UNIDAD 1.- MATRICES Y DETERMINANTES

1.-CONCEPTO DE MATRIZ. TIPOS DE MATRICES

1.1.- DEFINICIÓN Intuitivamente, una matriz es una tabla de números ordenados, números que pueden provenir de experimentos, encuestas, análisis económicos, etc.

Se llama **matriz de orden $m \times n$** a un conjunto de números reales dispuestos en m filas y en n columnas, de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las matrices se representan por letras mayúsculas A, B, C ,... Los elementos de la matriz (los números) se representan en general por a_{ij}, donde los subíndices (i, j) nos dan la posición que ocupa el término:

$$\begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \to fila \\ j = 1, 2, \dots, n \to columna \end{cases}$$

- m es el número de filas
- n es el número de columnas
- m x n es la dimensión (también llamado orden) de la matriz
- En forma abreviada escribiremos $A = (a_{ij})$
- a_{ij} representa al elemento que ocupa la fila i y la columna j
- Representamos por $M_{m \times n}$ al conjunto de matrices de orden m x n

Igualdad de matrices.- Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y si los términos que ocupan la misma posición son iguales. A = B

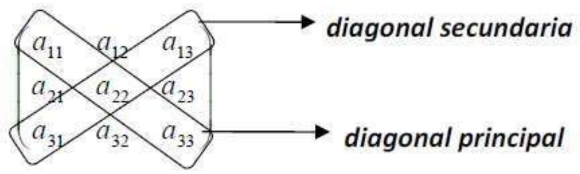
1.2 .- TIPOS DE MATRICES

→ Si el número de filas es distinto del número de columnas ($m \neq n$) la matriz se llama **rectangular.** Dentro de las matrices rectangulares tenemos los siguientes tipos:

- **Matriz (o vector) fila:** Es aquella que sólo tiene una fila.
- **Matriz (o vector) columna**: Es la que sólo tiene una columna.

Matriz fila: $F = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Matriz columna: $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

→ Si el número de filas es igual al número de columnas ($m = n$) se habla de una **matriz cuadrada de orden n (M_n).** Dentro de las matrices cuadradas es importante destacar que los elementos a_{ij} en que los dos subíndices son iguales forman la ***diagonal principal***, y los elementos en que $i+j = n+1$ (donde n es el orden de la matriz) forman la ***diagonal secundaria***



→ **Matriz traspuesta de una matriz** : es la que se obtiene al cambiar las filas por las columnas. Se denota por A^t

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

→ **Matriz opuesta de una matriz :** es la que se obtiene al cambiar de signo todos los elementos de la matriz. Se por denota por $-A$

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 6\\ 2 & 5\end{pmatrix}, \text{ su traspuesta es } A^t=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 6 & 5\end{pmatrix}. \text{ Su opuesta es } -A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -6\\ -2 & -5\end{pmatrix}.$$

En el conjunto ***Mn*** de las **matrices cuadradas de orden *n***, cabe destacar los siguientes tipos de matrices:

→ **Matriz simétrica**: aquella que coincide con la matriz resultante de intercambiar filas por columnas (es decir, una matriz que coincide con su traspuesta) . Es siempre una matriz cuadrada.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix} \quad A^t=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$A = A^t$$

→ **Matriz antisimétrica** : aquella que coincide con la matriz resultante de intercambiar filas por columnas, cambiada de signo. (es decir, una matriz que coincide con la opuesta de su traspuesta) . Es siempre una matriz cuadrada

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad A^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A = -A^t$$

→ **Matriz triangular**: Es aquella matriz en la que los elementos situados por encima o por debajo de ladiagonal principal

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Superior *Matriz. Triangular Inferior*

→ **Matriz Diagonal**: Es aquella matriz en la que los elementos que no están en la diagonal principal son nulos:

$a_{ij}=0 \quad i\neq j$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

→ **Matriz Escalar**: Es aquella matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son todosiguales.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

→ **Matriz Unidad (Identidad)**: Es la matriz escalar en la que los elementos no nulos son iguales a 1.

Se representa por ***I***. **Ejemplo:**

$$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

En ocasiones se añade un subíndice que indica la dimensión de la matriz (I_n , matriz identidad de orden n) .

→ **Matriz Nula**: Es aquella en la que todos sus elementos son cero.

2. OPERACIONES CON MATRICES

1. .- SUMA (ADICIÓN) Dadas dos matrices *A* y *B* de dimensión *m* x *n* , se define la **suma de matrices** (*A* + *B*) como aquella matriz cuyos elementos son la suma de los elementos que ocupan la misma posición:

$$C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Las **propiedades** de la suma de matrices son las mismas que las de la suma de números reales:

- Propiedad Asociativa (A+ B) + C = A + (B + C)
- Elemento neutro (la matriz nula).
- Elemento opuesto ($-A$): $A + (-A) = 0$
- Propiedad Conmutativa: $A + B = B + A$

Esto nos permite definir también la **resta de matrices** como: $A - B = A + (-B)$, siendo (-B) la **matriz opuesta de B**

2.2. PRODUCTO DE UN NÚMERO (ESCALAR) POR UNA MATRIZ El producto de un número real *k* por una matriz $A = (a_{ij})$ es otra matriz de la misma dimensión cuyos elementos son los productos de los elementos de la matriz *A* por el número *k*

$$kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

El **producto** de un número por una matriz tiene las siguientes **propiedades:**

- Propiedad Distributiva respecto de la suma de matrices: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- Propiedad Distributiva respecto de la suma de números: $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$
- Propiedad Asociativa mixta: $k \cdot (l \cdot A) = (k \cdot l) \cdot A$
- Existencia del elemento neutro. 1. A = A

2.3. PRODUCTO DE MATRICES Sean las matrices ***A* y *B* de dimensiones *m x n* y *n x p*** (es decir, **el número de columnas de la matriz *A* es igual al número de filas de la matriz *B***). Se define el producto *A B* , y en ese orden, como una matriz *C* de dimensiones ***m x p*** cuyos elementos son de la forma:

$$\left.\begin{matrix} A = (a_{ij}) \\ B = (bij) \end{matrix}\right\} \rightarrow C = A \cdot B = (a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \left| c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \right.$$

es decir, para multiplicar matrices se toman los elementos de la 1ª matriz como vectores fila y los elementos de la 2ªmatriz como vectores columna, de esta forma, **la matriz producto estará formada por los productos escalares de los vectores fila de la 1ª por los vectores columna de la 2ª matriz**

Por lo tanto, **NO todas las matrices pueden multiplicarse. Dos matrices se pueden multiplicar cuando el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda.**

Ejemplos:

1)

$$\underbrace{A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}}_{2\times 3}\quad \underbrace{B=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\\4&1\end{pmatrix}}_{3\times 2}\rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4 & 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 1\\4\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot 4 & 4\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}20&8\\47&20\end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

Dimensión 2×3 3×2 2×2

El número de columnas de A es igual al número de filas de B, por lo tanto se pueden multiplicar en ese orden. **La matriz producto tiene tantas filas como A y tantas columnas como B.**

2)

$$A_{3\times 3}\cdot B_{3\times 2}=P_{3\times 2}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-3&7\\1&7&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&4\\-3&0\\9&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{2\cdot 5+0\cdot(-3)+1\cdot 9} & 2\cdot 4+0\cdot 0+1\cdot(-7)\\0\cdot 5+(-3)\cdot(-3)+7\cdot 9 & \boxed{0\cdot 4+(-3)\cdot 0+7\cdot(-7)}\\1\cdot 5+7\cdot(-3)+(-1)\cdot 9 & 1\cdot 4+7\cdot 0+(-1)\cdot(-7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{19}&1\\72&\boxed{-49}\\-25&11\end{pmatrix}.$$

<u>**Observaciones sobre el producto de matrices:**</u>

1) ¡¡¡Que el producto $A\cdot B$ esté definido no implica que lo esté el producto $B\cdot A$ ¡¡¡

Para que estén definidos ambos productos tiene que cumplirse que si la dimensión de la matriz A es m x n , la dimensión de la matriz B debe ser n x m , siendo las dimensiones de las matrices producto: $\begin{cases}A\cdot B\rightarrow m\times m\\B\cdot A\rightarrow n\times n\end{cases}$

2) Esto también nos permite deducir que el producto de matrices, **NO tiene , en general, la siguientes propiedades :**

- ¬ **CONMUTATIVA** $A\cdot B\neq B\cdot A$
- ¬ **CANCELATIVA** $A\cdot B=A\cdot C$ no implica necesariamente que $B=C$
- ¬ **DIVISORES DE CERO** $A\cdot B=O$ no implica necesariamente que $A=O$ ó $B=O$

Ejemplos:

¬ $AB=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\-5&0\end{pmatrix};\ AC=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\-5&0\end{pmatrix}$

AB = AC y sin embargo B $\neq$C

¬ $\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ El producto es nulo y ninguna de las matrices que se multiplican lo son

¬ b) A veces se plantean problemas como el que sigue: "Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ tales que $AB=BA$". (Da una de ellas que sea distinta de O).

La solución se encuentra así:

$$AB=BA\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2a+b\\c&2c+d\end{pmatrix}$$

Por la igualdad de matrices, debe cumplirse que:

$$\begin{cases}a+2c=a\rightarrow c=0\\b+2d=2a+b\rightarrow d=a\\c=c\\d=2c+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=a\\c=0\\d=a\end{cases}$$

3) Como no es cierta, en general la propiedad conmutativa , cuando se multiplican dos matrices no es independiente el orden de colocación de los factores; hay que indicar cuál de ellas va a la izquierda, por delante . Es importante recalcar que en el caso de matrices **NO podemos emplear las IDENTIDADES NOTABLES**

1. $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$, excepto si A y B son conmutativas

Demostración: $(A+B)^2=(A+B).(A+B)=A.A+A.B+B.A+B.B=A^2+A.B+B.A+B^2$
Pero $AB+BA \neq 2AB$ porque el producto de matrices no es conmutativo

2. $(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2$, excepto si A y B son conmutativas

3. $(A+B).(A-B) \neq A^2-B^2$, excepto si A y B son conmutativas

4) En las ecuaciones matriciales (ecuaciones en las que la incógnita es una matriz, que veremos en los ejercicios) no pueden simplificarse matrices) . **No existe la división de matrices.** (La propiedad cancelativa es válida si *A* tiene inversa (ya se verá).)

Si las matrices son cuadradas de orden *n*, el **producto de matrices** tiene las siguientes **propiedades:**

- Propiedad Asociativa: $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
- Elemento neutro (matriz identidad) $A\cdot I=I\cdot A=A$
- Propiedad distributiva respecto de la suma de matrices: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

Relacionando la matriz traspuesta con las operaciones con matrices , es importante resaltar las siguientes **propiedades**:

- $(A^t)^t=A$
- $(A+B)^t=A^t+B^t\cdot$
- $(k\cdot A)^t=k\cdot A^t$
- $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

→ **Matriz ortogonal**. La matriz *A* es **ortogonal** si A A^t = I

2.4 . POTENCIAS DE UNA MATRIZ: Para que se pueda calcular la potencia de una matriz tiene que ser cuadrada. Se define la potencia de matrices de forma análoga a las potencias de números:

$$A^n=A\cdot A\cdot A\cdots\cdot A, \quad \textit{multiplicamos la matriz A n veces}$$

Respecto a la potencia de matrices tenemos las siguientes definiciones

- **Matriz involutiva**. Una matriz A se llama involutiva si $A^2=A\cdot A=I$.
- **Matriz idempotente**. Una matriz A se llama idempotente si $A^2=A\cdot A=A$.
- **Matriz nilpotente**. Una matriz A se llama nilpotente si $A\cdot A\cdot\ldots\cdot A=O$.
- **Matriz periódica.** Una matriz A se llama periódica de período p si $A^{p+1}=A$.

En algún caso, al realizar la potencia de una matriz, podemos comprobar que **sus potencias:**

a) **se repiten con regularidad** . En este caso hablamos de una **matriz periódica de período p** . El procedimiento para calcular las potencias es la siguiente:

- Se hallan las potencias sucesivas hasta obtener la matriz identidad. A partir de ese exponente las potencias se repetirán.
- El período es el exponente menor con el que se obtiene la matriz identidad.
- Se hace la división entera del exponente de la potencia que se quiere calcular entre el período, y el resto de esa división es la potencia equivalente.

Veámoslo con un **ejemplo:**

Comprueba que la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ es periódica de periodo 3. Esto es, que verifica la igualdad $A^4=A$. Utilizando ese resultado, calcula A^{14}, A^{231}, A^{232} y A^{233}.

Solución:

Multiplicando, se tiene que:

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix};$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I \Rightarrow A\cdot A^3=A\cdot I \Leftrightarrow A^4=A.$$

Luego, efectivamente es periódica de periodo 3.

Como $A^3=I \Rightarrow A^{12}=\left(A^3\right)^4=I^4=I \Rightarrow A^{13}=A^{12}\cdot A=I\cdot A=A \Rightarrow A^{14}=A^{12}\cdot A^2=I\cdot A^2=A^2$.

En general, puede observarse que las potencias de exponente un múltiplo de 3:

$A^{3n}=\left(A^3\right)^n=I^n=I$

Por tanto: $A^{3n+1}=A^{3n}\cdot A=I\cdot A=A$; $A^{3n+2}=A^2$.

Como $A^{231}=A^{3\cdot 77}$, $A^{232}=A^{3\cdot 77+1}$ y $A^{233}=A^{3\cdot 77+2}$, entonces:

$$A^{231}=I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ A^{232}=A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix};\ A^{233}=A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

b) o siguen una recurrencia, un patrón .Para demostrar el resultado , empleamos el **MÉTODO DE INDUCCIÓN**

- Comprobación para el menor caso que tenga sentido.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que es cierta para n
- Utilizando los apartados anteriores se comprueba para el caso siguiente n + 1

Ejemplo:

(PAU)(TIC) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, y n, un número natural cualquiera. Encuentra el valor de A^n para cada n y halla $A^{360}-A^{250}$.

Aplicaremos el método de inducción. Calculamos las primeras potencias de A.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 9 & 1\end{pmatrix}$$

Suponemos que $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3n & 1\end{pmatrix}$. Vemos que:

1. Se verifica para $n=1$.
2. Si se cumple para n, también se cumple para $n+1$, ya que:

$$A^{n+1}=A\,A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3n & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3+3n & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3(n+1) & 1\end{pmatrix}$$

En consecuencia, nuestra suposición es cierta. Luego $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3n & 1\end{pmatrix}$.

Por tanto: $A^{350}-A^{250}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3\cdot 350 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3\cdot 250 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 300 & 1\end{pmatrix}$

3. MATRIZ INVERSA

1 . DEFINICIÓN Si dada una matriz cuadrada *A* existe otra matriz *B*, también cuadrada, que multiplicada por la matriz *A* nos da la matriz unidad, se dice que la matriz *A* es una **matriz regular , inversible, invertible, no singular** y a la matriz *B* se le llama **matriz inversa de *A*** y se representa por A^{-1}

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$$

Si una matriz cuadrada no tiene matriz inversa, se dice que la matriz es **singular**.

La matriz inversa verifica las siguientes propiedades:

- La inversa de la matriz inversa es la matriz original. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas de las matrices cambiando su orden.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- La inversa de la traspuesta de una matriz es igual a la traspuesta de la matriz inversa. $\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$

3.2 CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA Para hallar una matriz inversa dispondremos de varios métodos distintos. En este tema veremos dos:

- **Resolver un sistema de ecuaciones**
- **El método de Gauss – Jordan**
- **Usando determinantes**

¬ **Calculo de la inversa mediante un sistema de ecuaciones lineales**

Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Halla la matriz inversa A^{-1} mediante un sistema de ecuaciones.

Planteamos la matriz $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y hallamos el producto:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$$

Debe verificarse que $A \cdot A^{-1} = I$, por tanto:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c=1 & d=0 \\ 2a=0 & 2b=1 \end{cases}$$

Resolviendo para a, b, c y d:

$$\begin{cases} a=0 & b=\tfrac{1}{2} \\ c=1 & d=0 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \tfrac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, halla la matriz inversa A^{-1} mediante un sistema de ecuaciones.

De nuevo, planteamos la matriz $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y hallamos el producto:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{pmatrix}$$

Debe verificarse que $A \cdot A^{-1} = I$, por tanto:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2c=1 & b+2d=0 \\ 3a+6c=0 & 3b+6d=1 \end{cases}$$

Vemos que cualquiera de los dos pares de ecuaciones no tiene solución:

$$\begin{cases} a+2c=1 \xrightarrow{\times 3} & 3a+6c=3 \\ 3a+6c=0 & 3a+6c=0 \end{cases}$$

Que claramente no puede tener solución.

Por tanto, la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ no tiene matriz inversa.

Este método es muy laborioso para matrices de orden mayor que 2 ya que tendríamos 9 incógnitas.

¬ <u>**Calculo de la inversa mediante el método de Gauss- Jordan**</u> El método de Gauss-Jordan para hallar la matriz inversa consiste en convertir la matriz inicial en la matriz identidad, utilizando **transformaciones elementales**. Llamamos ***transformaciones elementales por filas*** a:

- Permutar dos filas *i* y *j*. Lo escribimos como $F_i \leftrightarrow F_j$
- Sustituir la fila *i* por el resultado de multiplicar o dividir todos sus elementos por un número Lo escribimos como $F_i \leftrightarrow aF_i$
- Sustituir la fila *i* por un múltiplo (no nulo) de ella más otra fila *j* multiplicada por un número *b*. Lo escribimos como $F_i \leftrightarrow aF_i + bF_j$

Ampliamos la matriz original, escribiendo junto a ella la matriz identidad, y aplicamos las transformaciones elementales de modo que la matriz inicial se transforme en la matriz identidad.

Pasos a seguir: $$(A|I) \xrightarrow{\text{transformaciones elementales}} (I|A^{-1})$$

¬ Hacemos ceros debajo de la diagonal principal (de izquierda a derecha)

¬ Hacemos ceros encima de la diagonal principal (de derecha a izquierda)

¬ Arreglamos la diagonal principal (dividiendo cada fila por el número correspondiente para conseguir 1)

Si al finalizar alguna línea es toda cero, la matriz es singular. Es decir, no tiene inversa.

Ejemplos:

a) Calcula con el método de Gauss–Jordan la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Escribimos la matriz identidad junto a la matriz A:

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Y vamos realizando transformaciones elementales a la izquierda, buscando convertirla en la matriz identidad:

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Halla la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Escribimos la matriz identidad junto a la matriz A y operamos como se explicó antes:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 + 4F_1]{F_2 = F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - 5F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 = -\frac{1}{16}F_3]{F_1 = -F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 = F_2 - 5F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 0 & 1 & 0 & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{array}\right)$$

¬ **Calculo de la inversa mediante determinantes (lo veremos al final del tema)**

4. RANGO DE UNA MATRIZ

1 . DEFINICIÓN .- Un concepto muy importante relacionado con las matrices es el de **rango**. El concepto de rango se encuentra ligado al de independencia lineal de vectores. De hecho, si consideramos las filas (o las columnas) de la matriz como vectores, el **rango de la matriz** coincide con **el número máximo de filas (o columnas) de la matriz linealmente independientes.**

Veamos que significa esto :

Cuando los elementos de una fila son proporcionales a los correspondientes de cualquier otra se dice que ambas filas son **linealmente dependientes**. Dos filas son **linealmente independientes** cuando no hay relación de proporcionalidad entre sus elementos correspondientes; esto es, cuando una fila no puede obtenerse multiplicando la otra por un constante

Si lo extendemos a tres filas, pongamos la primera, segunda y tercera , si existen dos números *p* y *q*, tales que , $F3 = pF1 + qF2$, entonces la tercera fila depende linealmente de las dos primeras; en caso contrario son linealmente independientes. Lo mismo podríamos hacer con las columnas. El rango de una matriz es independiente de cómo se calcule, por filas o por columnas. Por eso

Si $A \in M_{m\,x\,n}$, el **rango de A = es menor o igual que el mínimo de *n* y *m*.**

Además el rango se relaciona con la existencia de la matriz inversa:

Una matriz cuadrada de orden n tendrá inversa si su rango es máximo (n)

En ocasiones , no es fácil ver las combinaciones entre las líneas de una matriz , en el caso de que las haya . Por eso existen varios métodos para calcular el rango de una matriz. ahora veremos el método de Gauss y al final del tema veremos el cálculo del rango de una matriz usando determinantes,

2 . CÁLCULO DEL RANGO POR EL MÉTODO DE GAUSS

Una matriz se dice **escalonada por filas** o simplemente **escalonada** si cumple con las siguientes propiedades:

1. Todas las filas cero están en la parte inferior de la matriz.

2. El primer elemento de cada fila diferente de cero (llamado **"pivote"**) está a la derecha del pivote de la fila anterior .

Es decir, todos los elementos debajo de a_{ii} son todos cero.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -2\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

No están escalonadas

Los pasos para **calcular el rango por Gauss** son :

→ Transformamos la matriz en una matriz escalonada, usando transformaciones elementales

→ **El número de filas no nulas de la matriz escalonada es el rango de la matriz inicial**

Veamos dos ejemplos :

1)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 9 & 11\\ 4 & 0 & 10 & -2\\ -3 & -21 & -27 & -33\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2-4F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 7 & 9 & 11\\ 0 & -28 & -26 & -46\\ -3 & -21 & -27 & -33\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-(-3)F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 7 & 9 & 11\\ 0 & -28 & -26 & -46\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Matriz escalonada con una fila de ceros. Entonces el rango es 2

2)

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 3 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 6\\ 3 & 3 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{F_2\to F_2-2F_1\\ F_3\to F_3-2F_1\\ F_4\to F_4-3F_1}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & -6\\ 0 & 6 & -12\\ 0 & 9 & -11\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3\to \frac{1}{6}F_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & -6\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 9 & -11\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -6\\ 0 & 9 & -11\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{F_3\to F_3-5F_2\\ F_4\to F_4-9F_2}}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}\xrightarrow{F_4\to F_4-\frac{7}{4}F_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

3 filas no nulas

rg(A) = 3

5. DETERMINANTES

1. CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 2 Y 3

El concepto de determinante solo está asociado a matrices cuadradas.

El determinante de una matriz cuadrada A es un **número** que se obtiene operando los elementos de la matriz ,y se representa por: $|A|$; o bien, $detA$.

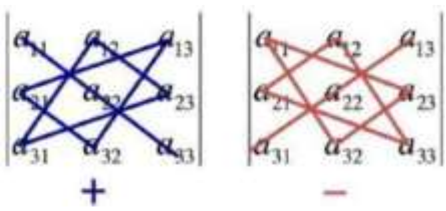
→ El **determinante de una matriz cuadrada de orden 2** es : $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

→ El **determinante de una matriz cuadrada de orden 3** es

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

Esta última expresión se puede recordar fácilmente con la llamada **regla de Sarrus**, que gráficamente se puede interpretar con el siguiente diagrama:



Ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot4\cdot6+(-2)\cdot(-1)\cdot(-2)+0\cdot1\cdot5-5\cdot4\cdot(-2)-0\cdot(-2)\cdot6-3\cdot1\cdot(-1)=$

$=72-4+0+40-0+3=111$

5.2.- PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. Si una línea es combinación lineal de las restantes, el determinante es 0
2. En un determinante, si intercambiamos dos líneas el resultado cambia de signo
3. Si a una línea le sumamos una combinación lineal de las demás, el resultado del determinante no cambia
4. Si se multiplican todos los elementos de una línea por un número el determinante queda multiplicado por ese número
5. Si todos los elementos de una línea se descomponen en dos sumandos, entonces el determinante se desdobla en suma de dos determinantes que tienen todo igual excepto dicha línea que queda desdoblada.
6. El determinante de un producto de matrices es igual al producto de determinantes de ambas matrices.
7. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.
8. Si una línea tiene todos sus elementos nulos, el determinante es cero.
9. Si un determinante tiene dos líneas iguales, el determinante es cero.
10. Si un determinante tiene dos líneas proporcionales, el determinante es cero.

5.3. MATRIZ ADJUNTA

Dada una matriz cuadrada A de orden n se llama **menor complementario del elemento a_{ij}**, y lo representaremos por α_{ij}, al determinante de orden n − 1 que resulta de suprimir la fila i y la columna j de la matriz A.

Dada una matriz cuadrada de orden n , se llama **adjunto del elemento a_{ij}**, y lo representaremos por A_{ij}, al menor complementario de a_{ij} precedido del signo + o − según la suma de los subíndices (i + j) sea par o impar.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

Llamaremos **matriz adjunta** de A representada por $Adj(A)$, a la formada por los adjuntos de los elementos de la matriz inicial.

<u>Ejemplo</u> : Vamos a hallar la matriz adjunta de $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$:

Para ello, calculamos los elementos adjuntos de cada uno de los de la matriz A:

$A_{11}=(-1)^{1+1}|-1|=-1$ $\quad A_{12}=(-1)^{1+2}|2|=-2$

$A_{21}=(-1)^{2+1}|3|=-3$ $\quad A_{22}=(-1)^{2+2}|1|=1$

. Así pues, $\text{Adj}\,A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Ejemplo</u> : Vamos a hallar la matriz adjunta de $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Los adjuntos son:

$B_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=9$ $\quad B_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=14$ $\quad B_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=-24$

$B_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=12$ $\quad B_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-3$ $\quad B_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=-6$

$B_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-6$ $\quad B_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-5$ $\quad B_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=3$

Así pues, la matriz adjunta de B será: $\text{Adj}\,B=\begin{pmatrix} 9 & 14 & -24 \\ 12 & -3 & -6 \\ -6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

5.3 CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN SUPERIOR

Otra forma de calcular determinantes es desarrollarlos por los elementos de una línea. Este método sirve para cualquier orden de matrices cuadradas, pero se emplea principalmente cuando el orden es superior a 3.

Lo único que tendremos que hacer es:

- Primero escoger la línea con la que vamos a trabajar.
- El determinante será el resultado de multiplicar cada elemento de la línea por su adjunto correspondiente y sumar todos los productos obtenidos. Para evitar realizar muchos cálculos siempre **conviene realizar el desarrollo por la línea que tenga más elementos nulos**.

En notación matemática: Dada una matriz $A \in M_n$, se cumple:

$det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}$ (desarrollo por la fila i)

$det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ (desarrollo por la columna j)

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & 9 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{C_1}{=} 5 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 2 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 9 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 149 + 2 \cdot (-92) = 561$$

5.4.- CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA USANDO POR DETERMINANTES

Ahora que ya hemos visto qué es el determinante de una matriz podemos estudiar la 3ª forma para el cálculo de la matriz inversa.

Dada una matriz $A \in M_n$, su matriz inversa puede obtenerse con ayuda de la matriz de adjuntos. De este modo:

$$A^{-1} = \frac{1}{det A} \cdot (Adj(A))^t$$

Por lo tanto, podemos asegurar que **una matriz cuadrada $A \in M_n$ es regular si, y solo si, $det A \neq 0$**

Ejemplo:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Es fácil ver que: $|B| = 2 \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1}$. Calculando la matriz adjunta y aplicando la fórmula: $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$

5.5.- CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ USANDO DETERMINANTES

Dada una matriz $A \in M$mxn, llamamos **menor de orden k** de esa matriz al determinante formado por los elementos de la intersección de k filas y k columnas de esa matriz en sus posiciones respectivas.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3x4}$$

Un menor de orden 2 de A sería: $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$

Un menor de orden 3 de A sería: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -42 + 24 - 12 - 40 = -70$

Dado un menor de orden k, se entiende por **orlar dicho menor** a calcular el determinante de orden k + 1 que resulta al añadirle al menor una fila y una columna de la matriz que no formasen parte del menor dado.

Ejemplo:

Un modo de orlar el primer menor del ejemplo anterior sería: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

El segundo menor del ejemplo anterior no se puede orlar ya que no tenemos filas suficientes.

Con las definiciones anteriores, podemos definir **el rango de una matriz como el orden del mayor menor no nulo de la matriz,** lo que nos permite su cálculo usando determinantes de dos maneras diferentes :

Método 1: Consiste en buscar menores no nulos del mayor orden posible, es decir, comenzar por los menores "más grandes" de A. Este método es aconsejable si la matriz es cuadrada

o Ventajas: Si encontramos un menor no nulo "pronto", se termina rápidamente. Suele ser el más rápido para matrices cuyo rango no puede ser mayor a 3.

o Inconvenientes: Si el rango es pequeño, todos los menores "grandes" van a ser nulo, con lo que hemos de seguir calculando menores. Además, si la matriz es de orden elevado, el cálculo de los determinantes es laborioso.

Ejemplo : Hallemos el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ utilizando el primer método:

Lo primero es hacer el mayor menor posible, que es $|A| = 56 - 20 + 4 - 40 = 0$. No ha habido suerte. Tenemos que seguir con uno de orden 2, por ejemplo: $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Así pues, concluimos que $\text{rg} A = 2$.

· **Método 2: (Orlado)** Consiste en lo contrario a la estrategia anterior, es decir, comenzar por los menores más pequeños e irlos Orlando (añadiendo filas y columnas) a partir de un menor no nulo de orden 1. Se utiliza la propiedad de que si todos los determinantes que resultan de orlar el de partida con una fila o columna son nulos, entonces esa fila o columna es combinación lineal de otra/as y, por tanto, para calcular el rango, se puede suprimir.

o Ventajas: Se parte de menores sencillos de calcular, además, al ir suprimiendo filas o columnas, el rango de las matrices que se obtienen es más sencillo que el de la matriz de partida. Por ello, suele ser aconsejable para matrices cuyo rango puede ser mayor a 3 (sobre todo si no son cuadradas)

o Inconvenientes: Si el rango es "grande", no se suprimen filas o columnas por lo que hacemos bastantes cálculos con los menores.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{5x4}$$

En este caso podemos ver que: $F_5 = F_1 + F_4$, por lo tanto la eliminamos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4x4}$$

Ahora la $F_1 = F_2 + F_4$. Eliminamos luego la F_1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3x4}$$

Tenemos un menor [redacted] nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Lo orlamos, por ejemplo añadiendo la 3ª columna y la 3ª fila (los elementos necesarios):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 2 - 2 - 0 = -2 \neq 0$$

Ya tenemos un menor de orden 3 distinto de cero y sabemos en este caso $rango A \leq 3$. Por lo tanto, el rango de A es 3.

Solución: $\boldsymbol{rangoA = 3}$

6. ECUACIONES Y SISTEMAS MATRICIALES

Se llama **ecuación/sistema matricial** a toda ecuación/sistema en el que la/s incógnitas sean matrices. Por ejemplo: $AX = B \quad y \quad \begin{cases} 2X - Y = C \\ -5X + 6Y = D \end{cases}$ siendo X ,A, B , C y D matrices

.

· CASO 1: La ecuación lineal general *AX = B*

- Si la matriz **A es invertible**, la ecuación es equivalente $A^{-1}AX = A^{-1}B$ y, por tanto $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$ **.**
- En caso de que **A no sea invertible**, o que ni siquiera sea cuadrada, se resuelve considerando la matriz incógnita X como una matriz genérica de $m \times n$ incógnitas y resolviendo el sistema lineal de ecuaciones.
- Es importante recordar que el producto de matrices no es conmutativo, por lo que no debemos olvidar que no es lo mismo multiplicar a derecha que a izquierda. Así, si la ecuación fuese $XA = B$, la solución sería $X = BA^{-1}$ siempre que A sea invertible.

Ejemplo 15: Resolvamos la ecuación $AX+B=C$, siendo $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}6 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Es evidente que la ecuación es equivalente a $AX=C-B$. Para despejar X, vemos primero si A es invertible. Un simple cálculo nos lleva a que lo es, siendo $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Así pues, según lo visto $X=A^{-1}(C-B)$. Sin más que sustituir y calcular, se tiene que $X=\begin{pmatrix}10 & 5 & 5\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

CASO 2: El sistema lineal general $\begin{cases}aX+bY=A\\ cX+dY=B\end{cases}$

Este tipo de sistema se resuelve utilizando los mismos métodos (sustitución, igualación y reducción) que en los sistemas numéricos con la salvedad de que no existe la división de una matriz por un número ni la división de matrices

Ejemplo Resolvamos el sistema matricial: $\begin{cases}X+2Y=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}\\ 2X-3Y=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\end{cases}$. Por comodidad, llamamos A y B a los términos independientes, con lo que queda: $\begin{cases}X+2Y=A\\ 2X-3Y=B\end{cases}$.

Si aplicamos el método de reducción: $\begin{cases}X+2Y=A\\ 2X-3Y=B\end{cases} \xrightarrow{(-2)} \begin{cases}-2X-4Y=-2A\\ 2X-3Y=B\end{cases}$.

Sumando ambas ecuaciones queda: $-7Y=B-2A$, con lo que $Y=\frac{1}{7}(2A-B)$. Sustituyendo en la primera ecuación, operando y despejando X, se obtiene: $X=\frac{1}{7}(3A+2B)$, con lo que la solución es: $X=\begin{pmatrix}8/7 & 9/7\\ 8/7 & 13/7\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}3/7 & 13/7\\ -4/7 & 4/7\end{pmatrix}$

7. APLICACIONES DEL CÁLCULO MATRICIAL.

Existen numerosas situaciones reales en las que el calculo matricial tiene gran utilidad (Sociologia, Transporte, Teoria de Grafos,...). Veamos uno de estos ejemplos:

Ejemplo.- Una fábrica produce dos modelos de lavadoras: A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la L y 50 en la S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la L y 30 en la S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración. Calculemos, utilizando cálculo matricial, una matriz que represente las horas de taller y administración para cada uno de los modelos.

La matriz $P=\begin{pmatrix}400 & 200 & 50\\ 300 & 100 & 30\end{pmatrix}$, representa la cantidad de lavadoras para cada modelo y terminación.

La matriz $H=\begin{pmatrix}25 & 1\\ 30 & 1{,}2\\ 33 & 1{,}3\end{pmatrix}$, representa la cantidad de horas de taller y administración para cada terminación.

Así pues, la matriz $P\cdot H=\begin{pmatrix}400 & 200 & 50\\ 300 & 100 & 30\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}25 & 1\\ 30 & 1{,}2\\ 33 & 1{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17650 & 705\\ 11490 & 459\end{pmatrix}$

Esta matriz representará las horas de taller (1ª columna) y administración (2ª columna) para cada modelo A (1ª fila) y B (2ª fila).