BOLETÍN 3.1 MATRICES y DETERMINANTES (EC. MATRICIALES Y POTENCIAS)

1 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $C=B\cdot A-A^t\cdot B^t$.

b) Halla la matriz X que verifique $A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$.

2 Sea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calcula A^2 y expresa el resultado en función de la matriz identidad.
b) Utiliza la relación hallada con la matriz identidad para calcular A^{2005}.

3 Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & 20\\ 16 & 5\end{pmatrix}$

a) Calcula A^2 y $(A^2)^{-1}$.
b) Despeja X de la ecuación matricial $A^2X=B$.
c) Calcula X.

4 Dada la ecuación matricial: $A\cdot X+2B=X$ con $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Despeja la matriz X.
b) Calcula la matriz X.

5 Resuelve la ecuación matricial AX = BX + C, siendo

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

6 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 2 & a & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a^2 & 0 & 0\\ 4a & a^2 & 0\\ 1-a & 0 & 1\end{pmatrix}$, con a un parámetro real no nulo, comprueba que $A^{-1}\cdot B=A$.

b) Calcula el rango de la matriz $\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\\ -5 & -10 & m\end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real m.

7 Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

a) Determínese si A y B son invertibles y, en su caso, calcúlese la matriz inversa.
b) Resuélvase la ecuación matricial $XA-B=2I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.
c) Calcúlese A^{86}.

8 a) Despeja la matriz X en la ecuación: $2X-A\cdot X=C-B\cdot X$
b) Halla la matriz X sabiendo que

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

9 . Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B$.
b) Calcula la matriz inversa de B y utilícela para resolver la ecuación $X \cdot B = B + A$.

10 Considera la ecuación matricial $X + X \cdot A + B^t = 2C$, donde las matrices A, B y C vienen dadas por

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&0\\-1&2&1\\0&0&-2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-3&5\\4&-5\\4&2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

y donde B^t denota la matriz traspuesta de B.
a) Despeja la matriz X en la ecuación matricial, ¿qué orden tiene?
b) Calcula la matriz $2C - B^t$ y la inversa de la matriz $I + A$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
c) Resuelve la ecuación matricial obteniendo el valor de la matriz X.

11 . Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X = M + M^T$, siendo X una matriz desconocida de tamaño 2×2, $M=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ y M^T la traspuesta de M.

12 . Determina una matriz X tal que $A + 2XB = C$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&3&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&3\\8&-1&-1\end{pmatrix}.$$ Se pide:

13 Halla la matriz X tal que $B \cdot (2A + I) = A \cdot X \cdot A + B$ siendo $A=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\-4&1&-1\\2&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

14 Sea A una matriz cuadrada que verifica que $A^2 + 2A = I$ e I la matriz identidad correspondiente. Demuestra que existe A^{-1} y determínala en función de A y de I.

15 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

a) **(1.5 puntos)** Justifique cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado:

$$A^2 \qquad A-B \qquad A\cdot B \qquad A\cdot B^t$$

b) **(1 punto)** Halle la matriz X tal que $A^t + B \cdot X = 3B$.

16 . *(3,25 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&-1\\-1&4&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&1\\-5&2&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&3&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

a) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular AB? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular BA? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

d) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2C + 4X = 3D$.