1 Consideremos as matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Efectúa, cando sexa posible, as seguintes operacións matriciais: $2A^t - C$, $A + B$, A^tB, $\det(A)$, $\text{Rango}(A)$, $B(C^t - A)$, $\det(B)$, $\det(CA)$, $B^{-1}A$, $(AC)^{-1}$ e $(AC)^2B$.

2 Halla el valor del parámetro para que cada determinante tome el valor que se indica:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & m \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ c) $|C| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 1$

---

a) Desarrollando por la primera columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & m \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow 4 - 3m = 7 \Rightarrow m = -1.$$

b) Desarrollando por la primera fila:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2a + 6 = 0 \Rightarrow a = 3.$$

c) El valor de $|C|$ es el producto de los elementos de la diagonal principal, luego $4k^2 = 1$ y, por tanto, $k = \pm\frac{1}{2}$.

3 Utilizando trasformaciones de Gauss, halla el valor del determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>:
Haciendo transformaciones que se indican, se tiene.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ F2+2F1 \\ F3-2F1 \\ F4-3F1 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Se ha desarrollado por $C1$.

4 Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A| = 4$ y $|B| = -1$. Halla cuando sea posible el valor de los siguientes determinantes:

$|A \cdot B|$, $|2A|$, $|A^2|$, $|A^{-1}|$, $|B^{-1}|$, $-5|B|$, $|-5B|$, $|A| + |B|$, $|A + B|$.

Aplicando las propiedades:

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot (-1) = -4$; $|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 4 = 32$; $|A^2| = (|A|)^2 = 4^2 = 16$.

Como $|I| = |A \cdot A^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$.

Igualmente: $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{-1} = -1$.

$\rightarrow -5|B| = -5 \cdot (-1) = 5$; $|-5B| = (-5)^3 \cdot |B| = -125 \cdot (-1) = 125$.

$\rightarrow |A| + |B| = 4 + (-1) = 3$.

El valor de $|A+B|$ no puede saberse. No hay ninguna propiedad que facilite su cálculo

5 Supuesto que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2a & -2b & 2c \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 7 \\ -10 & 20 & 20 \\ 3b & 6a & 3c \end{vmatrix}$

Solución:

El objetivo es escribir cada determinante en función del supuesto dado, que es el *modelo* dado. Para ello se utilizan las propiedades de los determinantes, y se comparando en cada paso el determinante obtenido con el dado.

a) $\begin{vmatrix} 2a & -2b & 2c \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{vmatrix} =$ (se extraen los factores, 2 de $F1$ y 5 de $F3$) $= 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$\rightarrow$ Se observa que, en el modelo dado, en $F2$ aparece 5, –5, 10 $\rightarrow$

$=$ (se introduce el factor 5 en $F2$) $= 2 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 5 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$\rightarrow$ Se observa que, en el modelo dado, en $C2$ los signos están cambiados $\rightarrow$

$=$ (se extrae el factor –1 de $C2$) $= -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$.

b) $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 7 \\ -10 & 20 & 20 \\ 3b & 6a & 3c \end{vmatrix} =$ (se extrae: 7 de $F1$, 2 de $F2$ y 3 de $F3$) $= 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & 10 & 10 \\ b & 2a & c \end{vmatrix} =$

$=$ (se cambian de orden las filas: $F1$ por $F3$) $= -7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} b & 2a & c \\ -5 & 10 & 10 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$=$ (se cambian de orden las columnas: $C1$ por $C2$) $= +7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 10 & -5 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$=$ (se extrae el factor 2 de $C1$) $= +7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = 63$.

6 Determina, por menores, el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sea hace el determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 14 + 12 = 0$. Como vale 0, el rango no puede ser 3. Por consiguiente, rango de $A = 2$.

ya que existe un menor de orden2 distinto de cero

b) $|B| = 0 \Rightarrow \text{rango}(B) < 3$.

Como el menor $|B_1| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow$ Rango de $B =$ 2.

c) Es evidente que rango de $C \geq 2$. Hay varios menores de orden 2 distintos de 0.
En la matriz dada se pueden considerar 4 menores de orden 3: uno por cada columna que se excluya.

El menor $|C_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \rightarrow$ Con este menor el rango no aumenta.

Si ese menor vale 0 $\Rightarrow$ existe una combinación lineal de columnas. Por tanto, puede suprimirse una de ellas a efectos del cálculo del rango. (En este caso, hay que suprimir la 1ª o la 3ª, pues son proporcionales).

Si se suprime la 3ª, queda el menor $|C_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$.

Por tanto, el rango de $C = 3$.

7 Determina el rango de las siguientes matrices en función del parámetro.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & a\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}a & 1\\ a+1 & 2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & a\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}a & 1\\ 4 & a\end{pmatrix}$

<u>Solución</u>:

a) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & a\end{vmatrix}=a-6 \rightarrow |A|=0$ si $a=6$; $|A|\neq 0$ cuando $a\neq 6$.

Por tanto: rango(A) = 1 si a = 6; rango(A) = 2 si $a\neq 6$.

b) $|B|=\begin{vmatrix}a & 1\\ a+1 & 2\end{vmatrix}=2a-a-1=a-1 \rightarrow |B|=0$ si $a=1$; $|B|\neq 0$ cuando $a\neq 1$.

Por tanto: rango(B) = 1 si a = 1; rango(A) = 2 si $a\neq 1$.

c) $|C|=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & a\end{vmatrix}=2 \rightarrow |A|\neq 0$ independientemente del valor que tome cuando a.

Por tanto, el rango(A) siempre es 2.

d) $|D|=\begin{vmatrix}a & 1\\ 4 & a\end{vmatrix}=a^2-4 \rightarrow |D|=0$ si $a=\pm 2$; $|A|\neq 0$ cuando $a\neq \pm 2$.

Por tanto: rango(D) = 1 si $a=\pm 2$; rango(D) = 2 si $a\neq -2$ y $a\neq 2$.

8 Determina el rango de las siguientes matrices en función del parámetro.

a) $A=\begin{pmatrix}k & 3 & 0\\ 3 & 2 & k\\ 3 & k & 0\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}k & 1-k & 2-k\\ 1 & 1 & 1\\ k & 1 & k\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

<u>Solución</u>:

a) $|A|=\begin{vmatrix}k & 3 & 0\\ 3 & 2 & k\\ 3 & k & 0\end{vmatrix}=k\left(k^2-9\right) \Rightarrow |A|\neq 0$ cuando $k\neq 0, -3$ y 3; $|A|=0$ si $k=0, -3$ o 3.

Por tanto:

- Si $k\neq 0, -3$ y 3, el rango de A será 3. Para $k=0, -3$ o 3 el rango será menor que 3.
- Si $k=0$, $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & \cancel{0}\\ 3 & 2 & \cancel{0}\\ 3 & 0 & \cancel{0}\end{pmatrix} \rightarrow$ su rango es 2. El menor $|A_1|=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-9\neq 0$.
- Si $k=-3$, $A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 0\\ 3 & 2 & -3\\ \cancel{3} & \cancel{-3} & \cancel{0}\end{pmatrix} \rightarrow$ su rango es 2. El menor $|A_2|=\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-15\neq 0$.
- Si $k=3$, $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 3\\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{0}\end{pmatrix} \rightarrow$ su rango es 2. El menor $|A_3|=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-3\neq 0$.

a) $|A|=\begin{vmatrix}k & 1-k & 2-k\\ 1 & 1 & 1\\ k & 1 & k\end{vmatrix} \overset{(F1+F2)}{=} \begin{vmatrix}2k & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ k & 1 & k\end{vmatrix}=2k(k-1)+2(1-k)=2(k-1)^2$.

Por tanto:

- Si $k\neq 1$, el rango de A será 3, pues $|A|\neq 0$.
- Si $k=1$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1}\end{pmatrix} \rightarrow$ su rango es 2. El menor $|A_1|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

c) El rango de A es como máximo igual a 3: la matriz A tiene 3 filas.

Se considera el menor, $|A_1| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2k$. Su valor es 0 si $k = 1$.

Para ese valor de $k = 1$, la matriz será: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como tiene dos filas iguales, su rango será 2.

Por tanto: si $k \neq 1$, rango(A) = 3; si $k = 1$, rango(A) = 2.

9 Aplicando la fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(A_{ij})^t$ calcula la inversa de las siguientes matrices, si existe.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$. Adjunta: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puede comprobarse que $A \cdot A^{-1} = I$.

En efecto: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-1 & -1+1 & -1+1 \\ 1-1 & 1 & -1+1 \\ 1+1-2 & -1+1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 3 = -4$. Adjunta: $(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B^{-1} = \dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$.

c) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow$ la matriz C no tiene inversa.

10 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$, halla:

a) Los valores de a para los que la matriz A posea inversa.
b) La inversa de A para $a = 2$.

<u>Solución</u>:

a) La matriz A posee inversa cuando su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3 = 0 \;\Rightarrow\; a = 1, a = 3$$

Por tanto, la matriz A posee inversa cuando $a \neq 1$ y $a \neq 3$.

b) Para $a = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $|A| = 1$.

La matriz inversa viene dada por $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

11 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores del parámetro k para los que A tiene inversa.
b) Para $k=0$, calcula la matriz X que verifica $X\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) La matriz A tiene inversa cuando su determinante es distinto de 0.

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=k^2-1 \Rightarrow |A|=0 \text{ si } k=-1 \text{ o } +1$$

Por tanto, la matriz A tendrá inversa cuando $k\neq\pm1$.

b) Si $k=0$, la matriz tundra inversa, luego $X\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot A^{-1}$

Si $k=0$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Su inversa es $A^{-1}=\dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A: $|A|=-1$; $(A_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Luego,

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ x & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) ¿Existe algún valor de $x\in\mathbf{R}$ para el que A no tenga inversa?
b) Calcula, en caso de que sea posible, la matriz inversa de A^2 para $x=0$.

a) La matriz A no tendrá inversa cuando su determinante valga 0.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ x & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1-x^2 \Rightarrow |A|\neq 0 \text{ para todo } x\in\mathbf{R}.$$

Por tanto, la matriz A tendrá inversa siempre.

b) Para $x=0$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=-1$.

Su inversa es $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot(A_{ij})^t$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

La matriz de los adjuntos es:

$$(A_{ij})=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz inversa de A^2 será $(A^{-1})^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Otra alternativa es calcular A^2 y hacer la inversa después.

13 Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=A-kI$, donde k es una constante e I es la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.

b) Calcula B^{-1} para $k=-1$.

a) $B=A-kI=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-k & 1\\ 2 & -1-k\end{pmatrix}$.

La matriz no tendrá inversa cuando su determinante valga 0.

$$\begin{vmatrix}-3-k & 1\\ 2 & -1-k\end{vmatrix}=(-3-k)(-1-k)-2=0\Rightarrow k^2+4k+1=0 \Rightarrow k=-2+\sqrt{3} \text{ o } k=-2-\sqrt{3}$$

b) Si k = −1, la matriz es $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$; que tiene inversa, pues $|B|=-2$.

Su inversa es $B^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

14 a) ¿Para qué valores de x tiene inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ x & 1\end{pmatrix}$?

b) Para $x=-1$, calcula la matriz X que cumple la ecuación matricial $A\cdot X-2\cdot I=O$, donde I es la matriz unidad y O la matriz nula de orden 2.

<u>Solución</u>:

a) La matriz $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ x & 1\end{pmatrix}$ tendrá inversa cuando su determinante sea distinto de 0.

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ x & 1\end{vmatrix}=-2-3x \Rightarrow -2-3x=0\Rightarrow x=-\frac{2}{3} \to \text{La matriz tiene inversa si } x\neq-\frac{2}{3}.$$

b) Para $x=-1$ la matriz es $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; y tiene inversa: $|A|=-2+3=1$.

Por tanto:

$$A\cdot X-2\cdot I=O \Rightarrow A\cdot X=2\cdot I \Rightarrow X=A^{-1}\cdot(2I) \Rightarrow X=2A^{-1}.$$

Cálculo de la inversa.

$$A^{-1}=\frac{(A_{ij})^t}{|A|} \to (A_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow (A_{ij})^t=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Luego:

$$X=2A^{-1} \Rightarrow X=2\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 2 & -4\end{pmatrix}.$$