9 CURVAS TÉCNICAS: ÓVALOS, OVOIDES Y ESPIRALES

OBJETIVOS

1 *Distinguir el origen y las características de los óvalos y ovoides como curvas técnicas de grandes aplicaciones en el diseño, la construcción y la ingeniería civil.*

2 *Saber construir diversos tipos de óvalos, ovoides y espirales formadas por arcos de circunferencia tangentes entre sí, así como conocer la formación de la espiral de Arquímedes.*

3 *Verificar la presencia de espirales en todos los ámbitos de la naturaleza, así como en el diseño de objetos o elementos creados por el hombre.*

Los ***óvalos*** y ***ovoides*** pertenecen al grupo de los enlaces denominados cerrados dado que comienzan y terminan en un mismo punto. También son denominadas ***curvas circulares cerradas*** debido al hecho de estar formadas por circunferencias tangentes entre sí.

1 ÓVALOS

Se denomina óvalo a la curva cerrada y convexa, con dos ejes de simetría perpendiculares, compuesta por un número par de arcos de circunferencia tangentes entre sí, cuyos centros se hallan en los ejes de simetría.

El número de arcos es variable, dependiendo del procedimiento utilizado. En esta *Unidad Didáctica* sólo estudiaremos los óvalos de cuatro arcos y, por tanto, de cuatro centros.

1.1 Óvalo dado el eje mayor: Óvalo de tres partes.

Sea $\overline{AB}$ la magnitud del eje mayor del óvalo.

- Se divide el segmento $\overline{AB}$ en tres partes iguales, obteniendo los puntos O_1 y O_2.
- Con centro en O_1 y O_2 se trazan las circunferencias de radios iguales a la tercera parte del diámetro $\overline{AB}$.
- Los puntos O_3 y O_4, comunes a ambas circunferencias, determinan los centros de los otros dos arcos tangentes a las circunferencias primitivas en los puntos T_1, T_2, T_3 y T_4.

1.2 Óvalo dado el eje mayor: Óvalo de cuatro partes.

Sea $\overline{AB}$ el eje mayor dado.

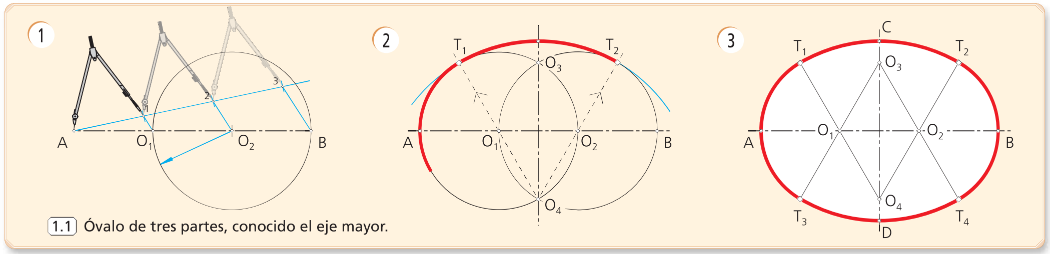
- Se divide el segmento $\overline{AB}$ en cuatro partes iguales, obteniéndose los puntos O_1, O y O_2.
- Con centro en O_1, O y O_2 se trazan las circunferencias de radios iguales a $\overline{AB}/4$.
- La circunferencia de centro O cortará a la mediatriz de $\overline{AB}$ (eje menor del óvalo) en los puntos O_3 y O_4, centros de la otra pareja de circunferencias tangentes a las primitivas en los puntos T_1, T_2, T_3 y T_4, obtenidos uniendo los centros de los arcos tangentes correspondientes.

1.3 Óvalo conocido el eje menor.

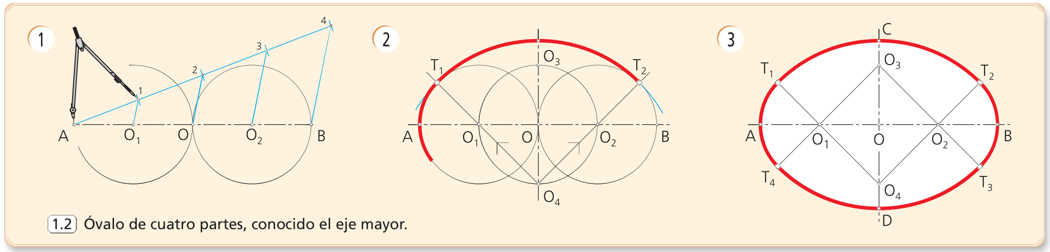
- Sea $\overline{CD}$ el eje menor del óvalo. Se traza la mediatriz del segmento $\overline{CD}$, obteniendo el punto medio O, centro de la circunferencia de radio $\overline{CD}/2$.
- Los puntos O_1 y O_2, intersecciones de la mediatriz anterior con la circunferencia dibujada, resultan ser los centros de los arcos menores del óvalo. Los extremos C y D del eje menor son los centros de los arcos mayores.
- La unión de C y D con O_1 y O_2 determina los puntos de enlace T_1, T_2, T_3 y T_4 de los cuatro arcos de circunferencia.

1.4 Óvalo conocidos los dos ejes.

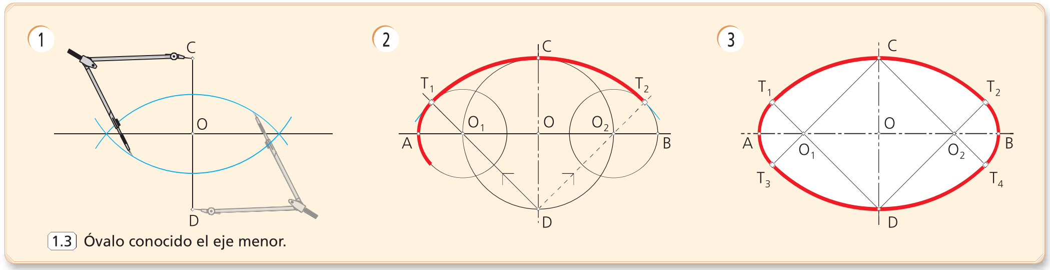
- Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ las magnitudes de los ejes considerados.
- Se dibujan los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ perpendiculares entre sí, cortándose en su punto medio O. Con centro en O y radio el semieje mayor se traza un arco hasta cortar a la prolongación del eje menor en el punto E.
- Con centro en C y radio $\overline{CE}$ se traza otro arco que corta al segmento $\overline{AC}$ en F. A continuación se traza la mediatriz del segmento $\overline{AF}$, que corta a los ejes dados en O_1 y O_4.
- Los puntos O_1 y O_4, junto con los puntos O_2 y O_3, simétricos de los anteriores respecto al centro O de la curva, son los centros de los cuatro arcos que forman el óvalo.



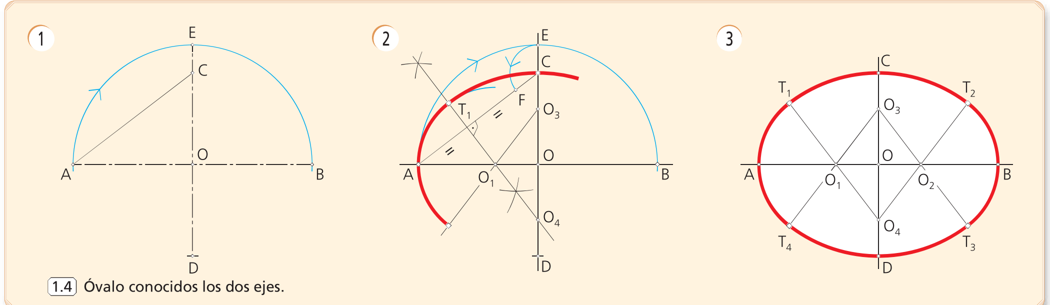
1.1 Óvalo de tres partes, conocido el eje mayor.



1.2 Óvalo de cuatro partes, conocido el eje mayor.



1.3 Óvalo conocido el eje menor.



1.4 Óvalo conocidos los dos ejes.

1.5 Óvalo inscrito en un rombo.

- Sea el rombo *ABCD*, cuyas diagonales se cortan en su punto medio *O*. Desde los vértices obtusos del paralelogramo, puntos *A* y *C*, se trazan perpendiculares a los lados opuestos, determinando los puntos O_1 y O_2, centros de los arcos menores del óvalo.
- Los puntos *A* y *C* son los centros O_3 y O_4 de los arcos mayores que completan y cierran el óvalo.
- Cuando el óvalo se encuentra inscrito en un rombo de ángulos *120° y 30°*, toma el nombre de ***óvalo isométrico***, denominado así por corresponder, convencionalmente, a las circunferencias representadas en el Sistema Isométrico de representación cuando éstas son paralelas a los planos coordenados del sistema tridimensional.

2 OVOIDES

Se denomina ovoide a la curva cerrada y convexa, formada por arcos de circunferencia tangentes entre sí, dependientes de un único eje de simetría.

Se trata de una curva muy parecida al contorno de un huevo (de ahí su denominación) y su trazado es eminentemente empírico, lo que trae consigo la existencia de un gran número de construcciones. Aquí analizamos alguno de los trazados más utilizados.

2.1 Ovoide conocido el eje no simétrico.

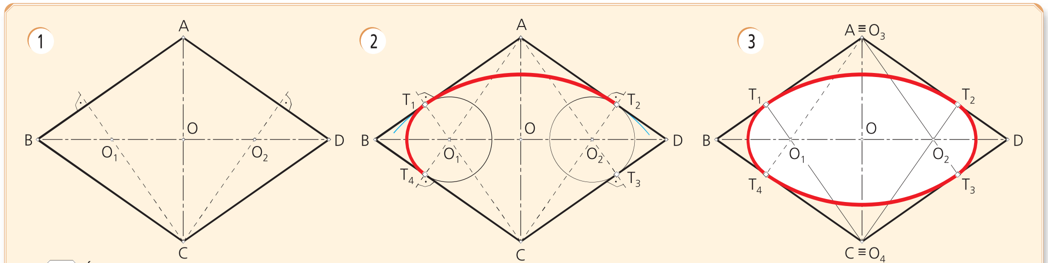
- Dado el diámetro $\overline{CD}$ del ovoide, se traza su mediatriz para determinar su punto medio O_1 y se dibuja la circunferencia de centro este punto y radio $\overline{CD}/2$.
- La mediatriz antes trazada, eje de simetría del ovoide, corta a la circunferencia dibujada en el punto O_2, centro del arco menor de la curva. La unión de este punto con *C* y *D* determina los puntos de enlace T_1 y T_2.
- Con centro en *C* y *D* se trazan los arcos mayores que además corresponden con los puntos de enlace T_3 y T_4 respectivamente. Se completa el ovoide con la semicircunferencia de centro O_1 y radio $\overline{O_1A}$.

2.2 Ovoide común a dos circunferencias de centros y radios dados.

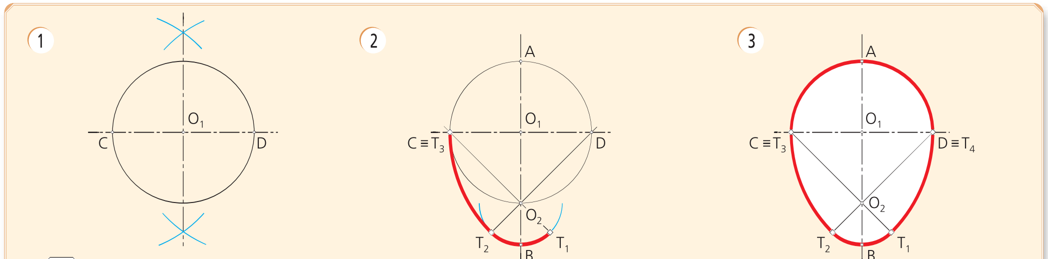
- Se parte de conocer los centros O_1, O_2 y radios respectivos de dos circunferencias secantes cuyo diámetro común es el eje de simetría del ovoide.
- El trazado se simplifica al considerar que el arco solución de centro O_3 u O_4 es concéntrico al que pasa por el punto O_2 y por un punto *R* del diámetro $\overline{CD}$, tal que $\overline{CR} = r_2$; basta con trazar la mediatriz de $\overline{O_2R}$ para hallar O_4 y consiguientemente O_3, simétrico de él, respecto del eje.
- Localizados los cuatro centros O_1, O_2, O_3 y O_4 que determinan el ovoide y definidos los puntos de enlace T_1, T_2, T_3 y T_4 el trazado completo de la curva es inmediato.

2.3 Ovoide conocida la magnitud del eje de simetría.

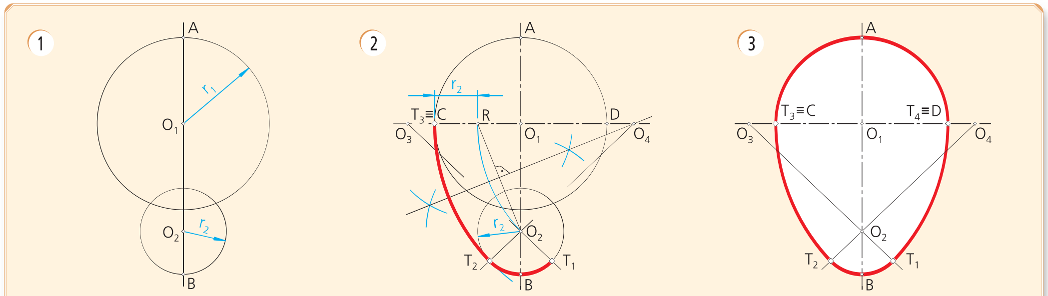
- El procedimiento consiste en dividir el eje $\overline{AB}$, dado, en seis partes iguales, tomando como diámetros de las circunferencias, mayor y menor, cuatro y dos partes respectivamente.
- La prolongación del diámetro perpendicular al eje por O_1 contiene los centros O_3 y O_4 de los arcos mayores del ovoide, que enlazan los arcos de centros O_1 y O_2.
- Para obtener los centros O_3 y O_4 se lleva, a partir de los extremos *C* y *D*, el semidiámetro o, dicho de otra forma, la tercera parte del eje de simetría.
- Uniendo O_3 y O_4 con O_2 se hallan, respectivamente, los puntos T_1 y T_2 de enlace. El trazado ordenado de los arcos, engruesando las líneas que lo determinan, define la curva completa.



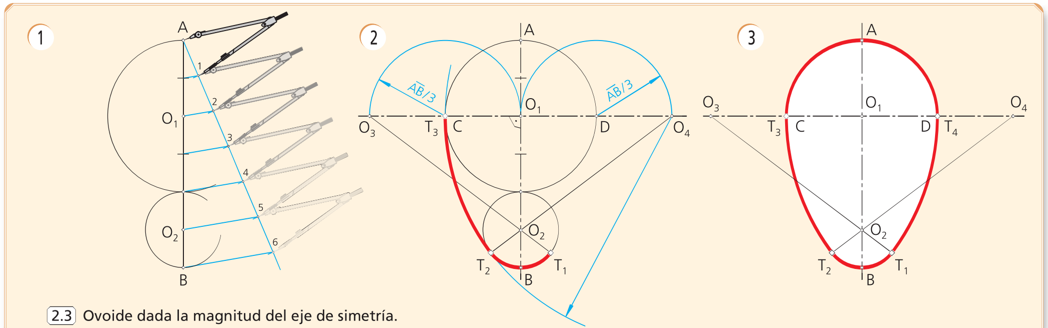
1.5 Óvalo inscrito en un rombo.



2.1 Ovoide conocido el eje no simétrico.



2.2 Ovoide común a dos circunferencias de centros y radios dados.



2.3 Ovoide dada la magnitud del eje de simetría.

3 ESPIRALES

Las espirales son curvas abiertas y planas, generadas por el movimiento de un punto que se desplaza gradualmente alrededor de otro fijo, alejándose de él en cada vuelta.

La distancia radial que existe entre dos vueltas o espiras consecutivas se denomina *«paso»* de la espiral.

3.1 Espiral de base un segmento $\overline{AB}$.

Está formada por arcos semicirculares tangentes entre sí, con centros en los extremos del segmento $\overline{AB}$ dado. Los puntos de tangencia se encuentran sobre la recta determinada por los centros y el paso de la espiral es igual al doble de la distancia entre centros.

- Con centro en *A y en B*, extremos del segmento dado, considerado como núcleo de la espiral, se van trazando arcos de radio variable e iguales a las distancias respectivas de *A y de B* a los puntos que van obteniéndose.
- Obsérvese cómo los radios van creciendo sucesivamente en $\overline{AB}$, siendo el paso de esta espiral el doble de la longitud del segmento base, esto es: $p = 2 \cdot \overline{AB}$.

3.2 Espirales de núcleo poligonal o volutas de varios centros.

En este tipo de espirales los centros de los arcos-enlaces se consideran situados en los vértices de un módulo base formado por los vértices de polígonos, regulares o irregulares.

Los radios se forman prolongando ordenadamente los lados del polígono y sumando sucesivamente el siguiente con el anterior, hasta completar una vuelta, que ocurrirá cuando la curva voluta haya empleado todos los vértices del polígono.

3.2.1 Voluta de tres centros.

Se trata de una espiral de base un triángulo equilátero *ABC*. El *«paso p»* de la espiral (voluta) será igual al perímetro del triángulo; es decir, tres veces el lado.

- Se prolongan los lados del triángulo *ABC*, base de la espiral, y de lado la tercera parte del paso *(p/3)*.
- Se hace centro en uno de los tres vértices y se van trazando arcos de circunferencia de radios crecientes sucesivamente en $p/3$. Así, con centro en *B* se lleva el radio $\overline{BA} = p/3$; con centro en *C* el radio $\overline{C1} = 2 \cdot p/3$; con centro en *A* el radio $\overline{A2} = 3 \cdot p/3 = p$, lo que completa una vuelta y determina la magnitud del paso de la curva.
- El recorrido sucesivo por los vértices originará tantas vueltas como se desee hacer crecer la curva, siempre con amplitud del ángulo *120°*.

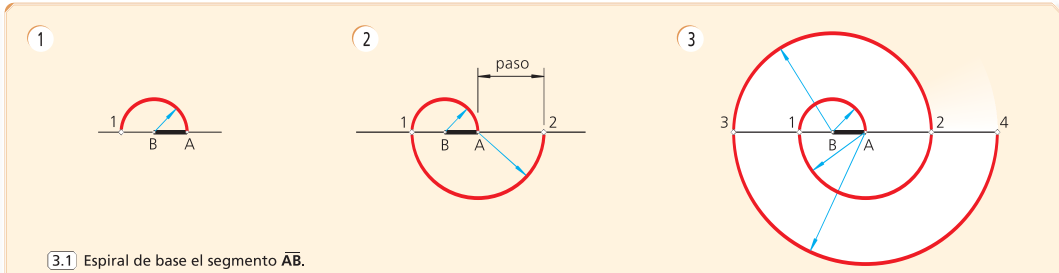
3.2.2 Voluta de cuatro centros.

Como en los casos anteriores, los centros se encuentran en los vértices, siendo sus radios: $p/4$, $2 \cdot p/4$, $3 \cdot p/4$, $4 \cdot p/4$, etc. y la amplitud del ángulo *90°*.

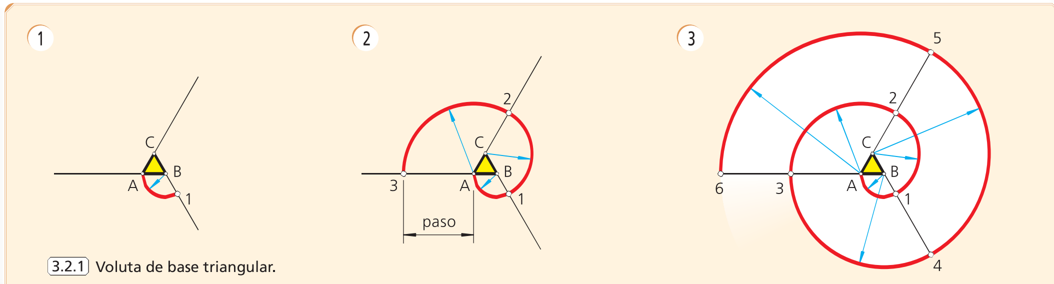
El *«paso p»* de la espiral es igual al perímetro del cuadrado base que genera la voluta.

En la figura, la curva nace en el vértice *A* del cuadrado, con un arco de centro *B* y radio el lado del polígono.

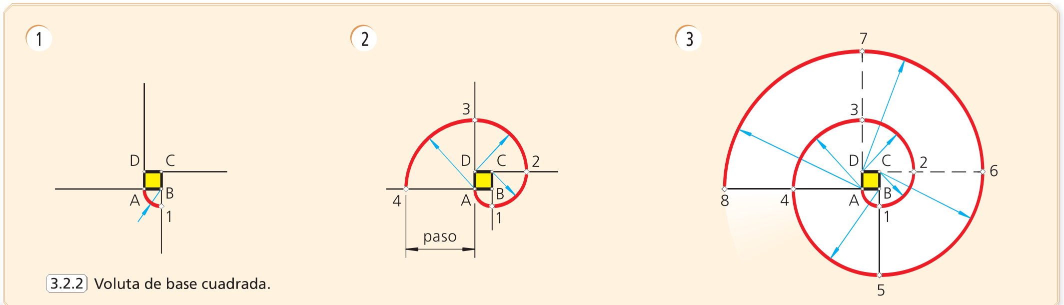
- Siguiendo con el arco de centro *C* y radio $2 \cdot p/4$ enlaza otro cuarto de circunferencia que va del punto *1 al 2*, y así, sucesivamente, hasta alcanzar la primera vuelta en el punto *4*.
- Un nuevo recorrido, con arcos centrados en los vértices, crea tantas espirales como vueltas se describan.



3.1 Espiral de base el segmento $\overline{AB}$.



3.2.1 Voluta de base triangular.

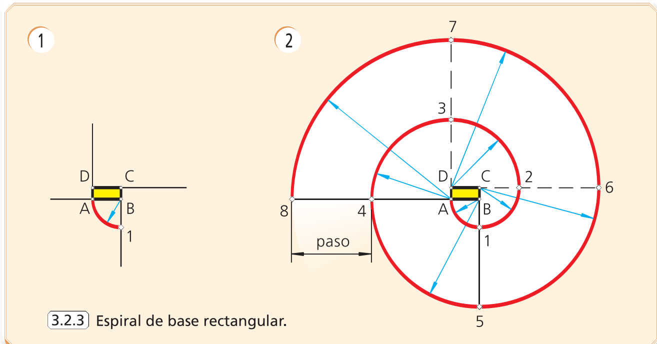


3.2.2 Voluta de base cuadrada.

3.2.3 Espiral de base un rectángulo.

Cuando el módulo base es un polígono irregular, como en este caso, la espiral cambia rápidamente su trayectoria, alternando, de modo también brusco, aunque parcialmente constante, las longitudes de sus radios. Como en los casos anteriores, el *«paso p»* de la voluta es igual al perímetro del rectángulo base.

- Una vez dibujado el rectángulo base *ABCD*, el primer cuadrante de arco, de centro *B*, va del vértice *A* al punto *1* de enlace con el siguiente, siendo su radio el lado mayor del polígono base.
- Los puntos de enlace situados en las prolongaciones de los lados menores del rectángulo centran las trayectorias de menor curvatura, mientras que los de mayor curvatura se encuentran en las prolongaciones de los lados mayores.



3.2.3 Espiral de base rectangular.

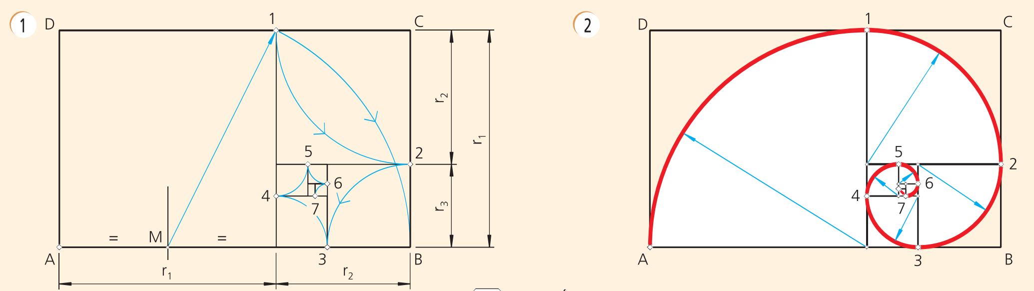
3.3 Espiral áurea.

Formada por arcos de circunferencia tangentes entre sí, verificándose que la razón de radios consecutivos es constante e igual al ***número de oro*** ϕ.

Así, en la *fig. 3.3* se cumple que:

$$r_1/r_2 = r_2/r_3 = ... = \phi = 1{,}618033989 \ \ ...$$

- Se comienza por dibujar un rectángulo áureo *ABCD* de relación entre lados el valor ϕ. A partir de él se determina, como se aprecia en la figura, la serie correspondiente de subrectángulos áureos.
- A continuación se trazan los arcos de circunferencia inscritos en los cuadrados. La sucesión ordenada de los mismos determina la espiral áurea.
- El trazado, como se aprecia, nace en sentido contrario a lo establecido normalmente, esto es, de fuera a dentro hasta los límites naturales en que la trayectoria pueda ser secuenciada visualmente.



3.3 Espiral Áurea.

3.4 Espiral logarítmica.

Es la más relevante de todas las espirales, también denominada ***espiral mística*** *o* ***natural*** por su frecuente presencia en la naturaleza.

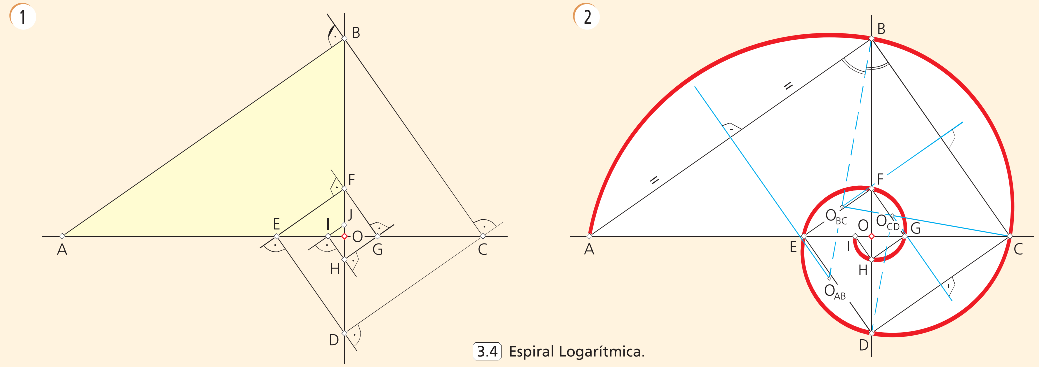
La espiral logarítmica es la curva que responde a la expresión exponencial en coordenadas polares:

$$\boxed{r = k \cdot e^{\omega}}$$

siendo $\boldsymbol{r}$ el radio vector, $\boldsymbol{k}$ una cte. y $\boldsymbol{\omega}$ el argumento.

En el procedimiento de trazado que se expone, suponemos dos rectas perpendiculares, a modo de ejes, que se cortan en el punto-origen *O*.

- Se traza un triángulo rectángulo de catetos $\overline{OA}$ *y* $\overline{OB}$ donde $\overline{OA} = \boldsymbol{r}$ (medido según una unidad arbitraria, *u = 1)* y $\overline{OB} = 1$. La curva, por tanto, será de mayor alargamiento o achatamiento, dependiendo de la relación $\overline{OA} / \overline{OB}$ entre los catetos.
- Definido el triángulo rectángulo *AOB*, por el vértice *B* se traza una perpendicular a la hipotenusa, obteniendo sobre el otro eje el punto *C*, por el que, a su vez, se trazará otra perpendicular al segmento $\overline{BC}$, obteniendo el punto *D* sobre el otro eje y así sucesivamente. Es de observar que la espiral no llegará a alcanzar jamás el origen *O*, si bien se aproximará a él infinitamente.
- La curva, obviamente, se traza a mano alzada. No obstante dado que, gráficamente, se ajusta bastante al enlace de arcos de circunferencia, es posible determinar sus centros O_{AB}, O_{BC}, O_{CD}, ... como intersección de las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ... con las bisectrices de los ángulos rectos correspondientes.



3.4 Espiral Logarítmica.

3.5 Espiral de Arquímedes.

Aunque no se trata de una curva cuyo recorrido esté compuesto por enlaces de arcos de circunferencia, creemos oportuno exponerla aquí debido a su interés histórico, su importancia técnica y su fácil trazado.

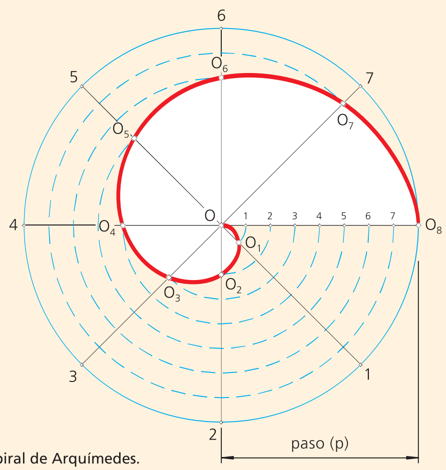
Está generada por la trayectoria de un punto que se mueve de modo rectilíneo uniforme sobre una recta que gira a velocidad angular constante respecto a un punto fijo *O*.

Para definir el itinerario del punto se determina su situación en distintos momentos. Para ello, teniendo en cuenta que el punto se mueve con velocidad uniforme a lo largo de la semirecta y que la misma gira, respecto a su origen, con una velocidad angular constante, el punto en cuestión recorrerá segmentos iguales mientras la recta recorre ángulos iguales.

- Se comienza por trazar una circunferencia de centro el punto *O* (inicio de la curva) y radio igual al paso de la espiral.
- Se divide su radio en un número de partes iguales (ocho en la figura) y en el mismo número de partes se divide la circunferencia.
- Por cada octavo que recorra girando el punto que parte del origen, se desplazará alejándose de éste, también un octavo. De las componentes de estos dos movimientos se determinan los diversos puntos $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_8$ que, unidos a mano alzada, o con plantilla de curvas, definen la trayectoria que dibuja la curva. Un ejemplo de su utilización se da en los surcos de los discos de audio que están resueltos con este tipo de espiral.

En este estudio se ha tratado de mostrar al lector curvas en forma de espiral que, siendo utilizadas en diseño y con frecuente presencia en la naturaleza, ofrecen una aplicación directa en el apartado de arcos de circunferencia enlazados, cuyos radios consecutivos crecen de modo constante.

Fue *Goethe*, el célebre escritor alemán, quien incorporó, en numerosos escritos, la sensación que despiertan estos trazados como símbolo de la vida y de la evolución. Los antiguos creían que la energía, tanto física como espiritual, fluía en forma de espiral.



3.5 Espiral de Arquímedes.