TEMA 6 – LÍMITES, CONTINUIDAD, ASÍNTOTAS

6.1 – LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

6.1.1 – LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

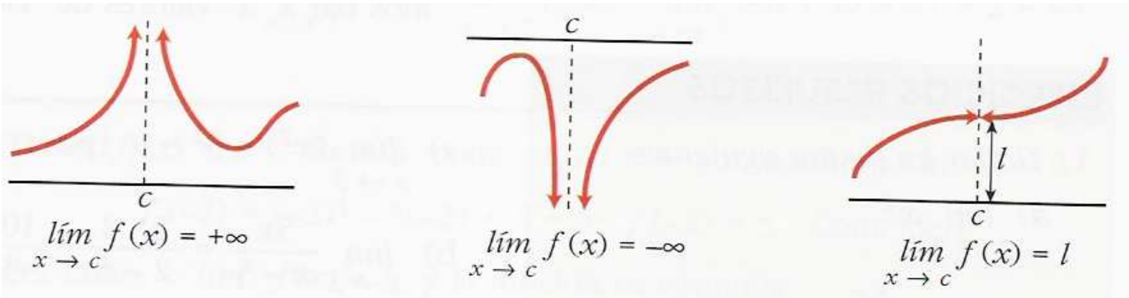
Límite de una función en un punto

$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ Se lee: El límite cuando x tiende a c de f(x) es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima a c

Notas:

- Que x se aproxima a "c" significa que toma valores muy cerca de "c" (Se puede acercar por la izquierda o por la derecha).
- ℓ puede ser +∞ ó -∞ y entonces **x = c es una asíntota vertical**.

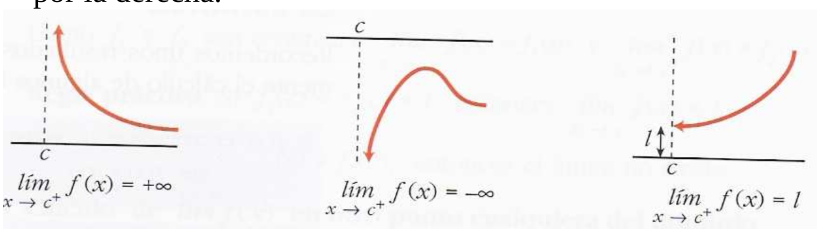


Límites laterales de una función en un punto

- Límite por la derecha:

$\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$ Se lee: El límite cuando x tiende a c por la derecha de f(x) es ℓ

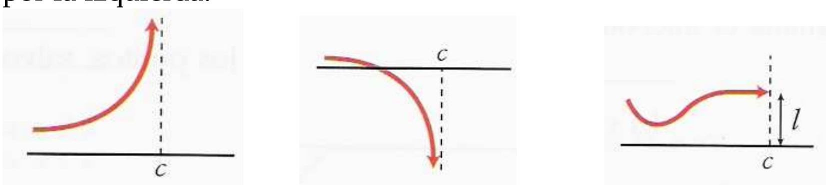
Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima a c por la derecha.



- Límite por la izquierda:

$\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell$ Se lee: El límite cuando x tiende a c por la izquierda de f(x) es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima a c por la izquierda.



Existen del límite

Para que exista el límite de una función en un punto es necesario que existan los dos límites laterales y sean iguales.

6.1.2 – LÍMITES EN EL INFINITO

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de f(x) es más infinito
Significa: la función toma valores grandes positivos cuando la x toma valores grandes positivos. (1º cuadrante)

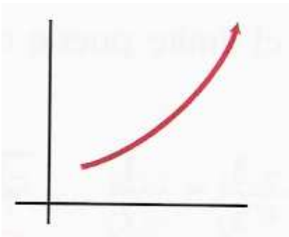
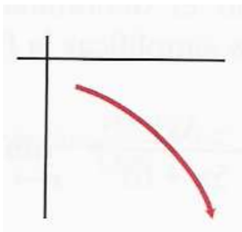
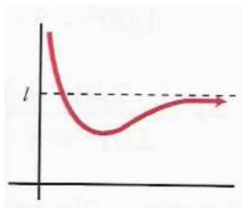
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de f(x) es menos infinito.
Significa: la función toma valores grandes negativos cuando la x toma valores grandes positivos. (4º cuadrante)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de f(x) es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x toma valores muy grandes positivos: **y = ℓ es una asíntota vertical.**

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de f(x) es más infinito
Significa: la función toma valores grandes positivos cuando la x toma valores grandes negativos. (2º cuadrante)

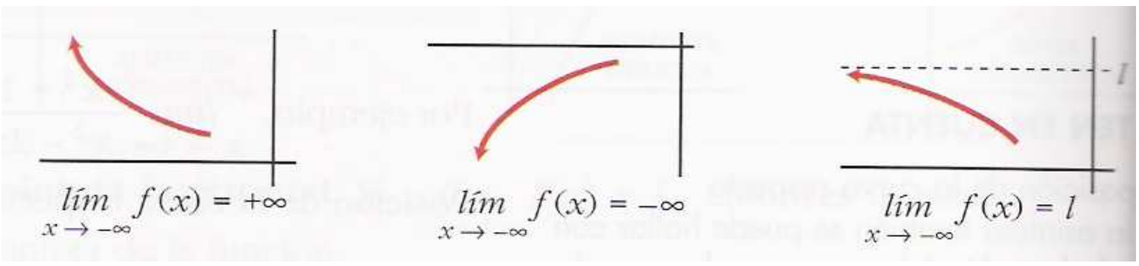
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de f(x) es menos infinito.
Significa: la función toma valores grandes negativos cuando la x toma valores grandes negativos. (3º cuadrante)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$

Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de f(x) es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x toma valores muy grandes negativos: **y = ℓ es una asíntota vertical.**



6.1.3 – CÁLCULO DE LÍMITES

1 – Se sustituye la “x” por el valor al que tiende

a) $\lim_{x\to 3} x^2$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{5x}{x-5}$ c) $\lim_{x\to 7} \sqrt{3x+4}$

d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen} x + 3)$ e) $\lim_{x\to 0,1} \log_{10} x$ f) $\lim_{x\to +\infty} 2x^2 - 4x + 7$

g) $\lim_{x\to +\infty} -2x^2 - 4x + 7$ h) $\lim_{x\to -\infty} 2x^2 - 4x + 7$ i) $\lim_{x\to -\infty} -2x^2 - 4x + 7$

j) $\lim_{x\to +\infty} 2x + x^3 - 3$ k) $\lim_{x\to -\infty} 2x + x^3 - 3$ l) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3x}$

m) $\lim_{x\to -\infty} -\frac{1}{x^2}$ n) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-1}{-5}$ ñ) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-1}{-5}$

2 – Indeterminaciones:

$\mathbf{\frac{k}{0}}$ **Hallar límites laterales**

a) $\lim_{x\to 2} \frac{2}{x-2}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{-2}{x-2}$ c) $\lim_{x\to 2} \frac{3}{2-x}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{-3}{2-x}$ e) $\lim_{x\to 2} \frac{3x}{(x-2)^2}$ f) $\lim_{x\to 2} \frac{-3}{(x-2)^2}$

$\mathbf{\frac{0}{0}}$ **Factorizar y simplificar**

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}$ c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}$

$$\frac{\infty}{\infty}\begin{cases} \pm\infty & \text{Si grado del numerador} > \text{grado del denominador (El signo depende de los coeficientes de la x de mayor grado del numerador y del denominador)} \\ \frac{a}{b} & \text{Si grado del numerador} = \text{grado del denominador (a y b son los coeficientes de la x de mayor grado del numerador y del denominador)} \\ 0 & \text{Si grado del numerador} < \text{grado del denominador} \end{cases}$$

a) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-5x+3}{3x-5}$ b) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3}{x^3}$

c) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-5x+1}{2x^2-5}$ d) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3}{-x^3}$

∞ - ∞ Se hacen operaciones. Cuando aparecen radicales, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

a) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right)$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

$$\mathbf{1^{\infty}}\text{ : Tipo número e : Aplicar : } \lim_{x\to\begin{cases}a\\ \infty\end{cases}}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \quad \text{ó}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x).[f(x)-1]}$$

3- En funciones definidas a trozos, en los puntos donde esté definida de distinta forma si me aproximo por valores más pequeños, que por valores más grandes, habrá que hacer límites laterales.

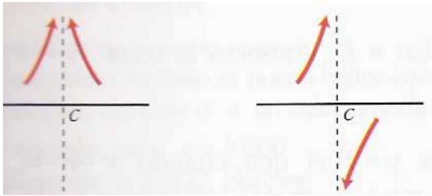
a) Dada la función f(x) = $\begin{cases} 2x-5 & \text{si } x<3 \\ -x+7 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$ Calcular su límite en los puntos 3,1, 7

6. 2 – ASÍNTOTAS Y RAMAS INFINITAS

- **Asíntotas verticales: x = c y → ∞**

Cálculo: Puntos que anulan el denominador
Puntos que anulan lo que está dentro del logaritmo

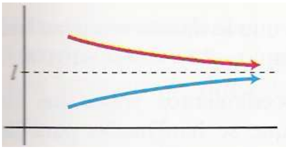
Aproximación: Calcular los límites laterales $\begin{cases} -\infty & \text{Por abajo} \\ +\infty & \text{Por arriba}\end{cases}$



- **Asíntotas horizontales: x → ∞ y = b** (Grado numerador ≤ Grado denominador)

Cálculo: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

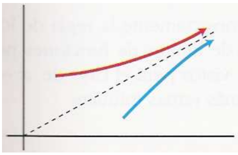
Aproximación: f(± 1000) $\begin{matrix} < b & \text{Por debajo} \\ > b & \text{Por encima}\end{matrix}$



- **Asíntotas oblicuas: y = mx + n** (Grado Numerador – Grado denominador = 1)

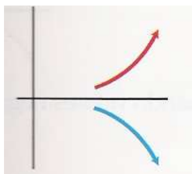
Cálculo: $m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$; $n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$

Aproximación: f(± 1000) $\begin{matrix} < \text{Asíntota}(\pm 1000) & \text{Por debajo} \\ > (\pm 1000) & \text{Por encima}\end{matrix}$



RAMAS INFINITAS (Grado Numerador – Grado denominador ≥ 2)

Cálculo: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$



a) $y = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-2x}$ c) $y = \dfrac{2x}{x^2+2x}$

d) $y = \dfrac{3x-5}{x^2+3x+2}$ e) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-2x}$ f) $y = \dfrac{x^3-5x^2}{-x+3}$

6.3 - CONTINUIDAD

La idea de función continua es la de que “puede ser construida con un solo trazo”.

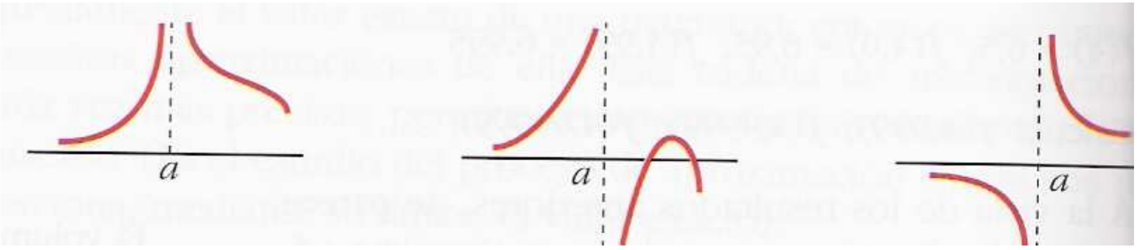
Una función f(x) es continua en el punto x = a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Todas las funciones definidas por expresiones analíticas elementales (es decir, todas las que conocemos hasta ahora, exceptuando las funciones a trozos), son continuas en todos los puntos de su dominio.

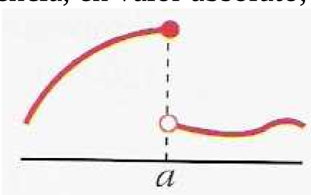
Las funciones a trozos habrá que estudiarlas en los extremos de sus trozos que pertenezcan al dominio.

<u>Tipos de discontinuidades</u>

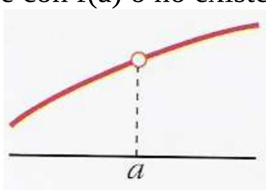
- **Discontinua inevitable de salto infinito**: Si alguno de los límites laterales es infinito o no existe.

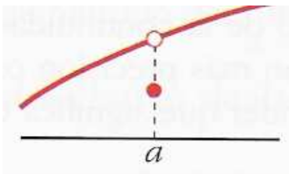


- **Discontinua inevitable de salto finito**: Si los dos límites laterales son finitos pero distintos. El salto es la diferencia, en valor absoluto, de los límites laterales.



- **Discontinua evitable**: Si los dos límites laterales son finitos e iguales, pero su valor no coincide con f(a) o no existe f(a)





a) $y = x^2 - 5$ b) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x}$ c) $y = \dfrac{x + 2}{x - 3}$ d) log x

e) $y = \sqrt{x + 2}$ f) $y = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x < 3 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ g) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

h) Calcular el valor de n para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1 & \text{si } x \leq 4 \\ 2x + n & \text{si } x > 4 \end{cases}$ sea continua en todo R.

i) Calcular k para que $y = \begin{cases} x^3 - 2x + k & \text{si } x \neq 3 \\ 7 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ sea continua en R