SOLUCIÓN BOLETÍN 3.1 MATRICES y DETERMINANTES (EC. MATRICIALES Y POTENCIAS)

1

Solución:

a) $C=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-4&-2&2\\3&2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-4&3\\-1&-2&2\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&-3\\-3&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}$

b) Para que pueda hacerse la multiplicación ABX, la matriz X debe ser de dimensión 2×1.

Sea $X=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, entonces:

$$A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-2&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-6&3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-6a+3b\\-3a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-6a+3b=4\\-3a+2b=2\end{cases}\Rightarrow a=-2/3,\ b=0\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-2/3\\0\end{pmatrix}$$

2

ición:

$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=-I$

'uede observarse que:

$A = A$
$A^2 = -I$
$A^3 = A^2\cdot A = -I\cdot A = -A$
$A^4 = A^3\cdot A = -A\cdot A = -A^2 = I$
$A^5 = A^4\cdot A = I\cdot A = A$
$A^6 = A^5\cdot A = A\cdot A = A^2 = -I$
…
…

posibles resultados son:

$A^{4n}=I$ $\quad A^{4n+1}=A$ $\quad A^{4n+2}=-I$ $\quad A^{4n+3}=-A$

:onsecuencia, como $A^{2005}=A^{4\cdot 501+1}=A$.

3

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1\\3&4\end{pmatrix}$

Si $(A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, se verifica: $\begin{pmatrix}7&1\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}7a+c&7b+d\\3a+4c&3b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}7a+c=1\\3a+4c=0\\7b+d=0\\3b+4d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4/25\\b=-1/25\\c=-3/25\\d=7/25\end{cases}$$

Luego, $(A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}4/25&-1/25\\-3/25&7/25\end{pmatrix}$

b) $A^2X=B\Rightarrow X=(A^2)^{-1}B$

c) $X=(A^2)^{-1}B\Rightarrow X=\begin{pmatrix}4/25&-1/25\\-3/25&7/25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&20\\16&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\4&-1\end{pmatrix}$

4

Solución:

a) $A\cdot X+2B=X\Rightarrow 2B=X-A\cdot X\Rightarrow 2B=(I-A)X\Rightarrow (I-A)^{-1}\cdot 2B=X$

b) Calculamos cada una de las matrices producto:

$2B=\begin{pmatrix}2&-4\\0&2\end{pmatrix}$

$I-A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2\\-1&-3\end{pmatrix}$

La inversa de $I-A$ existe, pues: $|I-A|=4$

Adjunta de $I-A$: $\quad\left((I-A)_{ij}\right)=\begin{pmatrix}-3&1\\2&-2\end{pmatrix}$.

Luego: $(I-A)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3&2\\1&-2\end{pmatrix}$

Por tanto, $X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\0&2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-6&16\\2&-8\end{pmatrix}$

5

Solución:

$AX=BX+C\Rightarrow AX-BX=C\Rightarrow (A-B)X=C\Rightarrow X=(A-B)^{-1}C$

Cálculos:

$A-B=\begin{pmatrix}-1&2\\-2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}$

$|A-B|=-1;\ adj(A-B)=\begin{pmatrix}-2&3\\-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow$

$(A-B)^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-2&-1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}$

Por tanto,

$X=\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

La matriz inversa viene dada por $A^{-1}=\frac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

El determinante de A vale: $|A|=-a^2$.

La matriz de los adjuntos es: $A_{ij}=\begin{pmatrix}-a&2&a\\0&-a&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}$.

Luego $A^{-1}=\frac{(A_{ij})^t}{|A|}=\frac{1}{-a^2}\begin{pmatrix}-a&0&0\\2&-a&0\\a&0&a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/a&0&0\\-2/a^2&1/a&0\\-1/a&0&-1\end{pmatrix}$

Multiplicando:

$$A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}1/a&0&0\\-2/a^2&1/a&0\\-1/a&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^2&0&0\\4a&a^2&0\\1-a&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\2&a&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}=A$$

b) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

El rango es mayor o igual que 2, pues el menor $\begin{vmatrix}-1&-1\\3&6\end{vmatrix}=-3\neq 0$.

Para ver si puede ser 3 hacemos su determinante.

$$\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\3&6&9\\-5&-10&m\end{vmatrix}=-(6m+90)+(3m+45)=-3m-45$$

Ese determinante vale 0 cuando $m=-15$.
Por tanto: Si $m=-15$ el rango 2; en caso contrario, el rango vale 3.

7

n:

(a) $|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$ la matriz A es invertible.

$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ la matriz B no es invertible.

Inversa de A:

Matriz adjunta $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $XA - B = 2I \Rightarrow XA = 2I + B \Rightarrow X = (2I + B)A^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$

$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow A^4 = A$ (A es periódica de periodo 3)

$A^{86} = A^{3 \cdot 28} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2$.

8

Solución:

a) $2X - A \cdot X = C - B \cdot X \Rightarrow 2X - A \cdot X + B \cdot X = C \Rightarrow (2I - A + B) \cdot X = C \Rightarrow$

$\Rightarrow X = (2I - A + B)^{-1} \cdot C$, suponiendo que exista la matriz inversa

b) Para las matrices dadas:

$$2I - A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $|2I - A + B| = 2$, dicha matriz tiene inversa. Vamos a calcularla.

La matriz de los adjuntos es: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego, $(2I - A + B)^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$X = (2I - A + B)^{-1} \cdot C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 0 & -1+3 \\ 4+3 & -2 & -2 \\ -2-1 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $X \cdot B = B + A \Rightarrow X = (B + A)B^{-1}$

Cálculo de la inversa de B.

La matriz inversa viene dada por $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|} \cdot (B_{ij})^t$, siendo (B_{ij}) la matriz de los adjuntos

El determinante de B vale: $|B| = -6$.

La matriz de los adjuntos es: $B_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Luego $B^{-1} = \dfrac{1}{-6}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 7/3 \\ 7/6 & 1/2 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10

Solución:

a) $X + X \cdot A + B^t = 2C \Rightarrow X \cdot (I + A) + B^t = 2C \Rightarrow X(I + A) = 2C - B^t \Rightarrow$

$\Rightarrow X = (2C - B^t)(I + A)^{-1}$

La matriz $2C - B^t$ es de dimensión 2×3; la matriz $I + A$ es de dimensión 3×3. Por tanto, X será de dimensión 2×3.

b) $2C - B^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$I + A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. El determinante de esta matriz vale -1: $|I + A| = -1$.

Su inversa es $(I + A)^{-1} = \dfrac{1}{|I + A|}(Adj(I + A))^t$, siendo $(Adj(I + A))^t$ la traspuesta de la matriz de los adjuntos de $I + A$.

Como $Adj(I + A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene que

$$(I + A)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

11

Solucion:

Despejando se tiene:

$$M \cdot X = M + M^T \Rightarrow M^{-1} \cdot M \cdot X = M^{-1} \cdot M + M^{-1}M^T \Rightarrow X = I + M^{-1}M^T$$

Matriz traspuesta: $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Cálculo de M^{-1} por el método de Gauss:

$$(M|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F2-3F1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F2/(-2)]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{F1-2F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

La matriz inversa es $M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Por tanto,

$$X = I + M^{-1}M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

12

Soluci

$$A + 2XB = C \Rightarrow 2XB = C - A \Rightarrow X = \frac{1}{2}(C - A)B^{-1}$$

$$C - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Inversa de B:

$|B| = 4$. Matriz de los adjuntos: $(B_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Luego $B^{-1} = \dfrac{(B_{ij})^t}{|B|} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

13

14

Solución:

La matriz A es inversible si $|A| \neq 0$.

De $A^2 + 2A = I \Rightarrow A(A + 2I) = I$.

Haciendo el determinante de las matrices de ambos miembros:

$|A(A+2I)| = |I| \Rightarrow |A||A+2I| = 1 \rightarrow$ Por tanto, $|A| \neq 0$. (Si $|A| = 0$ el producto anterior valdría 0).

Si en $A(A+2I) = I$ se multiplican ambos miembros por A^{-1}, por la izquierda, se tiene:

$A^{-1}A(A+2I) = A^{-1}I \Rightarrow I(A+2I) = A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = A + 2I$.

15

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$2\times\boxed{3\ \cdot\ 2}\times 3$ ¡No es posible!

A^2 no es posible pues no coincide el nº de columnas (3) del primer factor del produc con el nº de filas (2) del segundo factor del producto (A).

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{¡No es posible!}$$

$2\times 3 \quad - \quad 3\times 2$

A – B no es posible pues A y B no son matrices de la misma dimensión.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 1+0+1 \\ 0+1+1 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$2\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 2 \longrightarrow 2\times 2$

$A \cdot B$ si es posible pues coincide el nº de columnas (3) del primer factor del producto (A) con el nº de filas (3) del segundo factor del producto (B).

b) Despejamos X en la ecuación matricial $A^t + B \cdot X = 3B$.

$$A^t + B \cdot X = 3B \Rightarrow B \cdot X = 3B - A^t \Rightarrow X = B^{-1}(3B - A^t)$$

Determinamos la expresión de B^{-1} y de A^t.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es cuadrada y no podemos calcular su inversa y no podemos resolver el problema con este procedimiento.

Procedemos de otra manera.

Averiguamos la dimensión de la matriz X.

Supongamos que la matriz X tiene dimensión *m x n*.

$$A^t + B \cdot X = 3B \Rightarrow B \cdot X = 3B - A^t$$

$3\times\boxed{2 \cdot m}\times n \longrightarrow 3\times n$

Para que sea posible el producto $B \cdot X$ el valor de m debe ser 2.

Como $3B - A^t = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene dimensión 3x2 y la matriz $B \cdot X$ ti dimensión *3xn* el valor de n debe ser 2.

La matriz X debe tener dimensión 2x2.

Supongamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ debe cumplirse que $B \cdot X = 3B - A^t$.

$$B \cdot X = 3B - A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0+c & 0+d \\ a+0 & b+0 \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ d = 3 \\ a = 3 \\ b = -1 \\ a + c = 2 \rightarrow 3 + (-1) = 2 \text{ ¡Se cumple!} \\ b + d = 2 \rightarrow -1 + 3 = 2 \text{ ¡Se cumple!} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

16

a) Comparamos el número de columnas de A con el número de filas de B. Como son iguales e posible el producto y nos daría como resultado una matriz con 2 filas y 3 columnas.

$$AB=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&-1\\-1&4&0\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 3\longrightarrow 2\times 3$$

$$¡¡IGUALES!!$$

Calculamos AB.

$$AB=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&-1\\-1&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2+0&0+1+0&15-1+0\\-1+4-3&0+2+12&-5-2+0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}5&1&14\\0&14&-7\end{pmatrix}}$$

$$2\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 3\longrightarrow 2\times 3$$

$$¡¡IGUALES!!$$

b) Comparamos el número de columnas de B con el número de filas de A. Como son distintos no es posible el producto.

$$BA=\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&-1\\-1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 2}\times 3\longrightarrow ¡¡\text{No es posible!!}$$

$$¡¡DISTINTOS!$$

c) Calculamos su determinante para comprobar si existe la inversa.

$$|C|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&3&1\\-5&2&0\end{vmatrix}=0+5+0-0-0-2=3\neq 0$$ → Existe la inversa de C.

$$C^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&0&-1\\-5&0&-1\\19&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}&0&\frac{-1}{3}\\\frac{-5}{3}&0&\frac{-1}{3}\\\frac{19}{3}&1&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

d) Despejamos X en la ecuación.

$$2C+4X=3D\Rightarrow 4X=3D-2C\Rightarrow X=\frac{3}{4}D-\frac{1}{2}C$$

Reemplazamos el valor de las matrices y realizamos las operaciones indicadas.

$$X=\frac{3}{4}D-\frac{1}{2}C$$

$$X=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1&0&4\\2&3&0\\1&-1&2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&1\\-5&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&0&3\\\frac{3}{2}&\frac{9}{4}&0\\\frac{3}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-1&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&3\\\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\\frac{13}{4}&-\frac{7}{4}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}}$$