

## POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

### EJERCICIOS I

1] Dados  $Q(x) = 2x^2 - 6x + 7$  y  $R(x) = 3x^2 + 7x$ , calcula cuál debería ser  $P(x)$

para que  $P(x) + Q(x) = R(x)$ .

2] Dados los siguientes polinomios:  $P(x) = 16x^3 - 23x^2 + x - 19$ ,  $Q(x) = 23x^4 + 7x^2 - x + 6$ ,  
 $R(x) = -6x^4 + 3x^3 + x - 8$ . Calcula:  $R(x) - (Q(x) + P(x))$

3] Calcula: a)  $(x+3)^3$  b)  $(x-1)^3$

4] Factoriza:

a)  $x^2 - 6x + 9$

b)  $x^2 - 9$

c)  $x^2 - 64$

d)  $2x^2 - 2x$

e)  $x^2 - 4x + 4$

f)  $\frac{25}{4}x^2 - 5x + 1$

5] Saca factor común y utiliza los productos notables para factorizar:

a)  $x^3 - 6x^2 + 9x$

b)  $4x^4 - 81x^2$

c)  $12x^3 - 27x$

d)  $x^3 - x$

e)  $x^3 + 2x^2 + x$

f)  $3x^2 + 30x + 75$

### Soluciones I:

1]  $P(x) = x^2 + 13x - 7$  2]  $-29x^4 - 13x^3 + 16x^2 + x + 5$  3] a)  $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ , b)  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

4] 6- a)  $(x-3)^2$ , b)  $(x-3)(x+3)$ , c)  $(x-8)(x+8)$ , d)  $2x(x-1)$ , e)  $(x-2)^2$ , f)  $\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2$

5] 7- a)  $x(x-3)^2$ , b)  $x^2(2x+9)(2x-9)$ , c)  $3x(2x+3)(2x-3)$ , d)  $x(x+1)(x-1)$ , e)  $x(x+1)^2$ , f)  $3(x+5)^2$

### EJERCICIOS II

1] Hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a)  $(x^3 + 5x^2 - 8) : (x^2 + 4)$  b)  $(x^5 - x^3 - x) : (x^3 + 2x)$  c)  $(2x^5 - 12x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 19) : (2x^2 - 3)$

2] Calcula el dividendo de una división sabiendo que el cociente es  $x^2 + 8$ , el divisor  $x^2 - 3$  y el resto  $x + 5$

3] Utilizando la regla de Ruffini calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a)  $(x^5 + 3x - 4) : (x + 2)$

b)  $(x^4 - 6x) : (x - 3)$

c)  $(x^4 + 6x^3 - 2x - 5) : (x - 1)$

4] Sin hacer la división ni aplicar la regla de Ruffini halla el resto de dividir:

a)  $(x^4 - x^3 - x^2 + 3) : (x - 2)$

b)  $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) : (x - 1)$

c)  $(x^3 - 2x + 4) : (x + 3)$ .

¿Qué teorema utilizaste?

5] a) ¿Qué valor numérico toma el polinomio  $x^3 - 3x^2 + 8x - 24$  para  $x = 5$ ?

b) ¿Es divisible por  $x - 5$ ?

c) ¿Qué valor numérico toma el polinomio  $x^3 - 3x^2 + 8x - 24$  para  $x = 3$ ?

d) ¿Es divisible por  $x - 3$ ?

6] Calcula el valor de m para que las siguientes divisiones sean exactas:

a)  $(x^3 - 4x^2 - 19x + m) : (x - 7)$

b)  $(x^4 + 2x^3 + mx + 2) : (x + 2)$

7] Calcular las raíces y factorizar los siguientes polinomios:

a)  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b)  $x^3 + 6x^2 + 9x$

c)  $x^3 - x^2 - 4x + 4$

d)  $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

e)  $x^4 - 9x^2 - 4x + 12$

f)  $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$

g)  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

h)  $x^3 + 2x^2 - x - 2$

i)  $2x^3 + 4x^2 - 6x$

l)  $3x^3 + 15x^2 - 6x - 72$

m)  $x^4 - 81$

- [8] Escribir un polinomio cuyas raíces sean:  $1, -1, -2$
- [9] Escribir un polinomio cuyas raíces sean:  $0, 1, -1y - 5$
- [10] Descomponer en factores el polinomio  $2x^5 - 6x^4 + 2x^3 - 6x^2$
- [11] Halla el valor de  $m$  para que el polinomio  $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + 3m$  tenga por resto 12 al dividirlo por  $x + 2$ .
- [12] Determina los coeficientes  $a$  y  $b$  para que el polinomio  $x^5 + ax^3 + b$  sea divisible entre  $x + 1$  y también entre  $x - 1$

### Soluciones II:

- [1] a)  $c = x + 5, r = -4x - 28$  b)  $c = x^2 - 3, r = 5x$  c)  $c = x^3 - 6x^2 + 8, r = 5$ , [2]  $x^4 + 5x^2 + x - 19$
- [3] a)  $c = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 19, r = -42$  b)  $c = x^3 + 3x^2 + 9x + 21, r = 63$  c)  $c = x^3 + 7x^2 + 7x + 5, r = 0$ , es exacta. [4] a) 7, b) 6 c)  $-17$ . El teorema del resto. [5] a) 66 b) No c) 0 d) sí. [6] Puede hacerse por el valor numérico o por Ruffini a)  $m = -14$  b)  $m = 1$
- [7] a)  $x = 1, x = -2, x = 3; (x-1)(x+2)(x-3)$ , b)  $x = 0, x = -3$ , raíz doble;  $x(x+3)^2$ , c)  $x = 1, x = 2, x = -2; (x-1)(x-2)(x+2)$ , d)  $x = 1, x = 2, x = -2, x = -3; (x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$ , e)  $x = 1, x = 3, x = -2$ , raíz doble;  $(x-1)(x-3)(x+2)^2$ , f)  $x = 1, x = 3, x = 5; (x-1)(x-3)(x-5)$ , g)  $x = -1, x = 2, x = -3; (x+1)(x-2)(x+3)$ , h)  $x = 1, x = -1, x = -2; (x-1)(x+1)(x+2)$ , i)  $x = 0, x = 1, x = -3; 2x(x-1)(x+3)$ , l)  $x = 2, x = -3, x = -4; (x-2)(x+3)(x+4)$ , m)  $x = 3, x = -3; (x-3)(x+3)(x^2+9)$
- [8]  $(x-1)(x+1)(x+2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ , [9]  $(x-0)(x-1)(x+1)(x+5) = x(x-1)(x+1)(x+5) = x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x$
- [10]  $2x^2(x-3)(x^2+1)$  [11] Puede hacerse por el valor numérico o por Ruffini  $m = 32/3$
- [12] Puede hacerse por el valor numérico o por Ruffini  $a = -1, b = 0$

### EJERCICIOS III

- [1] Determinar el valor de  $m$  para que al dividir el polinomio  $P(x) = x^4 - 4x^2 + 3x + m$  entre  $x + 2$  el resto sea  $-3$ .
- [2] Utilizando la REGLA DE RUFFINI, halla el valor numérico de:
- a)  $x^4 - 2x^2 + x + 2$ , para  $x = 3$  b)  $x^4 - 4x^3 - 125$ , para  $x = 5$  c)  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ , para  $x = 1$
- [3] Determina el valor de  $a$  para que 3 sea raíz del polinomio  $PQ(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 2$ .
- [4] Calcular el valor de  $k$  para que al dividir  $x^2 - \frac{2}{3}x + k$  entre  $x + \frac{1}{5}$  se obtenga de resto  $\frac{8}{9}$ .
- [5] Comprobar si las siguientes afirmaciones son ciertas:
- a) 3 es una raíz de  $x - 3$  b) 1 es una raíz de  $x^4 - 3x^3 + 2x - 5$
- [6] Descomponer en factores los siguientes polinomios:
- a)  $9x^2 - 25$  b)  $4x^6 + 12x^3 + 9$  c)  $x^3 + x^2 - x - 1$   
d)  $x^3 - 2x^2 + x$  e)  $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$  f)  $2x^3 - 2x^2 + x - 1$
- [7] Halla el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:
- a)  $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$  y  $Q(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$
- b)  $P(x) = (x-2)^3(x-1)^2$  y  $Q(x) = (x-1)(x-2)^4(x+2)^2$
- c)  $P(x) = (x-1)^2(x-3)(x^2+4)$  y  $Q(x) = (x-1)(x-3)^2(x+5)$
- [8] Desarrolla estas operaciones, aplicando las identidades notables y reduciendo los términos semejantes:

- a)  $(x+2)^2 - (x-3)(x+3)$     b)  $(2x+1)^2 - (2x+3)(x-2)$     c)  $(3x-5)^2 + (3x+5)^2$   
d)  $5x(x^2 - 2x + 3) - (x+3)^2$     e)  $(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2 - x^4$

[9] Calcula el resto, sin hacer ningún tipo de división, de las siguientes divisiones:

- a)  $(x^{150} - x + 7) : (x - 1)$     b)  $(x^{17} - x - 3) : (x + 1)$

**Soluciones III:** [1]  $m = 3$  [2] a) 62 [3]  $a = \frac{29}{3}$  [4]  $k = 1$  [5] a) Sí, b) no [6] a)  $(3x-5)(3x+5)$ , b)  $(2x^3+3)^2$ , c)  $(x+1)^2(x-1)$ , d)  $x(x-1)^2$ , e)  $(x-2)(x^2+2)$ , f)  $(x-1)(2x^2+1)$ , [7] a) M.C.D. =  $(x-1)$ ; m.c.m. =  $(x-1)^3x(2x^2+1)$  b) M.C.D. =  $(x-1)(x-2)^3$ , m.c.m. =  $(x-2)^4(x-1)^2(x+2)^2$  c) M.C.D. =  $(x-1)(x-3)$ , m.c.m. =  $(x-1)^2(x-3)^2(x+5)(x^2+4)$

- [8] a)  $4x + 13$ , b)  $2x^2 + 4x + 7$ , c)  $18x^2 + 50$ , d)  $5x^3 - 11x + 9x - 9$ , e)  $-1$  [9] a) 7, b)  $-3$

## EJERCICIOS IV

[1] Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

- a)  $\frac{x^3}{x^2 + x^3}$     b)  $\frac{x-1}{x^2-1}$     c)  $\frac{x+1}{x^2+2x+1}$

[2] Simplifica:

- a)  $\frac{x^2 - x - 2}{x^5 - x^4 - 2x^3}$     b)  $\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-1}$     c)  $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x-4}$     d)  $\frac{x^3 - 5x^2}{x^2 - 25}$   
e)  $\frac{x+1}{x^2+x}$     f)  $\frac{2x^2 - 7x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$

[3] Reduce a común denominador, opera y simplifica:

- a)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2}$     b)  $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$     c)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$     d)  $\frac{3-x}{x} - \frac{x-1}{x^2}$

[4] Efectúa las siguientes operaciones:

- a)  $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1}$     b)  $\frac{a-2}{a+2} + \frac{a+2}{a-2}$   
c)  $\frac{x}{x-2} + \frac{2x+1}{x+2} - \frac{1}{x^2-4}$     d)  $\frac{1}{3x^2-3} - \frac{2}{2x+2} + \frac{x+5}{x+1}$

[5] Efectúa las operaciones y simplifica:

- a)  $\frac{x-2}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x^2-4}$     b)  $\frac{x-1}{3} \cdot \frac{9}{x^2-1}$     c)  $\frac{4}{x^2-1} : \frac{2}{x-1}$     d)  $\left(x - \frac{4}{x}\right) : \left(1 - \frac{2}{x}\right)$

[6] Realiza las siguientes operaciones:

- a)  $\frac{3x}{x+2} - \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{7x+3}{x+3}$     b)  $\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-3}$   
c)  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{x-1}{x^2-4x+3}$     d)  $\frac{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-25}{x^2-4x-5}}$

**Soluciones** [1] a)  $\frac{x}{1+x}$  b)  $\frac{1}{x+1}$  c)  $\frac{1}{x+1}$

[2] a)  $\frac{1}{x^3}$  b)  $x-1$  c)  $\frac{x-2}{2}$  d)  $\frac{x^2}{x+5}$  e)  $\frac{1}{x}$  f)  $\frac{2x-1}{2x+1}$ , [3] a)  $\frac{-2x+1}{x^3-x^2}$ , b)  $\frac{4x}{x^2-1}$ , c)  $\frac{x^2+x+1}{x^3}$ , d)  $\frac{2x-x^2+1}{x^2}$ ,

[4] a)  $\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$ , b)  $\frac{2a^2+8}{a^2-4}$ , c)  $\frac{3x^2-x-3}{x^2-4}$ , d)  $\frac{3x^2+9x-11}{3(x^2-1)}$ , [5] a)  $\frac{1}{(x-3)(x+2)}$ , b)  $\frac{3}{x+1}$ , c)  $\frac{2}{x+1}$ , [6]

a)  $\frac{10x^2+26x+5}{x^2+5x+6}$ , b)  $\frac{x+3}{x+5}$ , c)  $\frac{1}{x-1}$ , d) 1.