

1

Pueden hallarse los productos: $A \cdot C$, $C \cdot A$ y $B \cdot A$.

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}; \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -1 & 13 & -8 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \\ 3 & 9 & -8 \\ -5 & 23 & -12 \end{pmatrix}.$$

2

a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \equiv & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ \equiv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ \equiv \end{pmatrix}$$

$$b) \quad 2BA = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ \equiv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \equiv & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & -4 \\ \equiv \end{pmatrix}$$

$$2BA - 3C = \begin{pmatrix} -14 & 4 & 7 \\ 0 & -12 & -3 \\ 11 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

c) $D(A^t B^t - 2C)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ \equiv & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 2 & -8 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ \equiv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & -4 & -26 \\ -20 & 4 & 8 \\ \equiv \end{pmatrix} =$$

3

Solución:

$$\begin{aligned} A^2 - A &= \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A(A - I) = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & -a-1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 12 \\ a^2 + a = 20 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 4; \quad a = -3 \\ a = 4; \quad a = -5 \end{cases}. \end{aligned}$$

La única solución común es $a = 4$.

4

Solución:

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2a^2 &= 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

5

Solución:

$$a) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que $AB \neq BA$.

$$b) \quad \text{Dado que } A \cdot B = -B \cdot A \text{ y que } (A+B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 = A^2 - B \cdot A + B \cdot A + B^2 \Rightarrow (A+B)^2 = A^2 + B^2.$$

6 $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t.$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & -6 \\ 6 & -3 & 0 \\ 28 & 26 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 28 \\ 11 & -3 & 26 \\ -6 & 0 & -15 \end{pmatrix};$$

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 28 \\ 11 & -3 & 26 \\ -6 & 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

7 Solución:

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se desea que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=a \\ b=b \\ c+d=a+c \\ d=b+d \end{cases} \Rightarrow b=0; a=d; c=c.$$

La solución del sistema viene en función de dos indeterminadas, a y c . Luego, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.

Una de las matrices es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, que se obtiene dando los valores $a = 3$ y $c = -2$.

8 Solución:

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Para que } A^3 = A \text{ es necesario que } \begin{cases} a^2b = a \\ ab^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0; & b = 0 \\ ab = 1; & b = 1/a \end{cases} \rightarrow$$

La solución $a = b = 0$ no tiene interés, pues es evidente.

$$\text{Por tanto, la matriz pedida es } A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Para $a = -2$, se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = A; A^4 = I \dots; A^{10} = I; A^{11} = A; A^{12} = I.$$

Por tanto:

$$A^{10} + A^{11} + A^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

9 Segunda y tercera potencias:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Puede hacerse la conjetura: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que se cumple para $n = 1$ (también para $n = 2$ y $n = 3$). Supuesto que se cumple hasta n hay que ver que se cumple para el siguiente, para $n + 1$.

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Por tanto, la conjetura es cierta y puede afirmarse que } A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$A^{10} - 10A = \begin{pmatrix} 1 & 10a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 10a \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

10

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

11

$$x = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

12

a) rango de A = 1

b) rango de A = 3

c) rango de A = 2

d) rango de A = 2

13

a)
$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & -8 & -2 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(2)} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 4 & -8 & -2 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - (-2) \cdot F_1 \rightarrow F_2} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 4 & -8 & -2 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-4)} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4 \cdot F_1 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & -8 & -2 & 16 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

b)
$$\begin{pmatrix} \textcircled{2} & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ -2 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(1)} \begin{pmatrix} \textcircled{2} & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - (-1) \cdot F_1 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} \textcircled{2} & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(\frac{5}{4})} \begin{pmatrix} \textcircled{2} & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - (-\frac{5}{4}) \cdot F_2 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ -2 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} = 3$$

c)
$$\begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & 7 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(1)} \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ -4 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - (-1) \cdot F_1 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ -4 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \textcircled{3} & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - (-2) \cdot F_1 \rightarrow F_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \textcircled{3} & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(\frac{-8}{3})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \textcircled{3} & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - (\frac{8}{3}) \cdot F_2 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \textcircled{3} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(\frac{-7}{3})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \textcircled{3} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & 7 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

d)
$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2 \cdot F_1 \rightarrow F_2} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-4)} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4 \cdot F_1 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-8)} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -8 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 8 \cdot F_1 \rightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2 \cdot F_2 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 4 \cdot F_2 \rightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 2 \cdot F_3 \rightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

14

Solución:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{matrix} F2-2F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{el rango es 2 para cualquier valor de } a: \text{ en todos los casos, las filas 2 y 3 son proporcionales.}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{matrix} F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{el rango es 2 si } a=1; \text{ es 3 en los demás casos.}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{matrix} F3-F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{el rango es 2 si } a=\pm 1; \text{ es 3 en los demás casos.}$$

15

Para comprobarlo basta con ver que $A \cdot A^{-1} = I$. En efecto, si $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, multiplicando:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

16

Solución:

$$a) (A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F1-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F2-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{La matriz inversa buscada es } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b) (B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F2-F1, F3-2F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(F3)/(-4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right) \xrightarrow{F1-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right)$$

$$\text{La matriz inversa buscada es } B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

$$c) (C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F2+F1, F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

Como en la submatriz izquierda aparecen dos filas repetidas, la matriz C no tiene inversa.

17

Solución:

$$a) B^2 = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -2 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -4x \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \Rightarrow x = -1.$$

$$b) A + 2B + C = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & -4 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2+2x & 0 \\ 0 & 2+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2+2x=1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

18

Solución:

Primero conviene resolver el sistema en función de A y B ; después se hacen los cálculos. Por el método de reducción:

$$\begin{cases} 2X - Y = A \\ X + 3Y = 2B \end{cases} \Rightarrow 2E2 \begin{cases} 2X - Y = A \\ 2X + 6Y = 4B \end{cases} \Rightarrow E2 - E1 \begin{cases} 2X - Y = A \\ 7Y = 4B - A \end{cases} \Rightarrow Y = \frac{1}{7}(4B - A).$$

Sustituyendo este valor de Y en la segunda ecuación inicial, se tiene:

$$X + \frac{3}{7}(4B - A) = 2B \Rightarrow X = \frac{3}{7}A + \frac{2}{7}B.$$

Por tanto:

$$X = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -18/7 \\ 8/7 & -18/7 \end{pmatrix};$$

$$Y = \frac{1}{7} \left[4 \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -22/7 \\ 2/7 & -8/7 \end{pmatrix}.$$

19

Solución:

Aplicando el método de reducción para la resolución de sistemas:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{cases} \Leftrightarrow 2E2 - 3E1 \begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 17Y = 2B - 3A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17Y = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Si se elimina la matriz Y se tiene:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{cases} \Leftrightarrow 3E2 + 4E1 \begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 17X = 3B + 4A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17X = 4 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$