CÁLCULO DE LÍMITES

SUMA	PRODUCTO	COCIENTE	
$\infty \pm K = \infty$	$K \cdot \infty = \infty$	$\frac{0}{K} = 0$	$\frac{K}{0} = \infty$
$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{\infty}{K} = \infty$	$\frac{K}{\infty} = 0$
$\infty - \infty =$ Indeterminado	$0 \cdot \infty =$ Indeterminado	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{0} = \infty$
		$\frac{0}{0} =$ Indeterminado	$\frac{\infty}{\infty} =$ Indeterminado

POTENCIAS		
$K^0 = 1$	$0^K = \begin{cases} 0 & si\ K \geq 0 \\ \infty & si\ K < 0 \end{cases}$	$0^0 =$ Indeterminado
$0^\infty = 0$	$K^{+\infty} = \begin{cases} 0 & si\ 0 < K < 1 \\ +\infty & si\ K > 1 \end{cases}$	$\infty^0 =$ Indeterminado
$+\infty^{+\infty} = +\infty$	$e^{+\infty} = +\infty \quad e^{-\infty} = 0^+$	$1^\infty =$ Indeterminado

a) Funciones polinómicas:

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n = \pm\infty}$$

Depende del signo del coeficiente de mayor grado:

$\lim_{x \to +\infty} 3x^4 - 5x^3 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} -5x^3 + 7x^2 + 9 = -\infty$

Cuando $x \to -\infty$ hay que tener en cuenta si el exponente es par o impar

$\lim_{x \to -\infty} 3x^3 - 5x^2 + 7 = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} -2x^3 + 7x^4 - 3 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^2 + 8 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} -x^4 + 5 = -\infty$

b) Funciones inversas polinómicas: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{k}{P(x)} = 0$

Ejemplo:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = \frac{4}{+\infty}$; expresión no real pero que tiende a 0.

c) Funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

La forma de resolver este tipo de indeterminación es dividir el numerador y el denominador por la potencia de mayor grado de la variable.

grado $P >$ grado $Q \Rightarrow L = \pm\infty$	grado $P =$ grado $Q^{(1)} \Rightarrow L = \frac{a_n}{b_n}$	grado $P <$ grado $Q \Rightarrow L = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{3-0}{0+0}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x^3+4x}{-2x^3+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{8x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}}{-\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8+\frac{4}{x^2}}{-2+\frac{3}{x^3}}=\frac{8+0}{-2+0}=-4$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{6x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{6}{x}}{1-\frac{9}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0$

En resumen:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n+\ldots+bx+c}{dx^m+\ldots+ex+f}=\begin{cases}\boxed{0} & \text{si} \quad \text{grado } P(x) < \text{grado } Q(x)\\[2mm] \boxed{\dfrac{a}{d}} & \text{si} \quad \text{grado } P(x) = \text{grado } Q(x)\\[2mm] \boxed{\pm\infty} & \text{si} \quad \text{grado } P(x) > \text{grado } Q(x)\end{cases}$$

(El signo del límite lo da el signo de los coeficientes a y d)

NOTA: Cuando $\boxed{x\to-\infty}$ el criterio sigue siendo el mismo, mirando los signos en el caso: grado $P(x) >$ grado $Q(x)$.

b) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Se divide numerador y denominador por la potencia máxima de la variable.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{13x+2}{\sqrt{4x^2+3x+2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{13x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{13+\frac{2}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\frac{13}{\sqrt{4}}=\frac{13}{2}$$

c) Indeterminación $\infty - \infty$: puede resolverse realizando la operación indicada.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2x-1}-\frac{3x^2}{x+2}\right]\overset{\boxed{\infty-\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2\cdot(x+2)-3x^2\cdot(2x-1)}{(2x-1)\cdot(x+2)}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+2x^2-6x^3+3x^2}{2x^2+4x-x-2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-5x^3+5x^2}{2x^2+3x-2}\right]=-\infty$$

9.- Comprueba que los siguientes límites son indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$, realiza las operaciones correspondientes y calcúlalos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5x+7}{x+3}-2x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5x+7}{x+3}-\frac{x^2+5}{x+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x}-\frac{x^3+1}{x^2-1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-x^2+3}{x-1}+\frac{x^2+3}{x+1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2}-\frac{x^3+2x^2}{2(x^2+1)}\right)$

a) Indeterminación $\frac{0}{0}$ e $\infty - \infty$: Se multiplica y se divide por el radical conjugado.

La expresión conjugada de A + B es A - B.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\overset{\boxed{\frac{0}{0}}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3})^2-2^2}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{1}{4}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})\overset{\boxed{\infty-\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+5})^2-(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+5-x}{\sqrt{n+5}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=\frac{5}{\infty}=0$$

11.- Cuando aparecen radicales en una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ se multiplica y se divide por el conjugado, y se tiene en cuenta que $(a - b)\cdot(a + b) = a^2 - b^2$. Calcula:

a) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-3}-2x)$

b) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$

c) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+4000}-\sqrt{x})$

d) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})$

e) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)$

COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES Y CONTINUIDAD

Una función $f(x)$ es **continua en el punto** $x = a$ sí, y solo sí, se cumplen estas tres condiciones:

- Que para el punto $x = a$ exista $f(a)$.
- Que exista y sea finito el límite de la función para $x = a$, lo que implica que existan los límites laterales y coincidan.
- Que los dos valores anteriores coincidan:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Bajo estas tres condiciones, la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$.

TIPOS DE DISCONTINUIDADES

<table>
<tr><td rowspan="2">EVITABLES
(Existen los límites laterales y son finitos e iguales)</td><td colspan="2">No existe imagen $f(a)$ en el punto</td></tr>
<tr><td colspan="2">La imagen $f(a)$ existe, pero no coincide con los límites laterales</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INEVITABLES
Los límites laterales no existen, bien porque alguno es infinito o porque son distintos, o alguno de los límites laterales no existe.</td><td rowspan="2">De primera especie</td><td>De salto finito (Límites laterales finitos pero distintos)</td></tr>
<tr><td>De salto infinito (Alguno (o los dos) límites laterales son infinitos)</td></tr>
<tr><td>De segunda especie</td><td>No existe alguno de los límites laterales.</td></tr>
</table>

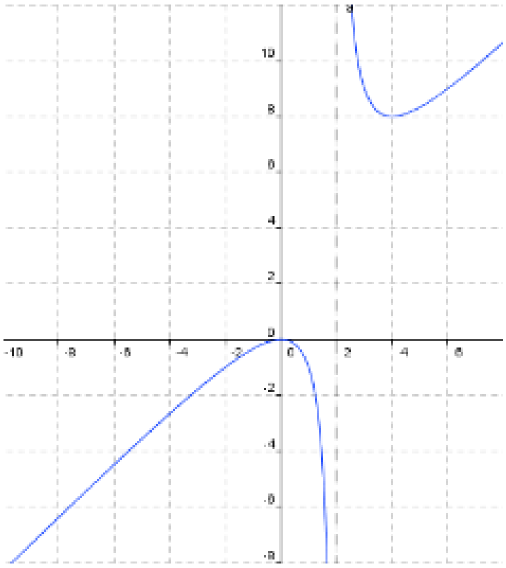
Las **discontinuidades evitables**, se llaman así porque se pueden solventar mediante la redefinición de la función en el punto, bien porque no estuviera definida, bien porque no coincidiera la imagen con los límites laterales, que existen, coinciden y son finitos.

Las **discontinuidades inevitables** vienen dadas porque:

- los límites laterales existen, son finitos y no coinciden (de **primera especie** de salto finito). Salto es igual a $\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)$
- existen, pero alguno es infinito (de primera especie de salto infinito). Salto infinito.
- o no existe alguno de los límites laterales o los dos (de **segunda especie**).

- **Discontinua inevitable de salto infinito**: Si alguno de los límites laterales es infinito o no existe.

$\lim_{x\to a^-} f(x)$ =∞ ó $\lim_{x\to a^-} f(x) =$ -∞ ó $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ ó $\lim_{x\to a^+} f(x)$=-∞



En x= 2 la función presenta una **discontinuidad inevitable de salto infinito.**

En este caso el límite lateral por la izquierda tiende a -∞

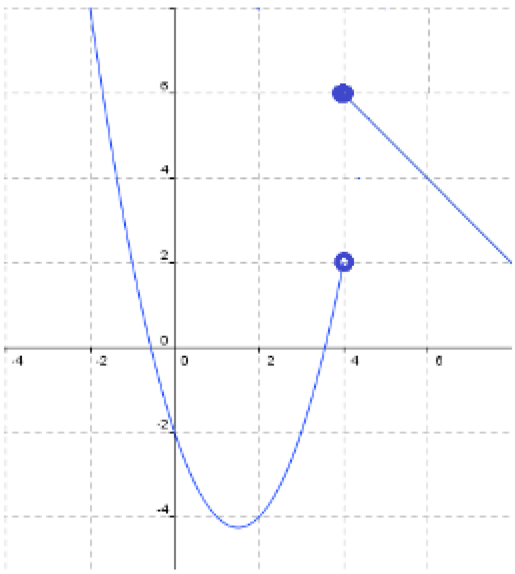
$\lim_{x\to a^-} f(x) =$ -∞

y el límite lateral por la derecha tiende a ∞

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$

Sólo bastaría que uno de ellos tendiese a ∞ o -∞, pero en este caso tienden los dos.

- **Discontinua inevitable de salto finito**: Si los dos límites laterales son finitos pero distintos. El salto es la diferencia, en valor absoluto, de los límites laterales.



En x=4 vemos que la función presenta una **discontinuidad inevitable de salto finito.**

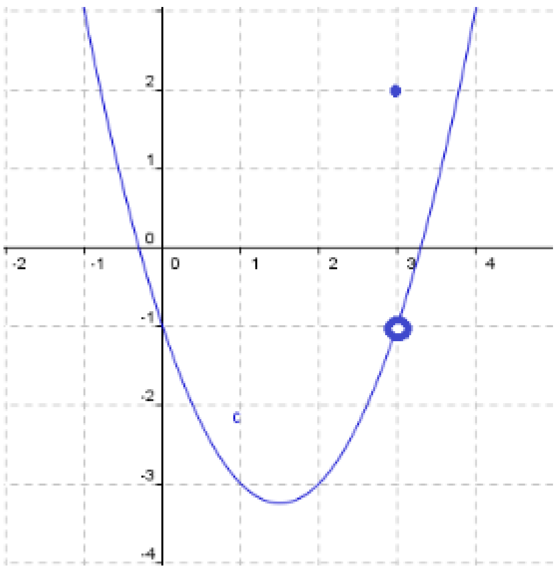
En x=4 el límite por la izquierda tiende a 2 y el límite por la derecha tiende a 6.

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 6$

El salto será de |6 – 2|= 4

- **Discontinua evitable**: La función presenta esta discontinuidad cuando los límites laterales son iguales y finitos, pero este valor no coincide con f(a) o f(a) no existe.



En x=3 la función presenta una **discontinuidad evitable.**

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -1$

f(3)=2

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1 = \lim_{x\to 3^+} f(x) = -1$ Ambos límites son finitos e iguales pero no coinciden con el valor de la función en x=3.

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = -1 \neq$ f(3)

Por lo tanto estaremos hablando de una discontinuidad evitable.