

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

EJERCICIOS I

- [1] Dados $Q(x) = 2x^2 - 6x + 7$ y $R(x) = 3x^2 + 7x$, calcula cuál debería ser $P(x)$ para que $P(x) + Q(x) = R(x)$.
- [2] Dados los siguientes polinomios: $P(x) = 16x^3 - 23x^2 + x - 19$, $Q(x) = 23x^4 + 7x^2 - x + 6$, $R(x) = -6x^4 + 3x^3 + x - 8$. Calcula: $R(x) - (Q(x) + P(x))$
- [3] Calcula: a) $(x + 3)^3$ b) $(x - 1)^3$
- [4] Factoriza:
- a) $x^2 - 6x + 9$ b) $x^2 - 9$ c) $x^2 - 64$
d) $2x^2 - 2x$ e) $x^2 - 4x + 4$ f) $\frac{25}{4}x^2 - 5x + 1$
- [5] Saca factor común y utiliza los productos notables para factorizar:
- a) $x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $4x^4 - 81x^2$ c) $12x^3 - 27x$
d) $x^3 - x$ e) $x^3 + 2x^2 + x$ f) $3x^2 + 30x + 75$

Soluciones I:

- [1] $P(x) = x^2 + 13x - 7$ [2] $-29x^4 - 13x^3 + 16x^2 + x + 5$ [3] a) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$, b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
[4] 6- a) $(x - 3)^2$, b) $(x - 3)(x + 3)$, c) $(x - 8)(x + 8)$, d) $2x(x - 1)$, e) $(x - 2)^2$, f) $\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2$
[5] 7- a) $x(x - 3)^2$, b) $x^2(2x + 9)(2x - 9)$, c) $3x(2x + 3)(2x - 3)$, d) $x(x + 1)(x - 1)$, e) $x(x + 1)^2$, f) $3(x + 5)^2$

EJERCICIOS II

- [1] Hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:
- a) $(x^3 + 5x^2 - 8) : (x^2 + 4)$ b) $(x^5 - x^3 - x) : (x^3 + 2x)$ c) $(2x^5 - 12x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 19) : (2x^2 - 3)$
- [2] Calcula el dividendo de una división sabiendo que el cociente es $x^2 + 8$, el divisor $x^2 - 3$ y el resto $x + 5$
- [3] Utilizando la regla de Ruffini calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:
- a) $(x^5 + 3x - 4) : (x + 2)$ b) $(x^4 - 6x) : (x - 3)$ c) $(x^4 + 6x^3 - 2x - 5) : (x - 1)$
- [4] Sin hacer la división ni aplicar la regla de Ruffini halla el resto de dividir:
- a) $(x^4 - x^3 - x^2 + 3) : (x - 2)$ b) $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) : (x - 1)$ c) $(x^3 - 2x + 4) : (x + 3)$.
- ¿Qué teorema utilizaste?
- [5] a) ¿Qué valor numérico toma el polinomio $x^3 - 3x^2 + 8x - 24$ para $x = 5$?
b) ¿Es divisible por $x - 5$?
c) ¿Qué valor numérico toma el polinomio $x^3 - 3x^2 + 8x - 24$ para $x = 3$?
d) ¿Es divisible por $x - 3$?
- [6] Calcula el valor de m para que las siguientes divisiones sean exactas:
- a) $(x^3 - 4x^2 - 19x + m) : (x - 7)$ b) $(x^4 + 2x^3 + mx + 2) : (x + 2)$
- [7] Calcular las raíces y factorizar los siguientes polinomios:
- a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ b) $x^3 + 6x^2 + 9x$ c) $x^3 - x^2 - 4x + 4$ d) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$
e) $x^4 - 9x^2 - 4x + 12$ f) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ g) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ h) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
i) $2x^3 + 4x^2 - 6x$ l) $3x^3 + 15x^2 - 6x - 72$ m) $x^4 - 81$

- 8** Escribir un polinomio cuyas raíces sean: $1, -1, -2$

9 Escribir un polinomio cuyas raíces sean: $0, 1, -1 y -5$

10 Descomponer en factores el polinomio $2x^5 - 6x^4 + 2x^3 - 6x^2$

11 Halla el valor de m para que el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + 3m$ tenga por resto 12 al dividirlo por $x + 2$.

12 Determina los coeficientes a y b para que el polinomio $x^5 + ax^3 + b$ sea divisible entre $x + 1$ y también entre $x - 1$

Soluciones II:

- [1]** a) $c = x + 5, r = -4x - 28$ b) $c = x^2 - 3, r = 5x$ c) $c = x^3 - 6x^2 + 8, r = 5$, **[2]** $x^4 + 5x^2 + x - 19$

[3] a) $c = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 19, r = -42$ b) $c = x^3 + 3x^2 + 9x + 21, r = 63$ c) $c = x^3 + 7x^2 + 7x + 5, r = 0$,
es exacta. **[4]** a) 7, b) 6 c) -17. El teorema del resto. **[5]** a) 66 b) No c) 0 d) Sí. **[6]** Puede hacerse por el valor
numérico o por Ruffini a) $m = -14$ b) $m = 1$

[7] a) $x = 1, x = -2, x = 3; (x - 1)(x + 2)(x - 3)$, b) $x = 0, x = -3$, raíz doble ; $x(x + 3)^2$, c) $x = 1, x = 2, x = -2; (x - 1)(x - 2)(x + 2)$, d) $x = 1, x = 2, x = -2, x = -3; (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3)$, e)
 $x = 1, x = 3, x = -2$, raíz doble; $(x - 1)(x - 3)(x + 2)^2$, f) $x = 1, x = 3, x = 5; (x - 1)(x - 3)(x - 5)$, g)
 $x = -1, x = 2, x = -3; (x + 1)(x - 2)(x + 3)$, h) $x = 1, x = -1, x = -2; (x - 1)(x + 1)(x + 2)$, i) $x = 0, x = 1, x = -3; 2x(x - 1)(x + 3)$, l) $x = 2, x = -3, x = -4; (x - 2)(x + 3)(x + 4)$, m) $x = 3, x = -3; (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

[8] $(x - 1)(x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, **[9]** $(x - 0)(x - 1)(x + 1)(x + 5) = x(x - 1)(x + 1)(x + 5) = x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x$

[10] $2x^2(x - 3)(x^2 + 1)$ **[11]** Puede hacerse por el valor numérico o por Ruffini $m = 32/3$

[12] Puede hacerse por el valor numérico o por Ruffini $a = -1, b = 0$

EJERCICIOS III

- [1]** Determinar el valor de m para que al dividir el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^2 + 3x + m$ entre $x + 2$ el resto sea -3 .

[2] Utilizando la REGLA DE RUFFINI, halla el valor numérico de:

a) $x^4 - 2x^2 + x + 2$, para $x = 3$ b) $x^4 - 4x^3 - 125$, para $x = 5$ c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, para $x = 1$

[3] Determina el valor de a para que 3 sea raíz del polinomio $PQ(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 2$.

[4] Calcular el valor de k para que al dividir $x^2 - \frac{2}{3}x + k$ entre $x + \frac{1}{5}$ se obtenga de resto $\frac{8}{9}$.

[5] Comprobar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) 3 es una raíz de $x - 3$ b) 1 es una raíz de $x^4 - 3x^3 + 2x - 5$

[6] Descomponer en factores los siguientes polinomios:

- a) $9x^2 - 25$ b) $4x^6 + 12x^3 + 9$ c) $x^3 + x^2 - x - 1$
d) $x^3 - 2x^2 + x$ e) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$ f) $2x^3 - 2x^2 + x - 1$

- a) $(x+2)^2 - (x-3)(x+3)$ b) $(2x+1)^2 - (2x+3)(x-2)$ c) $(3x-5)^2 + (3x+5)^2$
d) $5x(x^2 - 2x + 3) - (x+3)^2$ e) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2 - x^4$

[9] Calcula el resto, sin hacer ningún tipo de división, de las siguientes divisiones:

- a) $(x^{150} - x + 7) : (x - 1)$ b) $(x^{17} - x - 3) : (x + 1)$

Soluciones III: [1] $m = 3$ [2] a) 62 [3] $a = \frac{29}{3}$ [4] $k = 1$ [5] a) Sí, b) no [6] a) $(3x-5)(3x+5)$, b) $(2x^3 + 3)^2$, c) $(x+1)^2(x-1)$, d) $x(x-1)^2$, e) $(x-2)(x^2+2)$, f) $(x-1)(2x^2+1)$, [7] a) M.C.D. = $(x-1)$; m.c.m. = $(x-1)^3x(2x^2+1)$ b) M.C.D. = $(x-1)(x-2)^3$, m.c.m. = $(x-2)^4(x-1)^2(x+2)^2$ c) M.C.D. = $(x-1)(x-3)$, m.c.m. = $(x-1)^2(x-3)^2(x+5)(x^2+4)$

- [8] a) $4x + 13$, b) $2x^2 + 4x + 7$, c) $18x^2 + 50$, d) $5x^3 - 11x + 9x - 9$, e) -1 [9] a) 7, b) -3

EJERCICIOS IV

[1] Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^3}{x^2 + x^3}$ b) $\frac{x-1}{x^2 - 1}$ c) $\frac{x+1}{x^2 + 2x + 1}$

[2] Simplifica:

a) $\frac{x^2 - x - 2}{x^5 - x^4 - 2x^3}$ b) $\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2 - 1}$ c) $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x - 4}$ d) $\frac{x^3 - 5x^2}{x^2 - 25}$
e) $\frac{x+1}{x^2 + x}$ f) $\frac{2x^2 - 7x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$

[3] Reduce a común denominador, opera y simplifica:

a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2}$ b) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$ c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ d) $\frac{3-x}{x} - \frac{x-1}{x^2}$

[4] Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ b) $\frac{a-2}{a+2} + \frac{a+2}{a-2}$
c) $\frac{x}{x-2} + \frac{2x+1}{x+2} - \frac{1}{x^2-4}$ d) $\frac{1}{3x^2-3} - \frac{2}{2x+2} + \frac{x+5}{x+1}$

[5] Efectúa las operaciones y simplifica:

a) $\frac{x-2}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x^2-4}$ b) $\frac{x-1}{3} \cdot \frac{9}{x^2-1}$ c) $\frac{4}{x^2-1} : \frac{2}{x-1}$ d) $\left(x - \frac{4}{x}\right) : \left(1 - \frac{2}{x}\right)$

[6] Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{3x}{x+2} - \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{7x+3}{x+3}$ b) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-3}$
c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{x-1}{x^2-4x+3}$ d) $\frac{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-25}{x^2-4x-5}}$

Soluciones [1] a) $\frac{x}{1+x}$ b) $\frac{1}{x+1}$ c) $\frac{1}{x+1}$

[2] a) $\frac{1}{x^3}$ b) $x-1$ c) $\frac{x-2}{2}$ d) $\frac{x^2}{x+5}$ e) $\frac{1}{x}$ f) $\frac{2x-1}{2x+1}$, [3] a) $\frac{-2x+1}{x^3-x^2}$, b) $\frac{4x}{x^2-1}$, c) $\frac{x^2+x+1}{x^3}$, d) $\frac{2x-x^2+1}{x^2}$,

[4] a) $\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$, b) $\frac{2a^2+8}{a^2-4}$, c) $\frac{3x^2-x-3}{x^2-4}$, d) $\frac{3x^2+9x-11}{3(x^2-1)}$, [5] a) $\frac{1}{(x-3)(x+2)}$, b) $\frac{3}{x+1}$, c) $\frac{2}{x+1}$, [6]

a) $\frac{10x^2+26x+5}{x^2+5x+6}$, b) $\frac{x+3}{x+5}$, c) $\frac{1}{x-1}$, d) 1.