2} = +\infty \Rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x^2+3x+2} = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No existen.

- d) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \left\{0, -\frac{3}{2}\right\}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \frac{x+1}{2x^2+3x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{x+1}{2x^2+3x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{2x^2+3x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{2x^2+3x} = +\infty$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad x = 0 \text{ son asíntotas verticales.}$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{2x^2+3x} = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No existen.

- e) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2-5}{x^2+4} = 2 \Rightarrow y = 2$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No existen.

- f) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x^2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-3}{x^2} = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No existen.

- g) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{(x-1)^2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{(x-1)^2} = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No existen.

h) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales: $\Rightarrow$ No existen.

Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = 1$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2$$

$y = x + 2$, asíntota oblicua.

i) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\Rightarrow$ No existen.

Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3}{x^3 + 2x} = -1$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3 + x(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 + 2} = 0$$

$y = -x$, asíntota oblicua.

j) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales: $\Rightarrow$ No existen.

Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 4x} = 1$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 8 - x(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x - 8}{x^2 - 4} = 0$$

$y = x$, asíntota oblicua.

k) Asíntotas verticales: $D(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{\ln x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{\ln x} = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = +\infty \Rightarrow$ No existen.

Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \Rightarrow$ No existen.

l) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x^2}{x^2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln x^2}{x^2} = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: $\Rightarrow$ No existen.

m) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{x-3} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x-3} = +\infty \Rightarrow y = 0$ asíntota horizontal en $-\infty$.

Asíntotas oblicuas: Solo se estudia en $+\infty$ $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-3} = +\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

n) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{e^x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ asíntota horizontal en $+\infty$.

Asíntotas oblicuas: Solo se estudia en $-\infty$ $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x e^x} = 0 \Rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

ñ) Asíntotas verticales: $D(f) = (0, +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^2} \ln x = -\infty \Rightarrow x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \ln x = +\infty \Rightarrow$ No existen.

Asíntotas oblicuas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} \ln x}{x} = +\infty \Rightarrow$ No existen.

o) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3e^{1-x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No existen.

p) Asíntotas verticales: $D(f) = [4, +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x-4} = 0 \Rightarrow$ No existen asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-4} = +\infty \Rightarrow$ No existen.

Asíntotas oblicuas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-4}}{x} = 0 \Rightarrow$ No existen.

q) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ No existen asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \Rightarrow$ No existen

Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1 \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -1 \quad n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0$

$y = x$ asíntota en $+\infty$ $y = -x$ asíntota en $-\infty$

2. a) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 1}{x - 1} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = +\infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + x - 2} = 2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = +\infty$

$x = 2$ asíntota horizontal en $-\infty$

Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} = 1 \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2 - x^2 + 2x}{x^2 - 2x} = 3$

$y = x + 3$ asíntota en $+\infty$

b) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1, 3\}$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{x - 1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^3 - 1}{x^2 - 3x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^3 - 1}{x^2 - 3x} = +\infty$$

$x = 1$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^2 - 3x} = +\infty$

$y = 1$ asíntota horizontal en $-\infty$.

Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 - 3x^2} = 2 \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1 - 2x^3 + 6x^2}{x^3 - 3x^2} = 6$

$y = 2x + 6$ asíntota en $+\infty$.

c) Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

$x = -1$ asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1) = +\infty$

No existen asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x} = 1 \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1 - x^2 + x}{x^2 - 1} = 0$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 0$$

$y = x$ asíntota oblicua en $-\infty$.