BOLETÍN 2.1 MATRICES y DETERMINANTES

1 Consideremos as matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Efectúa, cando sexa posible, as seguintes operacións matriciais: $2A^t - C$, $A+B$, A^tB, $\det(A)$, $\text{Rango}(A)$, $B(C^t - A)$, $\det(B)$, $\det(CA)$, $B^{-1}A$, $(AC)^{-1}$ e $(AC)^2B$.

2 Halla el valor del parámetro para que cada determinante tome el valor que se indica:

a) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 4 & m\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=7$ b) $|B|=\begin{vmatrix}0 & a & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{vmatrix}=0$ c) $|C|=\begin{vmatrix}4 & 2 & 2\\ 0 & k & 3\\ 0 & 0 & k\end{vmatrix}=1$

3 Utilizando trasformaciones de Gauss, halla el valor del determinante de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

4 Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A|=4$ y $|B|=-1$. Halla cuando sea posible el valor de los siguientes determinantes:

$|A\cdot B|$, $|2A|$, $|A^2|$, $|A^{-1}|$, $|B^{-1}|$, $-5|B|$, $|-5B|$, $|A|+|B|$, $|A+B|$.

5 Supuesto que $\begin{vmatrix}a & b & c\\ 5 & -5 & 10\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}2a & -2b & 2c\\ 1 & 1 & 2\\ 5 & -5 & 5\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}7 & 14 & 7\\ -10 & 20 & 20\\ 3b & 6a & 3c\end{vmatrix}$

6 Determina, por menores, el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & -1\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$

7 Determina el rango de las siguientes matrices en función del parámetro.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & a\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}a & 1\\ a+1 & 2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & a\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}a & 1\\ 4 & a\end{pmatrix}$

8 Determina el rango de las siguientes matrices en función del parámetro.

a) $A=\begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} k & 1-k & 2-k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9 Aplicando la fórmula $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A_{ij})^t$ calcula la inversa de las siguientes matrices, si existe.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$, halla:

a) Los valores de a para los que la matriz A posea inversa.
b) La inversa de A para $a=2$.

11 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores del parámetro k para los que A tiene inversa.
b) Para $k=0$, calcula la matriz X que verifica $X\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

12 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ x & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) ¿Existe algún valor de $x \in \mathbf{R}$ para el que A no tenga inversa?
b) Calcula, en caso de que sea posible, la matriz inversa de A^2 para $x=0$.

13 Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=A-kI$, donde k es una constante e I es la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.
b) Calcula B^{-1} para $k=-1$.

14 a) ¿Para qué valores de x tiene inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ x & 1 \end{pmatrix}$?

b) Para $x=-1$, calcula la matriz X que cumple la ecuación matricial $A\cdot X-2\cdot I=O$, donde I es la matriz unidad y O la matriz nula de orden 2.