XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
Dirección Xeral de Educación, Formación
Profesional e Innovación Educativa

Educación secundaria
para personas adultas

Ámbito científico tecnológico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 3

Unidad didáctica 1

Números y álgebra

Índice

1. Introducción....3
   - 1.1 Descripción de la unidad didáctica....3
   - 1.2 Conocimientos previos....3
   - 1.3 Criterios de evaluación....3
2. Secuencia de contenidos y actividades....4
   - 2.1 Números racionales....4
     - 2.1.1 Transformación de fracciones en decimales. Números decimales exactos y periódicos....4
     - 2.1.2 Transformación de decimales en fracciones....6
     - 2.1.3 Potencias de números racionales con exponente entero....10
     - 2.1.4 Jerarquía de operaciones....12
     - 2.1.5 Potencias de base 10. Aplicación para la expresión de números muy pequeños....13
     - 2.1.6 Operaciones con números expresados en notación científica....15
   - 2.2 Expresiones radicales....16
     - 2.2.1 Transformaciones de números radicales....19
     - 2.2.2 Operaciones con radicales....20
   - 2.3 Expresiones algébricas. Polinomios....25
     - 2.3.1 Terminología básica....25
     - 2.3.2 Valor numérico de un polinomio....25
     - 2.3.3 Operaciones con polinomios: suma, resta, multiplicación y división....26
     - 2.3.4 Potencia de un polinomio....29
     - 2.3.5 Igualdades notables....31
   - 2.4 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita....32
     - 2.4.1 Resolución de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$....32
     - 2.4.2 Número de soluciones de una ecuación de segundo grado....33
     - 2.4.3 Ecuaciones de segundo grado incompletas....34
     - 2.4.4 Resolución de problemas utilizando ecuaciones de segundo grado....35
   - 2.5 Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas....38
     - 2.5.1 Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales....38
     - 2.5.2 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones....41
3. Actividades finales....43
4. Solucionario....47
   - 4.1 Soluciones de las actividades propuestas....47
   - 4.2 Soluciones de las actividades finales....54
5. Glosario....59
6. Bibliografía y recursos....60

1. Introducción

1.1 Descripción de la unidad didáctica

En esta unidad estudiaremos la relación entre los números racionales y los números decimales, llegando hasta las expresiones radicales y sus operaciones.

Estudiaremos además las expresiones algébricas y las operaciones con ellas, las ecuaciones de segundo grado, así como los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, para finalizar con la resolución de problemas de la vida diaria mediante la utilización de estas potentes herramientas matemáticas.

1.2 Conocimientos previos

Para trabajar con esta unidad es necesario recordar los conceptos y operaciones estudiados en los módulos anteriores, en especial:

- Cuáles son los números: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, y $\mathbb{Q}$. Operaciones combinadas con los números naturales, enteros y racionales. Potencias de base 10.
- El lenguaje algébrico y la traducción de expresiones del lenguaje diario al algébrico, y viceversa.
- La resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

1.3 Criterios de evaluación

- Utilizar las propiedades de los números racionales, las raíces y otros números radicales para operar con ellos empleando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida diaria y presentar los resultados con la precisión requerida.
- Utilizar el lenguaje algébrico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.
- Resolver problemas de la vida diaria en los que se necesite la formulación y la resolución de ecuaciones de primer grado y segundo grado, así como sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algébricas, gráficas o recursos tecnológicos, y valorar y contrastar los resultados obtenidos.

2. Secuencia de contenidos y actividades

2.1 Números racionales

2.1.1 Transformación de fracciones en decimales. Números decimales exactos y periódicos

Los números decimales tienen dos partes separadas por una coma:

$$\underbrace{1}_{\text{Parte enteira}}\,,\,\underbrace{4\,3\,5}_{\text{Parte decimal}}$$

Al hallar el cociente entre numerador y denominador de una fracción, si la división no es exacta, obtenemos un número decimal.

Todas las fracciones equivalentes representan el mismo número decimal.

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=0{,}666...=0{,}\widehat{6} \qquad \frac{5}{8}=\frac{10}{16}=\frac{15}{24}=0{,}625$$

Los números decimales que se obtienen de una fracción al dividir el numerador entre el denominador (siempre que no dé exacta) pueden ser de dos tipos: **números decimales exactos** o **números decimales periódicos**.

Los **números decimales exactos** son aquellos que tienen un número finito de decimales. Veamos qué número decimal corresponde a cuatro quintos.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \hline 0 & 0{,}8 \end{array}$$

Le corresponde el número decimal exacto 0,8.

Los **números decimales periódicos** están formados por un número ilimitado de cifras decimales.

$$\frac{50}{11} = 4{,}545\ ... = 4{,}\widehat{54} \qquad \frac{16}{15} = 1{,}06666\ ... = 1{,}0\hat{6}$$

Reciben el nombre de período las cifras que se repiten indefinidamente.

En función de cómo sea la parte decimal, los números periódicos pueden ser:

- **Periódicos puros**: su parte decimal es toda periódica.
- **Periódicos mixtos**: su parte decimal está formada por una parte no periódica seguida de otra parte periódica.

Actividades resueltas

Obtenga la expresión decimal correspondiente a las siguientes fracciones e indique de qué tipo son:

$\frac{132}{11}$	$=$ 12, que no es un número decimal.
$\frac{5}{9}$	$= 0{,}55555\ldots = 0{,}\hat{5}$, que es un número decimal periódico puro.
$\frac{128}{15}$	$= 8{,}53333\ldots = 8{,}5\hat{3}$, que es un número decimal periódico mixto.
$\frac{48}{5}$	$=$ 9,6, que es un número decimal exacto.

Actividad propuesta

S1. Calcule la expresión decimal de cada una de las siguientes fracciones e indique si dichas expresiones decimales son exactas, periódicas puras o periódicas mixtas.

Fracción	Expresión decimal	Tipo de decimal
$\frac{3}{4}$		
$\frac{11}{3}$		
$\frac{11}{15}$		
$\frac{3}{25}$		
$\frac{121}{6}$		
$\frac{17}{330}$		
$\frac{500}{9}$		
$\frac{73}{2}$		

2.1.2 Transformación de decimales en fracciones

Acabamos de ver cómo se transforma una fracción en un número decimal, pero... ¿cómo se hace el proceso inverso? Es decir, ¿cómo transformamos un número decimal en una fracción?

En primer lugar hay que señalar que no todos los números decimales se pueden transformar en fracción. Para saber qué números decimales se pueden transformar en fracción y cuáles no, debemos revisar lo que ya hemos aprendido en esta unidad.

Los números decimales de los que hemos hablado hasta ahora son los números decimales exactos y los números decimales periódicos (puros o mixtos). Esto es así porque **los únicos números decimales que se pueden transformar en fracción son los números decimales exactos y los números decimales periódicos (tanto los puros como los mixtos)**.

Hay números decimales que no son ni exactos ni periódicos, como por ejemplo el número:

7,121121112111121111121111112111111112...

Este número no puede ser transformado en una fracción. Los números que no pueden ser transformados en fracciones tienen todos un número infinito de cifras decimales y no son periódicos. Estos números se llaman **números irracionales** y hablaremos de ellos en el apartado 2.2 de esta unidad.

Ahora veremos la forma de pasar los números decimales a fracción. Esta fracción se llama **fracción generatriz**. La forma de transformarlos depende del tipo de número decimal de que se trate. Así, habrá un método para transformar en fracción los números decimales exactos, otro para los periódicos puros y otro diferente para los periódicos mixtos.

Transformación en fracción de un número decimal exacto

El numerador de la fracción generatriz es el número decimal sin la coma y el denominador es el 1 seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal del número.

Actividades resueltas

Transforme en fracciones los siguientes números decimales exactos:

$\mathbf{0,8}$	Tiene una única cifra decimal, por lo que la fracción que le corresponde es $\frac{8}{10}$, que puede ser simplificada y obtenemos $\frac{4}{5}$.
$\mathbf{2,25}$	Tiene dos cifras decimales, por lo que la fracción que le corresponde es $\frac{225}{100}$, que puede ser simplificada y obtenemos $\frac{9}{4}$.
$\mathbf{0,875}$	Tiene tres cifras decimales, por lo que la fracción que le corresponde es $\frac{875}{1000}$, que puede ser simplificada y obtenemos $\frac{7}{8}$.
$\mathbf{7}$	No tiene cifras decimales, por lo que la fracción que le corresponde es $\frac{7}{1}$.

Transformación en fracción de un número decimal periódico puro

Para pasar a forma de fracción un número periódico puro debemos contar cuántas cifras tiene la parte periódica del número. Así, $1,\hat{2}$ es un número periódico puro y el período está formado por una única cifra decimal. Llamamos *A* al número decimal:

$$A = 1,\hat{2} = 1{,}222\ ....$$

Ahora multiplicamos el número por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte periódica del número. Como en este caso la parte periódica de $1,\hat{2}$ tiene una única cifra, multiplicamos el número por 10 y obtenemos:

$$10A = 12{,}222\ ...$$

Restamos las dos expresiones que tenemos:

$$\begin{array}{rcl} 10A & = & 12{,}222\ ... \\ \underline{-A} & \underline{=} & \underline{1{,}222\ ...} \\ 9A & = & 11 \end{array}$$

Y finalmente despejamos *A*:

$$9A = 11 \Rightarrow A = \frac{11}{9} \Rightarrow 1,\hat{2} = \frac{11}{9}.$$

y ya tenemos el número $1,\hat{2}$ expresado en forma de fracción.

Actividades resueltas

Transforme en fracciones los siguientes números decimales periódicos puros:

$\mathbf{31,\widehat{53}}$	La parte periódica tiene dos cifras, por lo que multiplicaremos el número por 100 y tenemos: $$\begin{array}{r} 100A = \ 3153{,}5353\ldots \\ \underline{-A = \ \ -31{,}5353\ldots} \\ 99A = 3122 \end{array}$$ Así, $99A = 3122 \Rightarrow A = \frac{3122}{99}$, que no se puede simplificar, y tenemos que $\mathbf{31,\widehat{53}} = \frac{3122}{99}$.
$\mathbf{0,\widehat{432}}$	La parte periódica tiene tres cifras, por lo que multiplicaremos el número por 1000 y tenemos: $$\begin{array}{r} 1000A = \ 432{,}432432\ldots \\ \underline{-A = \ \ -0{,}432432\ldots} \\ 999A = 432 \end{array}$$ Así, $999A = 432 \Rightarrow A = \frac{432}{999}$, que se puede simplificar, y tenemos que $\mathbf{0,\widehat{432}} = \frac{16}{37}$.

Transformación en fracción de un número decimal periódico mixto

Para pasar a forma de fracción un número periódico mixto debemos contar cuántas cifras tiene la parte periódica del número y cuántas tiene la parte decimal no periódica. Así, $1{,}64\hat{2}$ es un número periódico mixto cuyo período está formado por una única cifra (2) y la parte decimal no periódica está formada por dos cifras (6 y 4). Llamamos *A* al número decimal:

$$A = 1{,}64\hat{2} = 1{,}64222\ldots.$$

Ahora multiplicamos el número por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica del número. Como en este caso la parte decimal no periódica de $1{,}64\hat{2}$ tiene dos cifras, multiplicamos el número por 100 y obtenemos:

$$100A = 164{,}222\ldots$$

Multiplicamos también el número *A* por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica del número más el número de cifras de la parte periódica. Como en este caso la parte decimal no periódica de $1{,}64\hat{2}$ tiene dos cifras y la periódica una, multiplicamos el número por 1000 y obtenemos:

$$1000A = 1642{,}22\ldots$$

Restamos las dos expresiones que tenemos:

$$\begin{array}{r} 1000A \ = \ 1642{,}222\ldots \\ \underline{-100A \ = \ \ 164{,}222\ldots} \\ 900A = 1478 \end{array}$$

y finalmente despejamos *A*:

$$900A = 1478 \Rightarrow A = \frac{1478}{900} \Rightarrow 1{,}64\hat{2} = \frac{1478}{900}$$

que se puede simplificar $1{,}64\hat{2} = \frac{1478}{900} = \frac{739}{450}$ y ya tenemos el número $1{,}64\hat{2}$ expresado en forma de fracción.

Actividades resueltas

Transforme en fracciones los siguientes números decimales periódicos mixtos:

$\mathbf{31{,}5\hat{3}}$	La parte periódica tiene una cifra y la decimal no periódica otra, por lo que multiplicaremos el número por 100 y por 10 y tenemos: $\begin{array}{r} 100A = 3153{,}333\ldots \\ \underline{-10A = -315{,}333\ldots} \\ 90A = 2838 \end{array}$ Así, $90A = 2838 \Rightarrow A = \frac{2838}{90}$, que se puede simplificar y tenemos que $\mathbf{31{,}5\hat{3}} = \frac{473}{15}$.
$\mathbf{0{,}4\widehat{32}}$	La parte periódica tiene dos cifras y la decimal no periódica una, por lo que multiplicaremos el número por 1000 y por 10 y tenemos: $\begin{array}{r} 1000A = 432{,}3232\ldots \\ \underline{-10A = -4{,}3232\ldots} \\ 990A = 428 \end{array}$ Así, $990A = 428 \Rightarrow A = \frac{428}{990}$, que se puede simplificar y tenemos que $\mathbf{0{,}4\widehat{32}} = \frac{214}{495}$.

Resumen

Para pasar un número decimal a fracción se procede del siguiente modo:
Decimal exacto: $\frac{\text{Número sin coma}}{\text{Unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número}}$
Periódico puro: $\frac{\text{Número sin coma} - \text{Parte entera}}{\text{Tantos 9 como cifras periódicas tiene el número}}$
Periódico mixto: $\frac{\text{Número sin coma} - \text{Parte entera seguida de la parte decimal que no se repite}}{\text{Tantos 9 como cifras periódicas seguidos de tantos ceros como cifras decimales no periódicas}}$

Actividades propuestas

S2. Calcule la fracción generatriz de los siguientes números dejando la fracción lo más reducida posible:

$0{,}25\hat{1}$	$3{,}\widehat{35}$	$1{,}\hat{9}$
$12{,}28$	$7{,}25$	2
$8{,}\hat{8}$	$1{,}\hat{1}$	$7{,}222\hat{1}$
$13{,}3$	$3{,}8\widehat{21}$	$0{,}\widehat{4321}$
$-7{,}005\widehat{41}$	$0{,}25$	$-0{,}72\widehat{12}$

S3. Basándose en los resultados de las celdas sombreadas del ejercicio anterior, demuestre que $1,\hat{9} = 2$.

S4. Tomando como referencia la actividad anterior, demuestre que $1{,}3\hat{9} = 1{,}4$.

2.1.3 Potencias de números racionales con exponente entero

En este momento ya nos deben ser conocidas las potencias de números naturales y de números enteros. Las potencias de números racionales se calculan de modo similar. Así:

Potencia de una fracción con exponente positivo: una potencia de una fracción con exponente positivo es el producto de esa fracción (la base) por ella misma tantas veces como indique el exponente. La base se escribe siempre entre paréntesis.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{\text{n veces}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{\text{n veces}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{\text{n veces}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

- **Potencias con exponente cero:** la potencia de exponente cero <u>vale siempre uno</u> (para cualquier base distinta de cero) $(\boldsymbol{a})^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$. De la misma forma:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

- **Potencias con exponente negativo:** una potencia con exponente negativo es la inversa de la misma potencia de exponente positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Las propiedades de las operaciones con potencias, ya conocidas para los números naturales y los enteros, se aplican igualmente a los números racionales (también llamados fracciones):

- **Con las potencias de las fracciones se siguen las mismas reglas para los signos:**

$$(nº\ negativo)^{par} = nº\ positivo \qquad (nº\ negativo)^{impar} = nº\ negativo$$

$$(nº\ positivo)^{par} = nº\ positivo \qquad (nº\ positivo)^{impar} = nº\ positivo$$

- La **potencia de un producto** es igual al producto de las potencias de los factores.

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

- La **potencia de un cociente** es igual al cociente de las potencias.

$$\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

- **Producto de potencias de la misma base:** para multiplicarlas, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

- **Cociente de potencias de la misma base:** para dividirlas, se deja la misma base y se restan los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

- **Potencia de otra potencia:** para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$$

Actividades resueltas

$\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{15}{30}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$
$\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{3+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}$
$\left(\frac{5}{10}\right)^2:\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{10}:\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{25}{60}\right)^2 = \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{5^2}{12^2} = \frac{25}{144}$
$\left(\frac{3}{5}\right)^9:\left(\frac{3}{5}\right)^7 = \left(\frac{3}{5}\right)^{9-7} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$
$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64}$
$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{(-3)^2}{2^2} = \frac{9}{4}$
$\frac{2^3\cdot 3^{-5}\cdot 6^4\cdot 9^2\cdot 8^{-3}}{12^3\cdot 9^{-5}\cdot 3^7\cdot 2^{-5}} = \frac{2^3\cdot 3^{-5}\cdot(2\cdot 3)^4\cdot(3^2)^2\cdot(2^3)^{-3}}{(2^2\cdot 3)^3\cdot(3^2)^{-5}\cdot 3^7\cdot 2^{-5}} = \frac{2^3\cdot 3^{-5}\cdot 2^4\cdot 3^4\cdot 3^4\cdot 2^{-9}}{2^6\cdot 3^3\cdot 3^{-10}\cdot 3^7\cdot 2^{-5}} =$ $= \frac{2^{3+4-9}\cdot 3^{-5+4+4}}{2^{6-5}\cdot 3^{3-10+7}} = \frac{2^{-2}\cdot 3^3}{2^1\cdot 3^0} = 2^{-3}\cdot 3^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$
$\left(\frac{5}{4}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^6 = \left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^6 = \frac{4^3}{5^3}\cdot\frac{5^6}{2^6} = \frac{(2^2)^3}{5^3}\cdot\frac{5^6}{2^6} = \frac{2^6}{5^3}\cdot\frac{5^6}{2^6} = 2^6\cdot 5^{-3}\cdot 5^6\cdot 2^{-6} = 2^{6-6}\cdot 5^{-3+6} =$ $= 2^0\cdot 5^3 = 1\cdot 125 = 125$

Actividades propuestas

S5. Exprese en forma de número (natural, entero o racional) lo más simplificado posible:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$	$(3)^{-2}$
$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{2}$	$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$	$\left(\left(\frac{10}{6}\right)^{-1}\right)^{-2}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}:\left(\frac{2}{5}\right)^{-5}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right)^{2}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{4}:\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$	$((2^{-1})^{3})^{2}:\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right)^{3}$

S6. Exprese en forma de potencia:

$\frac{2^4}{9^2}$	$\frac{2^4\cdot 3^6}{18^2\cdot 3^2}$	$\frac{3x^5y^{-3}z^7}{3^{-1}\cdot(x^2y)^2\cdot(yz)^{-7}\cdot x}$
$9\cdot x^{-6}\cdot(x^2y)^2$	$\frac{x^2y^3}{x^{-8}y^8}$	$\left(\left(\frac{1}{x^{-1}}\right)^{-2}\right)^{-3}$

2.1.4 Jerarquía de operaciones

Cuando hay varias operaciones indicadas, **el orden de la operación** es como en los números naturales y enteros:

1- Paréntesis

2- Potencias y raíces

3- Multiplicaciones y divisiones

4- Sumas y restas

Cuando hay operaciones con paréntesis, se operan estos en primer lugar de una de estas dos formas:

- Se resuelven los paréntesis de forma independiente hasta dejarlos reducidos a una sola fracción.
- Se suprimen los paréntesis, teniendo en cuenta que si los paréntesis tienen delante un signo +, los signos interiores no varían y si los paréntesis tienen delante un signo –, los signos interiores se transforman de + a – y de – a + .

$$+\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}\right)=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n} \qquad -\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}\right)=-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{m}{n}$$

Actividad resuelta

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{6}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}-\frac{1\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{18}{20}-\frac{2}{15}=\frac{54}{60}-\frac{8}{60}=\frac{46}{60}=\frac{23}{30}$$

mcm (20,15) = 60

Actividades propuestas

S7. Resuelva y calcule

$\frac{3}{5}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=$	$\frac{7}{9}-\frac{1}{6}:\frac{3}{2}=$	$\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}=$
$\frac{3}{5}:6+\frac{5}{6}:4=$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{3}:\frac{1}{9}+\frac{2}{5}=$	$\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{5}{7}-\frac{4}{9}\right)=$

2.1.5 Potencias de base 10. Aplicación para la expresión de números muy pequeños

Potencias de base 10

La razón de repasar en este momento las potencias de 10 es que, en las ciencias en general, se trabaja con números muy pequeños (como la masa y la carga de las partículas subatómicas: protón, electrón y neutrón) y con números muy grandes (como el número de átomos que hay en un cuerpo cualquiera, por ejemplo, un libro). Gracias a las potencias de 10 podemos expresar estos números, muy grandes o muy pequeños, de un modo fácil de utilizar y, sobre todo, podemos leerlos fácilmente.

Las potencias de 10 ya son conocidas, especialmente las que tienen exponente positivo. En este apartado las repasaremos junto con las potencias de 10 con exponente negativo.

Exponente positivo	Exponente cero	Exponente negativo
$10^1=10$ $10^2=100$ $10^3=1\,000$ $10^4=10\,000$ $10^5=100\,000$ $10^6=1\,000\,000$ …	$10^0=1$	$10^{-1}=\frac{1}{10^1}=\frac{1}{10}=0{,}1$ $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0{,}01$ $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1\,000}=0{,}001$ $10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10\,000}=0{,}000\,1$ …

Actividades propuestas

S8. Calcule:

10^{-4}	10^{11}	$8 \cdot 10^5$
$9 \cdot 10^{-2}$	10^0	10^{-3}

Notación científica

Un número está escrito en **notación científica** si está expresado como producto de un número real con una única cifra antes de la coma decimal (que no puede ser cero) por una potencia de 10.

$$m \cdot 10^e$$

- El número *m* se llama **mantisa.** Tiene que tener una única cifra antes de la coma decimal, esa cifra no puede ser cero y debe ir precedida del signo menos (-) cuando el número es negativo. Así, ejemplos de mantisas son:

1,234	-9,2567	4,254	-3	7

- El número *e* se llama **orden de magnitud**. El orden de magnitud de un número escrito en notación científica es el exponente de la potencia de 10.

Actividades resueltas

Escriba en notación científica los siguientes números:

$80\ 000 = 8 \cdot 10^4$	$-123\ 450\ 000 = -1{,}2345 \cdot 10^8$	$8\ 230\ 000\ 000\ 000 = 8{,}23 \cdot 10^{12}$
$0{,}000\ 08 = 8 \cdot 10^{-5}$	$-0{,}000\ 000\ 001\ 22 = -1{,}22 \cdot 10^{-9}$	$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 08 = 8 \cdot 10^{-14}$
$85\ 325\ 965\ 245\ 000\ 000 = 8{,}5325965245 \cdot 10^{16}$	$-0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 853\ 421 = -8{,}53421 \cdot 10^{-13}$	

Actividades propuestas

S9. Escriba en notación científica los números siguientes:

$370\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$	$-0{,}000\ 056$
$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 807$	$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 947$
$-294\ 300\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$	$1\ 000\ 000\ 000$

S10. Escriba en forma ordinaria

$-2{,}75 \cdot 10^4$	$8{,}08 \cdot 10^{-7}$	$-9{,}98 \cdot 10^8$
$-3{,}2 \cdot 10^{-4}$	$1{,}08 \cdot 10^6$	$1{,}623 \cdot 10^{-20}$

2.1.6 Operaciones con números expresados en notación científica

Sumas y restas

Tienen que tener la misma potencia de 10 para poder sumarlos y restarlos directamente.

Actividades resueltas

Calcule:

$3 \cdot 10^{-6} + 5{,}32 \cdot 10^{-6} = 8{,}32 \cdot 10^{-6}$	$5{,}1 \cdot 10^{4} + 6{,}3 \cdot 10^{4} = 11{,}4 \cdot 10^{4} \to 1{,}14 \cdot 10^{5}$ Recuerde que la mantisa solo puede tener una cifra antes de la coma

Si no tienen iguales los exponentes de 10, se pueden transformar en otros que sí los tengan y después sumarlos o restarlos.

Actividades resueltas

Calcule:

$3 \cdot 10^{6} + 5{,}32 \cdot 10^{5} = 3 \cdot 10^{6} + 0{,}532 \cdot 10^{6} = 3{,}532 \cdot 10^{6}$
$8{,}1 \cdot 10^{-3} + 5{,}32 \cdot 10^{-4} = 8{,}1 \cdot 10^{-3} + 0{,}532 \cdot 10^{-3} = 8{,}632 \cdot 10^{-3}$
$5{,}2 \cdot 10^{3} - 1{,}28 \cdot 10^{4} = 0{,}52 \cdot 10^{4} - 1{,}28 \cdot 10^{4} = -0{,}76 \cdot 10^{4} \to -7{,}6 \cdot 10^{3}$ Recuerde que la mantisa solo puede tener una cifra antes de la coma

También se pueden resolver con la calculadora como explicaremos más adelante.

Multiplicaciones y divisiones

Presentan menos dificultades que las sumas y las restas.

Para el producto, se multiplican las mantisas y se suman los exponentes.

Actividades resueltas

Calcule:

$(3 \cdot 10^{6}) \cdot (5{,}32 \cdot 10^{5}) = (3 \cdot 5{,}32) \cdot 10^{6+5} = 15{,}96 \cdot 10^{11} \to 1{,}596 \cdot 10^{12}$ Recuerde que la mantisa solo puede tener una cifra antes de la coma
$(-8{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot (5 \cdot 10^{-4}) = (-8{,}1 \cdot 5) \cdot 10^{-3+(-4)} = -40{,}5 \cdot 10^{-7} \to -4{,}05 \cdot 10^{-6}$ Recuerde, de nuevo, que la mantisa solo puede tener una cifra antes de la coma

Para el cociente, se dividen las mantisas y se restan los exponentes.

Actividades resueltas

Calcule:

$(3{,}2\cdot 10^6):(5\cdot 10^{-4}) = \left(\frac{3{,}2}{5}\right)\cdot 10^{6-(-4)} = 0{,}64\cdot 10^{10} = 6{,}4\cdot 10^9$
$(-8{,}1\cdot 10^{-3}):(6\cdot 10^{7}) = \left(-\frac{8{,}1}{6}\right)\cdot 10^{-3-7} = -1{,}35\cdot 10^{-10}$

Operaciones usando la calculadora

Para escribir en una calculadora un número en notación científica se usa la tecla EXP (no use la tecla de 10^x).

Para teclear el número $2{,}95\cdot 10^8$ hacemos así: 2.95 EXP 8. Fíjese que el 10 ¡NO se teclea! Veamos más ejemplos:

	$3\cdot 10^6$	→	3 EXP 6
	$10^7 = 1\cdot 10^7$	→	1 EXP 7 ¡Ojo! Es un error frecuente teclear en este caso 10 EXP 7; recuerde que el 10 no se teclea.
	$2{,}7\cdot 10^{-4}$	→	2.7 EXP ± 4 En algunas calculadoras es 2.7 EXP (-) 4

Después de que el número aparezca en la pantalla, puede hacer con él cualquier operación, como haría con los números ordinarios (sumar, multiplicar, raíces, etc.). La calculadora le devuelve automáticamente el resultado del cálculo correcto en notación científica. ¡Muy cómodo!

Actividad propuesta

S11. Efectúe las siguientes operaciones escribiendo el resultado en notación científica.

$2\cdot 10^5 + 5{,}76\cdot 10^7 - 5{,}4\cdot 10^6$	$(2{,}34\cdot 10^{24}):(1{,}4\cdot 10^{20})$
$(4{,}5\cdot 10^9)\cdot(6{,}5\cdot 10^3)$	$(1{,}2\cdot 10^7)^2$

2.2 Expresiones radicales

Ya hemos hablado de los números decimales en el apartado 2.1.2. Allí indicamos que los únicos números decimales que se pueden transformar en fracción son los números decimales exactos y los números decimales periódicos (tanto los puros como los mixtos). También comentamos que hay números decimales que no son ni números decimales exactos ni números decimales periódicos, como por ejemplo el número:

7,1211211121111211111211111121111112...

Los números que no pueden ser transformados en fracciones tienen todos un número infinito de cifras decimales y no son periódicos.

Hay muchos números que son de ese tipo, es decir, hay muchos números que no son racionales. Vamos escribir algunos de ellos:

- 1,101001000100001000001000001...
- 1,4142135623730950488016887242096980... = $\sqrt{2}$.
- 3,14159265358979323846264338322950288419716939933751058209... = π.
- 2,7182818284... = e.

Observe que algunos de los números anteriores tienen un nombre especial.

Ninguno de estos números es un número racional, o lo que es el mismo, ninguno de esos números se puede escribir en forma de fracción. De este modo, se ve que hay más números que los racionales. Estos números que no son racionales se llaman **números irracionales** y su expresión decimal tiene siempre infinitas cifras decimales y no son periódicos. El conjunto formado por todos los números irracionales se representa por $\mathbb{I}$.

$\mathbb{I}=\{$números irracionales$\}$

Dentro de estos números irracionales están las raíces de números enteros que no dan exactas, es decir, las que en el resultado tienen cifras decimales.

Los números irracionales son conocidos desde hace mucho tiempo (más de 2000 años). Ya en aquella época se sabía que algunos de esos números, como π o $\sqrt{2}$, no se podían escribir en forma de fracción.

Si los números irracionales tienen infinitas cifras decimales y no son periódicos, ¿cómo los escribimos? Algunos de ellos, como hemos visto anteriormente, tienen un nombre especial y en otros solo se escribe una cierta cantidad de cifras decimales. Es decir, escribimos una aproximación de esos números, nunca el número completo, ya que no es posible.

El conjunto formado por todos los números racionales y todos los números irracionales se llama **conjunto de los números reales** y se representa por $\mathbb{R}$.

Si ***n*** es un número natural y ***a*** es un número real, la **raíz n-ésima** de ***a*** es un número real ***x*** que verifica que $x^n = a$. Ese número ***x*** se representa por $\sqrt[n]{a}$. Es decir:

$$x = \sqrt[n]{a} \quad es\ equivalente\ a\ decir\ que\ x^n = a$$

- El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama **radical.**
- El número ***n*** se llama **índice.**
- El número ***a*** se llama **radicando**.
- La expresión $\sqrt[n]{a}$ se llama **expresión radical**.

Como $3^3 = 27$, tenemos que $\sqrt[3]{27} = 3$ y decimos que la raíz cúbica de 27 es 3.

$\sqrt{25} = \pm 5$, ya que $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$. $\sqrt{169} = \pm 13$, ya que $(\pm 13)^2 = 169$.

$\sqrt[3]{-64} = -4$, ya que $(-4)^3 = -64$. $\sqrt[3]{125} = 5$, ya que $5^3 = 125$.

Estos números no existen siempre. Así:

- Si ***n*** es par, $\sqrt[n]{a}$ solo existe cuando ***a*** es positivo o es 0.
- Si ***n*** es impar, $\sqrt[n]{a}$ existe siempre, sea cual sea el valor del número ***a***.

Las raíces son las potencias con exponente racional. Es decir, si el exponente es una fracción, entonces esa potencia representa una raíz. El índice de la raíz es el denominador del exponente, el radicando de la raíz es la base de la potencia elevada al numerador del exponente. Es decir:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Por lo tanto:

- $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$.
- $a^{-1/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a}}$, siendo siempre $a \neq 0$.
- $a^{-p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$, siendo también en este caso $a \neq 0$.
- $\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n} = a^1 = a$

Actividades resueltas

Escriba en forma de raíz:

$5^{1/6} = \sqrt[6]{5}$	$3^{-1/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$	$2^{3/5} = \sqrt[5]{2^3}$	$7^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

Actividad propuesta

S12. Exprese en forma de potencia de 5:

$\sqrt{125}$	$\sqrt[3]{25}$	$\dfrac{1}{\sqrt[5]{25}}$	$\sqrt{5}$

2.2.1 Transformaciones de números radicales

- Dos expresiones radicales son semejantes si tienen las mismas raíces.
- Si multiplicamos el índice y el exponente del radicando por el mismo número (distinto de cero), obtendremos un radical semejante al de partida.

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}} \quad siempre\ que\ n \neq 0$$

Así, para simplificar un radical, debemos dividir el índice y el exponente del radicando por el máximo común divisor de ambos números.

Actividades resueltas

Simplifique al máximo los siguientes radicales:

$\sqrt[10]{3^8} = \sqrt[5]{3^4}$ $\uparrow$ $mcd(10,8) = 2$	$\sqrt[24]{5^6} = \sqrt[4]{5}$ $\uparrow$ $mcd(24,6) = 6$

- Para introducir un factor dentro del radical debemos elevar ese número al índice e introducirlo dentro del radical multiplicado por el radicando.

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

Actividad resuelta

Introduzca el factor dentro del radical:

$$2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$$

- A veces es posible factorizar el radicando de tal modo que uno de los factores obtenidos esté elevado al índice de la raíz. En ese caso, ese factor puede ser sacado de la raíz.

Actividad resuelta

Saque fuera del radical todos los factores que sea posible:

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6 \cdot \sqrt{5}$$

- Para sacar fuera del radical un factor debemos dividir el exponente del factor entre el índice de la raíz. El cociente de esa división se pone como exponente del factor fuera de la raíz y el resto de la división se pone como exponente de ese factor dentro de la raíz.

Actividades resueltas

Saque fuera del radical todos los factores que sea posible:

$\sqrt[4]{5^{35}} = 5^8 \cdot \sqrt[4]{5^3}$, porque $35 = 4 \times 8 + 3$.
$\sqrt[3]{5^7 \cdot 2^5} = 5^2 \cdot 2^1 \cdot \sqrt[3]{5^1 \cdot 2^2} = 50 \cdot \sqrt[3]{20}$, porque $7 = 3 \times 2 + 1$ y $5 = 3 \times 1 + 2$.

Actividades propuestas

S13. Simplifique los siguientes radicales:

$\sqrt{a^{12}}$	$\sqrt[3]{8a^3b^6}$	$(25x^8)^{1/2}$	$\sqrt{\dfrac{9a^2}{64b^8c^2}}$

S14. Exprese estos radicales utilizando el radical más simple posible:

$\sqrt{125}$	$\sqrt{128}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{72}$
$\sqrt[3]{864}$	$\sqrt[4]{48}$	$\sqrt[5]{486}$	$\sqrt[3]{1080}$

S15. Exprese en forma de raíz de un número:

$12 \cdot \sqrt{2}$	$2 \cdot \sqrt[3]{3}$	$5 \cdot \sqrt{8}$	$7 \cdot \sqrt{5}$
$2 \cdot \sqrt[5]{7}$	$5 \cdot \sqrt[3]{2}$	$10 \cdot \sqrt[6]{17}$	$\dfrac{2}{3} \cdot \sqrt[4]{2}$

2.2.2 Operaciones con radicales

Radicales semejantes

Dos **expresiones radicales** son **semejantes** si tienen la misma parte radical. Es decir, los radicales semejantes son aquellos que, tras simplificarlos, tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Las expresiones $\sqrt{2}$, $2 \cdot \sqrt{2}$, $-3 \cdot \sqrt{2}$ y $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ son semejantes, ya que la parte radical de todas ellas es $\sqrt{2}$.
Las expresiones $\sqrt{18}$ y $\sqrt{2}$ son semejantes, pues $\sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$ y, por lo tanto, tienen la misma parte radical.
Las expresiones $2 \cdot \sqrt{3}$ y $\sqrt[4]{9}$ son semejantes, pues $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$ y tienen la misma parte radical.
Las expresiones $\sqrt{2}$ y $2 \cdot \sqrt{3}$ no son semejantes.
Las expresiones $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$ tampoco son semejantes.

Suma y resta de radicales

Solo se pueden sumar y restar expresiones radicales semejantes. En este caso, sumamos o restamos los coeficientes y ponemos el mismo radical.

Cuando los términos de una expresión no pueden ser expresados en forma de radicales semejantes, no se pueden sumar ni restar, solo podemos hacer cálculos con la calculadora y obtener una aproximación.

Actividad resuelta

Calcule:

$$3 \cdot \sqrt{8} - 2 \cdot \sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{98} = 3 \cdot \sqrt{2^3} - 2 \cdot \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 5^2} - \sqrt{2 \cdot 7^2} =$$
$$= 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot \sqrt{3} - 7 \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot \sqrt{3} - 7 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Multiplicación y división de radicales con el mismo índice

El producto de radicales con el mismo índice es otro radical con el mismo índice y su radicando es el producto de los radicandos.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

El cociente de radicales con el mismo índice es otro radical con el mismo índice y su radicando es el cociente de los radicandos.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Actividades resueltas

Calcule:

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35}$	$\frac{\sqrt[3]{98}}{\sqrt[3]{28}} = \sqrt[3]{\frac{98}{28}} = \sqrt[3]{\frac{7}{2}}$

Multiplicación y división de radicales con distinto índice

Para multiplicar o dividir expresiones radicales con índices diferentes, en primer lugar debemos poner el mismo índice en todas ellas. Como ya sabemos, si en una expresión radical multiplicamos el índice y el exponente del radicando por el mismo número distinto de cero, obtenemos un radical equivalente.

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}} \quad siempre\ que\ n \neq 0$$

Así, para poner el mismo índice en varias expresiones radicales debemos:

1º. Calcular el mínimo común múltiplo (mcm) de todos los índices. Este es el menor índice común.

2º. Dividir el mínimo común múltiplo, calculado en el paso anterior, entre cada uno de los índices dados y cada cociente es multiplicado por el exponente del radicando correspondiente.

Una vez que los radicales tienen el mismo índice ya podemos multiplicarlos o dividirlos como vimos anteriormente.

Actividades resueltas

Calcule:

$\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{7^4} \underset{(1)}{=} \sqrt[10]{3^{1\times5}} \cdot \sqrt[10]{7^{4\times2}} = \sqrt[10]{3^5} \cdot \sqrt[10]{7^8} = \sqrt[10]{3^5 \cdot 7^8}$	(1) porque mcm (2,5) = 10 y 10 : 2 = 5; 10 : 5 = 2.
$\frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[3]{7^2}} \underset{(1)}{=} \frac{\sqrt[12]{5^{3\times3}}}{\sqrt[12]{7^{2\times4}}} = \frac{\sqrt[12]{5^9}}{\sqrt[12]{7^8}} = \sqrt[12]{\frac{5^9}{7^8}}$	(1) porque mcm (4,3) = 12 y 12 : 4 = 3; 12 : 3 = 4.

Potencia y raíces de un radical

La potencia de una raíz es igual a la raíz de la potencia. Es decir:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$$

La raíz de un radical es otro radical que tiene como índice el producto de los índices y como radicando el mismo que había. Es decir.

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

Actividades resueltas

Calcule:

$\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[3\times4]{7} = \sqrt[12]{7}$

Actividades propuestas

S16. Calcule:

$\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81}$	$5 \cdot \sqrt{x} + 3 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{x}$
$\sqrt{18} + \sqrt{50} + 1 - \sqrt{2} - \sqrt{8} + 3$	$\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$
$2 \cdot \sqrt{8} + 4 \cdot \sqrt{72} - 7 \cdot \sqrt{18}$	$3 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{8} - \sqrt{32} - \sqrt{50}$
$\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{c^2}} \div \sqrt{\frac{ab}{c}}$	$\sqrt[5]{x} \div \sqrt[3]{x}$
$\sqrt{ab} \div \sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[4]{a^3b^5c} \div \sqrt{ab^3c^3}$

Racionalización

El proceso de eliminar las raíces del denominador de una expresión radical se llama **racionalización**. La solución a un ejercicio con raíces se suele dar sin raíces en el denominador, es decir, con la expresión racionalizada.

Para racionalizar una expresión multiplicamos el numerador y el denominador de la expresión por el mismo número, de modo que al hacer las operaciones desaparezcan las raíces del denominador. La elección del número por el que multiplicaremos depende del tipo de expresión que haya en el denominador.

Veremos dos formas de racionalizar una expresión:

- Utilizando la propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Esta forma se utiliza cuando en el denominador aparece un único sumando que contiene alguna raíz, como por ejemplo $\sqrt{3}$ o $2 \cdot \sqrt[3]{5^2}$.

Debemos multiplicar numerador y denominador por una raíz cuyo índice sea el mismo que el de la raíz que tenemos en el denominador, el radicando estará elevado al índice menos el exponente que posee el radicando original.

Actividades resueltas

Racionalice:

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{15}{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{15}{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}\times\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{5}}{2\cdot\sqrt[3]{5^3}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{5}}{2\cdot 5}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{5}}{10}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{5}}{2}$

- Utilizando la igualdad $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$.

Esta forma se utiliza cuando en el denominador aparecen, sumando o restando, una o dos expresiones que contienen raíces cuadradas, como por ejemplo $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ o $3\cdot\sqrt{2}-1$.

En este caso, tenemos que multiplicar numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador. El **conjugado** de la expresión $a+b$ es la expresión $a-b$ y el conjugado de la expresión $a-b$ es $a+b$.

Actividades resueltas

Racionalice:

$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}\times\frac{3\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}\cdot\left(3\sqrt{2}+1\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\frac{3\sqrt{2^2}+\sqrt{2}}{3^2\cdot\sqrt{2^2}-1}=\frac{3\cdot 2+\sqrt{2}}{9\cdot 2-1}=\frac{6+\sqrt{2}}{17}$
$\frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\times\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{9-2}=\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$

Actividades propuestas

S17. Racionalice:

$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$	$\frac{9}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$	$\frac{6}{\sqrt[4]{5}}$
$\frac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$	$\frac{3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$		$\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}}$

2.3 Expresiones algébricas. Polinomios

2.3.1 Terminología básica

Observe la siguiente expresión $P(x) = 2x^5 - x^3 + \frac{2}{3}x - \sqrt{2}$.

- Dicha expresión se llama **polinomio** y está formado por cuatro monomios $2x^5$, $-x^3$, $\frac{2}{3}x$ y $-\sqrt{2}$. Un **polinomio** es la suma o resta de varios monomios.
- La **variable** es *x*. Pueden existir polinomios con dos variables, pero en este módulo estudiaremos polinomios con una sola variable que será *x*.
- Cada monomio tiene un grado que será el exponente de la variable. El **grado de un polinomio** será el mayor de todos los grados de todos los monomios que forman el polinomio. En este caso es 5.
- Los números que acompañan a las variables se llaman **coeficientes**. Así, en el polinomio $P(x) = 2x^5 - x^3 + \frac{2}{3}x - \sqrt{2}$ el coeficiente de grado cinco es 2, el coeficiente de grado tres es -1, el de grado uno es $\frac{2}{3}$ y el de grado cero es $-\sqrt{2}$. Observe que en este polinomio no aparecen monomios de grado cuatro ni de grado dos. Esto es porque los coeficientes de esos grados son 0.
- Se llama **coeficiente principal** de un polinomio el coeficiente del monomio de mayor grado.
- Se llama **término independiente** el coeficiente del monomio de grado cero.
- Cuando trabajamos con polinomios con una sola variable, se llaman **monomios semejantes** los que tienen el mismo grado.

2.3.2 Valor numérico de un polinomio

Se llama **valor numérico de un polinomio** $P(x)$ para *x* igual a un número el valor que se obtiene al sustituir la variable por dicho número y efectuar las operaciones.

El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$ se representa por $P(a)$.

Actividad resuelta

Calcular el valor numérico del polinomio $P(x) = x^5 - 4x^3 + 5x^2 + 8x - 9$ para $x = 2$.

Lo que hacemos es sustituir en el polinomio la variable x por el valor 2.

$$P(2) = 2^5 - 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 9 = 32 - 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - 9$$
$$= 32 - 32 + 20 + 16 - 9 = 27$$

Actividades propuestas

S18. Calcule el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ para:

$x = 0$	$x = 1$	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$
$x = \frac{-2}{3}$	$x = \sqrt{2}$	$x = -\sqrt{3}$	$x = 3\sqrt{2}$

2.3.3 Operaciones con polinomios: suma, resta, multiplicación y división

Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar polinomios, se suman o se restan los monomios semejantes y se deja indicada la suma o resta de los monomios que no lo son.

Actividad resuelta

Dados los polinomios $P(x) = 2x^5 - x^3 + 2x - 1$ y $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 3$, calcule los polinomios $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$

$P(x) + Q(x) = (2x^5 - x^3 + 2x - 1) + (2x^3 - x^2 - 2x - 3) = 2x^5 - x^3 + 2x^3 - x^2 + 2x - 2x - 1 - 3 =$ $= 2x^5 + (-1 + 2)x^3 - x^2 + (2 - 2)x + (-1 - 3) = 2x^5 + x^3 - x^2 - 4.$
$P(x) - Q(x) = (2x^5 - x^3 + 2x - 1) - (2x^3 - x^2 - 2x - 3) = 2x^5 - x^3 - 2x^3 + x^2 + 2x + 2x - 1 + 3 =$ $= 2x^5 + (-1 - 2)x^3 + x^2 + (2 + 2)x + (-1 + 3) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 + 4x + 2.$

Multiplicación de polinomios

Para calcular el producto de dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios de otro factor y después se suman los polinomios obtenidos. Es conveniente tener en cuenta lo siguiente:

- Colocamos los polinomios uno debajo de otro.
- Se empieza a multiplicar por la izquierda y se multiplica el primer monomio del segundo polinomio por todos los monomios del primer polinomio.
- Los coeficientes (números) se multiplican y las partes literales se multiplican sumando los exponentes.
- Se continúa multiplicando los demás monomios del segundo polinomio por todos los monomios del primero.
- Se suman los polinomios resultantes.

Actividad resuelta

Dados los polinomios $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$ y $Q(x) = 2x^2 - x - 3$, calcule el polinomio $\mathrm{P(x) \cdot Q(x)}$

$$
\begin{array}{rcl}
3x^2 + 2x - 1 & & \\
2x^2 - x - 3 & & \\
\hline
+6x^4 + 4x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & \leftarrow & 2x^2 \cdot (3x^2 + 2x - 1) \\
-3x^3 - 2x^2 + x \qquad & \leftarrow & (-x) \cdot (3x^2 + 2x - 1) \\
-9x^2 - 6x + 3 & \leftarrow & (-3) \cdot (3x^2 + 2x - 1) \\
\hline
6x^4 + x^3 - 13x^2 - 5x + 3 & &
\end{array}
$$

Otra forma de hacerlo es:

$$
\begin{aligned}
P(x) \cdot Q(x) = (3x^2 + 2x - 1) \cdot (2x^2 - x - 3) &= (3x^2) \cdot (2x^2) + (3x^2) \cdot (-x) + (3x^2) \cdot (-3) + \\
&+ (2x) \cdot (2x^2) + (2x) \cdot (-x) + (2x) \cdot (-3) + \\
&+ (-1) \cdot (2x^2) + (-1) \cdot (-x) + (-1) \cdot (-3) = \\
&= 6x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 4x^3 - 2x^2 - 6x - 2x^2 + x + 3 = \\
&= 6x^4 + x^3 - 13x^2 - 5x + 3.
\end{aligned}
$$

División de polinomios

Para dividir dos polinomios, se procede del siguiente modo:

1º. Se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor y obtenemos el primer término del cociente.

2º. Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y se le resta al dividendo. De este modo, el término de mayor grado del dividendo desaparece y obtenemos el primer resto de la división.

3º. Si el grado del primer resto de la división no es menor que el grado del divisor, se divide el término de mayor grado del primer resto entre el término de mayor grado del divisor y obtenemos el segundo término del cociente.

4º. Se multiplica el segundo término del cociente por el divisor y se le resta al primer resto. De este modo, el término de mayor grado del primer resto desaparece y obtenemos el segundo resto de la división.

5º. Se reitera este procedimiento hasta obtener un resto con grado menor que el grado del divisor, momento en el que acaba la división.

Actividad resuelta

Dados los polinomios $P(x) = 3x^5 - 4x^3 + x^2 + 2x - 1$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 3$, calcule el cociente y el resto de la división $P(x): Q(x)$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5 \qquad\quad - 4x^3 + x^2 + 2x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-3x^5 + 6x^4 - 9x^3 \qquad\qquad\qquad & 3x^3 + 6x^2 - x - 19 \\ \cline{1-1}
6x^4 - 13x^3 + x^2 + 2x - 1 & \\
-6x^4 + 12x^3 - 18x^2 \qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
- x^3 - 17x^2 + 2x - 1 & \\
x^3 - 2x^2 + 3x \qquad & \\ \cline{1-1}
-19x^2 + 5x - 1 & \\
+19x^2 - 38x + 57 & \\ \cline{1-1}
-33x + 56 &
\end{array}
$$

Por lo tanto, el cociente es $3x^3 + 6x^2 - x - 19$ y el resto es $-33x + 56$.

Actividades propuestas

S19. Calcule $(3x^4 + 5x^3 + 6x - 9) + (2x^3 - 5x^2 - 7x + 5)$.

S20. Dados los polinomios $P(x) = 5x^4 - 7x^3 + 5x - 1$, $Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ y $R(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 2x + 3$, calcule:

$P(x) - R(x)$	$P(x) - Q(x)$	$2P(x) - 3R(x)$	$2Q(x) - 4R(x)$

S21. Calcule:

$(2x^3 - x^2 - 3) \cdot (2x^2 + 4x - 3)$	$(3x - 5) \cdot (x - 3) - 2 \cdot (x^2 - x)$

S22. Calcule el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

$(6x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 5): (2x^2 - 5x + 3)$	$(2x^5 - 20x): (2x + 2)$
$(x^4 - 5x^2 + 4): (x^2 - 4)$	$(x^4 - 2x^3 + 15x - 4): (x - 1)$

2.3.4 Potencia de un polinomio

Si *n* representa un número natural cualquiera, la potencia $P(x)^n$, siendo $P(x)$ un polinomio, se calcula multiplicando *n* veces el polinomio $P(x)$ por sí mismo.

Actividad resuelta

Calcule $(x^2 + 2x + 3)^2$

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x + 3)^2 &= (x^2 + 2x + 3) \cdot (x^2 + 2x + 3)\\ &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3x^2 + 6x + 9\\ &= x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

Potencia de un binomio

Un binomio es un polinomio que tan solo tiene dos coeficientes distintos de cero, es decir, un binomio es un polinomio formado por dos monomios.

El triángulo de Pascal es un triángulo infinito de números donde cada número del triángulo se obtiene como suma de los números que tiene por encima de él. El triángulo de Pascal es:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . . . .

Observe que cada uno de los números es la suma de los que tiene encima.

El triángulo de Pascal es muy útil para calcular la potencia de un binomio sin tener que multiplicar el binomio por sí mismo tantas veces como indica el exponente.

Así, para calcular $(a + b)^n$ tenemos que hacer lo siguiente:

1º. Esta expresión va a tener *n*+1 sumandos.

2º. Cada sumando está compuesto por tres elementos: un número, una potencia de *a* (el primer monomio) y una potencia de *b* (el segundo monomio).

Actividad resuelta

Calcule $(a+b)^5$

Vamos al triángulo de Pascal. Como el exponente es 5, cogeremos los números de la fila que tiene un 5 en segundo lugar. Esos números son: 1 5 10 10 5 1   Cogemos también las potencias del primer sumando del binomio en orden decreciente. Es decir: $a^5 \quad a^4 \quad a^3 \quad a^2 \quad a^1 \quad a^0$ Cogemos también las potencias del primer sumando del binomio en orden creciente. Es decir: $b^0 \quad b^1 \quad b^2 \quad b^3 \quad b^4 \quad b^5$ Y ahora juntamos, en el orden en el que están, un elemento de cada fila y así obtenemos el resultado. Es decir: $(a+b)^n = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$ Y ahora hacemos las cuentas: $(a+b)^n = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$

Se procede de este modo con todas las potencias de los binomios. Esta expresión recibe el nombre de **binomio de Newton**.

Actividades resueltas

Calcule las siguientes potencias

$(x+2)^4 = 1x^4 2^0 + 4x^3 2^1 + 6x^2 2^2 + 4x^1 2^3 + 1x^0 2^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$
$(x-2)^4 = \left(x+(-2)\right)^4 = 1x^4(-2)^0 + 4x^3(-2)^1 + 6x^2(-2)^2 + 4x^1(-2)^3 + 1x^0(-2)^4 =$ $= x^4 + 4x^3(-2) + 6x^2(+4) + 4x(-8) + 16 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16.$
$\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1\cdot 1^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^0 + 2\cdot 1^1 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^1 + 1\cdot 1^0 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}.$

Actividades propuestas

S23. Calcule:

$(1+x)^3$	$(1+2x)^5$	$(1-2x)^3$
$\left(1+\sqrt{2}\right)^4$	$\left(1+2\sqrt{3}\right)^3$	$\left(2\sqrt{2}-1\right)^4$

2.3.5 Igualdades notables

Llamamos **igualdades notables** o **productos notables** a ciertos productos de binomios que debemos conocer, pues abrevian los cálculos con expresiones algébricas. Son las siguientes:

- **Cuadrado de una suma:** el cuadrado de una suma de dos sumandos es igual al cuadrado del primer sumando, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo sumando.

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- **Cuadrado de una diferencia:** el cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

- **Suma por diferencia:** una suma de monomios multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados. Ya lo utilizamos cuando racionalizamos (apartado 2.2.2).

$$\boldsymbol{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$$

Actividades resueltas

Calcule:

$(3x+1)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + (1)^2 = 9x^2 + 6x + 1.$
$(2a-b)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot b + (b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2.$
$(4-5x)\cdot(4+5x) = 4^2 - (5x)^2 = 16 - 25x^2.$

Actividades propuestas

S24. Calcule:

$(3a+2b)^2$	$(2x-y)^2$	$(x+6)\cdot(x-6)$
$\left(2\sqrt{2}+3\right)^2$	$\left(2-3\sqrt{2}\right)^2$	$\left(\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-5\sqrt{3}\right)$

2.4 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

2.4.1 Resolución de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

Una ecuación es de segundo grado si, después de reducirla, cumple estas condiciones:

- Alguno de sus términos es un monomio de segundo grado.
- No contiene términos de grado superior a dos.

Toda ecuación de segundo grado con una incógnita se puede expresar de la siguiente **forma general:**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde *a*, *b* y *c* son números reales conocidos (coeficientes) con $a \neq 0$.

Una ecuación de segundo grado puede tener dos soluciones distintas, una solución doble o no tener solución.

Actividad resuelta

Indique los valores de los coeficientes de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

Ecuación $\rightarrow 5x^2 = 45$ Forma general $\rightarrow 5x^2 + 0x - 45 = 0$ Coeficientes $\rightarrow a = 5\,, b = 0,\ c = -45$	Ecuación $\rightarrow (x-3)\cdot(x-2) = 0$ Forma general $\rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ Coeficientes $\rightarrow a = 1\,, b = -5,\ c = 6$

Una **ecuación de segundo grado completa** es aquella que tiene todos los coeficientes distintos de cero. Si alguno de los coeficientes vale cero (recuerde que siempre el coeficiente de segundo grado *a* es distinto de cero), la ecuación se llama **incompleta**.

Las soluciones de la ecuación de segundo grado vienen dadas por la expresión (que no deducimos):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo ± delante de la raíz cuadrada quiere decir que en general hay dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta expresión sirve para resolver todas las ecuaciones de segundo grado, tanto las completas como las incompletas. Las incompletas también tienen otros métodos de resolución que veremos posteriormente.

Actividad resuelta

Resuelva la ecuación de segundo grado: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$a = 1,\ \ b = -6,\ \ c = 8$, por lo tanto:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ \dfrac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

Y las soluciones son $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$.

Podemos comprobar que los valores obtenidos son soluciones de la ecuación de partida, sustituyendo en la ecuación x por 2 y por 4 y viendo que al hacer las cuentas obtenemos como resultado cero.

Sustituimos x por 4 en la expresión $x^2 - 6x + 8$ y obtenemos $4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 16 - 24 + 8 = 0$.

Sustituimos x por 2 en la expresión $x^2 - 6x + 8$ y obtenemos $2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$.

En ambos casos obtenemos como resultado cero, por lo que ambos números son soluciones de la ecuación dada.

Actividades propuestas

S25. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:

$x^2 - 5x + 6 = 0$	$2x^2 - 12x + 10 = 0$	$4x^2 + 4x - 3 = 0$	$x^2 + 9x - 10 = 0$

2.4.2 Número de soluciones de una ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado puede tener dos soluciones, una o ninguna; eso depende del valor del **discriminante** de la ecuación. El discriminante de una ecuación de segundo grado se representa por Δ y es igual a la expresión $b^2 - 4ac$ que es el radicando de la raíz cuadrada de la fórmula que nos da la solución de las ecuaciones de segundo grado. Es decir, el discriminante es:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si el discriminante es positivo, $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones distintas.
- Si el discriminante vale cero, $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución (o dos de igual valor, que viene siendo lo mismo).
- Si el discriminante es negativo, $\Delta < 0$, la ecuación no tiene solución pues la raíz cuadrada de la fórmula de la solución no se puede calcular.

Actividad resuelta

Indique, sin resolverlas, el número de soluciones que tiene cada una de las siguientes ecuaciones de segundo grado

$x^2+3x+10=0$. Como $\Delta = b^2-4ac=3^2-4\cdot 1\cdot 10=9-40=-31<0$, la ecuación no tiene solución.
$2x^2+12x+18=0$. Como $\Delta = b^2-4ac=12^2-4\cdot 2\cdot 18=144-144=0$, la ecuación tiene una única solución.
$3x^2+3x-36=0$. Como $\Delta = b^2-4ac=3^2-4\cdot 3\cdot(-36)=9+432=441>0$, la ecuación tiene dos soluciones distintas.

Actividades propuestas

S26. Determine, con la ayuda del discriminante, cuántas soluciones tiene cada ecuación:

$3x^2-6x+3=0$	$x^2+x-3=0$	$x^2+x+3=0$	$-x^2-2x-3=0$

2.4.3 Ecuaciones de segundo grado incompletas

Son las ecuaciones en las que los coeficientes *b* o *c* valen 0.

Ecuaciones de tipo $ax^2+c=0$

Es el caso en el que $b=0$. El método más sencillo de resolución es despejar la incógnita *x*:

$$ax^2+c=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=\frac{-c}{a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el valor de $\frac{-c}{a}$ es positivo, existirá la raíz y, por lo tanto, la ecuación tendrá dos soluciones; pero si el valor de $\frac{-c}{a}$ es negativo, la raíz no existe y la ecuación no tendrá ninguna solución real.

Actividades resueltas

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$2x^2-32=0 \Rightarrow 2x^2=32 \Rightarrow x^2=\frac{32}{2}=16 \Rightarrow x=\pm\sqrt{16} \Rightarrow x=\pm 4$. Así, las soluciones son 4 y -4.
$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$, que no existe, por lo que la ecuación no tiene solución.

Ecuaciones de tipo $ax^2 + bx = 0$

Es el caso en el que $c = 0$. Lo más sencillo es sacar factor común *x*:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x \cdot (ax + b) = 0$$

Tenemos la multiplicación de dos factores, x y $ax + b$, y el resultado es cero. La única forma de que, multiplicando dos factores, el resultado sea cero es que uno de ellos, o los dos, sean cero:

$$x \cdot (ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Vemos que este tipo de ecuaciones incompletas tiene dos soluciones $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$.

Actividad resuelta

Resuelva la siguiente ecuación de segundo grado:

$$5x^2 - 125x = 0 \Rightarrow x \cdot (5x - 125) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x - 125 = 0 \Rightarrow 5x = 125 \Rightarrow x = 25 \end{cases}$$ Así, las soluciones son 0 y 25.

Actividades propuestas

S27. Resuelva las ecuaciones incompletas siguientes:

$3x^2 - 27 = 0$	$-2x^2 + 50x = 0$	$13x^2 + 52x = 0$	$x^2 + x = 0$
$\frac{3}{2}x^2 + 15 = 0$	$\frac{1}{3}x^2 - \frac{25}{3} = 0$	$x^2 - \frac{9}{4} = 0$	

2.4.4 Resolución de problemas utilizando ecuaciones de segundo grado

En este apartado veremos cómo resolver problemas mediante ecuaciones de segundo grado. La principal dificultad para hacer esto la encontramos a la hora de traducir el lenguaje habitual al lenguaje matemático y llegar a una ecuación de segundo grado. No es fácil y cada problema es diferente. Para mostrar cómo se hace pondremos varios ejemplos.

- El producto de un número natural y su siguiente es 272. ¿Cuál es ese número?
  - Solución: sea x el número buscado. Entonces la ecuación que nos propone este problema es $x \cdot (x+1) = 272$. Haciendo las operaciones tenemos:

$$x \cdot (x+1) = 272 \Rightarrow x^2 + x - 272 = 0$$

Resolviendo:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-272)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1088}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{-1 \pm 33}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+33}{2} = 16 \\ \dfrac{-1-33}{2} = -17 \end{cases}$$

El número natural buscado es 16. La solución $x = -17$ es de un número entero.

- En un cuadrado el área es igual al doble del perímetro. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?
  - Solución: sea x la longitud del lado del cuadrado.

    Área del cuadrado = x^2; perímetro del cuadrado = $x + x + x + x = 4x$

    Condición del problema: área = 2 · perímetro

$$x^2 = 2 \cdot 4x \Rightarrow x^2 = 8x \Rightarrow x^2 - 8x = 0$$

Resolvamos la ecuación:

$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \end{cases}$$

El lado del cuadrado mide 8 unidades.

- Un almacén compró un lote de cajas y pagó por todas ellas 300 euros. Con el mismo dinero podría comprar diez cajas más si cada una costase 5 euros menos. ¿Cuántas cajas compró?
  - Solución: sea *x* el número de cajas. El precio de cada caja es $\frac{300}{x}$.

    Condición del problema:

$$300 = (x+10) \cdot \left(\frac{300}{x} - 5\right)$$

Haciendo las operaciones:

$$300 = x \cdot \frac{300}{x} - 5x + 10 \cdot \frac{300}{x} - 50 \Rightarrow 300 = 300 - 5x + \frac{3000}{x} - 50 \Rightarrow 300 - 300 + 50 = \frac{3000}{x} - 5x \Rightarrow 50 = \frac{3000 - 5x^2}{x} \Rightarrow 50x = 3000 - 5x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 50x - 3000 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x - 600 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-600)}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 2400}}{2} == \frac{-10 \pm \sqrt{2500}}{2} = \frac{-10 \pm 50}{2} = \begin{cases} \dfrac{-10 + 50}{2} = 20 \\ \dfrac{-10 - 50}{2} = -30 \end{cases}$$

Compró 20 cajas a $\frac{300}{x} = \frac{300}{20} = 15$€ cada una.

Actividades propuestas

S28. Reparta el número 10 en dos sumandos de modo que la suma de sus cuadrados sea 50.

S29. Si al triple de un número se le suma su cuadrado, se obtiene 88. ¿Cuál es el número?

S30. Halle la edad de una persona sabiendo que, si a su cuadrado se le resta el triple de la edad, resulta nueve veces esta.

S31. Un rectángulo tiene 24 m de perímetro y 35 m^2 de área. Halle las dimensiones del rectángulo.

S32. Determine el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles cuya área es 12 m^2.

S33. Un campo de fútbol mide 30 m más de largo que de ancho; su área es de 7000 m^2. ¿Cuánto miden los lados del campo?

S34. Dos números se diferencian en siete unidades y su producto es 60. ¿Cuáles son esos números?

2.5 Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

¿Qué son los sistemas de ecuaciones lineales?

Una **ecuación lineal** es una ecuación de grado uno respecto de todas las incógnitas y, entre ellas, no hay productos ni divisiones. Así,

$3x + 2y - 8 = 0$ es una ecuación lineal.

$3x^2 - 2y - 5 = 0$ no es una ecuación lineal.

$3xy + 8y = 8$ tampoco es una ecuación lineal.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene como forma general:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

donde *x* e *y* son las incógnitas, y *a, b, c, a', b'* y *c'* son los coeficientes y términos independientes (números normalmente).

Resolver un sistema de ecuaciones lineales consiste en encontrar los valores de las incógnitas que hacen ciertas las dos ecuaciones simultáneamente. Por ejemplo $x = 1$ e $y = 2$ es una solución del sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$, pues, al sustituir las incógnitas por estos valores, las dos igualdades son ciertas $\begin{cases} 1 + 2 = 3 \\ 1 - 2 = -1 \end{cases}$.

La mayoría de las veces los sistemas de ecuaciones tienen una única solución (un valor para cada incógnita), pero puede ocurrir también que el sistema no tenga ninguna solución o que tenga infinitas.

2.5.1 Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Hay cuatro métodos (o técnicas) de resolución de un sistema: sustitución, igualación, reducción y representación gráfica.

Método de sustitución

Consiste en despejar una incógnita en una ecuación y sustituir su valor en la otra ecuación.

Actividad resuelta

Resuelva por el método de sustitución el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

La incógnita más fácil de despejar es y en la primera ecuación y obtenemos que $y = 4 - 2x$.

Ahora sustituimos en la segunda ecuación y tenemos que:

$$3x - 4 \cdot (4 - 2x) = -5 \Rightarrow 3x - 16 + 8x = -5 \Rightarrow 11x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{11} = 1$$

Ahora sustituimos en la expresión $y = 4 - 2x$ el valor de x obtenido y tenemos que $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

Así, la solución del sistema es $x = 1, y = 2$.

Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas.

Actividad resuelta

Resuelva por el método de igualación el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x \\ 3x - 4y = -5 \Rightarrow y = \dfrac{3x + 5}{4} \end{cases}$$

Ahora igualamos estas dos expresiones:

$$4 - 2x = \frac{3x + 5}{4}$$

Ahora eliminamos denominadores y resolvemos la ecuación:

$$4 - 2x = \frac{3x + 5}{4} \Rightarrow 4 \cdot (4 - 2x) = 3x + 5 \Rightarrow 16 - 8x = 3x + 5 \Rightarrow -11x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{-11} = 1$$

Ahora sustituimos en cualquiera de las dos expresión obtenidas al principio, por ejemplo la primera, el valor de x obtenido y tenemos que $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

Así, la solución del sistema es $x = 1, y = 2$.

Método de reducción

Consiste en multiplicar cada ecuación por un número (habitualmente distinto para cada ecuación) de modo que los coeficientes de una de las incógnitas tengan valores opuestos en las dos ecuaciones. Posteriormente, se suman las ecuaciones y resolvemos el sistema.

Actividad resuelta

Resuelva por el método de reducción el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

En primer lugar debemos decidir cuál es la incógnita que queremos eliminar. En este caso vamos a eliminar la incógnita x.

Para hacerlo tenemos que tener como coeficientes de x números opuestos. Para eso multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por -2 y obtenemos:

$$\begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ -6x + 8y = 10 \end{cases}$$

Ahora sumamos las ecuaciones y obtenemos:

$$11y = 22 \Rightarrow y = \frac{22}{11} = 2.$$

Ahora sustituimos en cualquier de las ecuaciones originales del sistema y calculamos x:

$$2x + 2 = 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$$

Así, la solución del sistema es $x = 1,\ y = 2.$

Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones. Interpretación de la solución

Los métodos de sustitución, igualación y reducción son métodos algébricos y son los que usamos habitualmente. Pero hay un cuarto modo para resolver un sistema de ecuaciones lineales (a veces menos preciso): el método gráfico.

Si en cada ecuación del sistema despejamos *y*, obtendremos dos funciones lineales. La representación gráfica de esas funciones son dos líneas rectas que se cortarán en un punto. Las coordenadas de este punto son los valores de *x* e *y* de la solución del sistema, ya que en ese punto los valores de *x* e *y* satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

Actividad resuelta

Resuelva por el método gráfico el siguiente sistema de ecuaciones

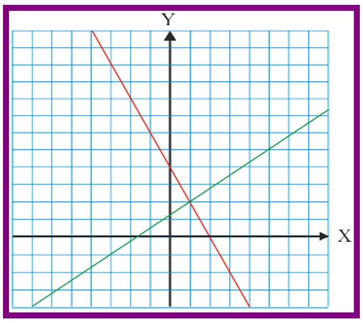
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

En primer lugar despejamos y en las dos ecuaciones y obtenemos:

$$y = 4 - 2x \ \text{ y } \ y = \frac{3x+5}{4}$$

Ahora hacemos las tablas de valores x, y para las dos funciones lineales obtenidas y las representamos:

$y = 4 - 2x$		$y = \dfrac{3x+5}{4}$	
x	y	x	y
0	4	-3	-1
1	2	1	2



El punto de corte de las rectas es el (1,2), así, la solución del sistema es $x = 1,\ y = 2.$

Actividades propuestas

S35. Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes por los tres métodos indicados: sustitución, igualación y reducción.

$\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y=-7 \\ x+2y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=6 \\ x-2y=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y=10 \\ 4x+7y=20 \end{cases}$

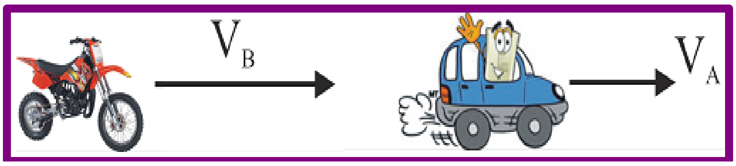
S36. Calcule gráficamente la solución de los sistemas:

$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=2 \\ 3x-3y=1 \end{cases}$

2.5.2 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Actividades resueltas

Actividad 1. Un coche está en la posición inicial s_o = 300 m y se mueve a 20 m/s. Un motorista está inicialmente en la posición 10 m y persigue al coche con una velocidad de 25 m/s. ¿Dónde y cuándo lo alcanza?



Datos del coche (A): $s_o = 300$, $v_a = 20$. Datos de la moto (B): $s_o = 10$, $v_b = 25$.

Aplicamos la ecuación de la posición del movimiento uniforme ($s = s_o + v \cdot t$) a los dos móviles:

$s_a = 300 + 20 \cdot t$

$s_b = 10 + 25 \cdot t$

En el momento del alcance, los dos móviles están en la misma posición, por lo tanto la condición será $s_a = s_b$. Reuniendo todas las ecuaciones, tenemos tres incógnitas (s_a, s_b, t) y tres ecuaciones: esto es, un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} s_a = 300 + 20 \cdot t \\ s_b = 10 + 25 \cdot t \\ s_a = s_b \end{cases}$$

Despejamos s_a en la tercera ecuación (de hecho ya está despejada) y sustituimos su valor en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} s_b = 300 + 20 \cdot t \\ s_b = 10 + 25 \cdot t \end{cases}$$

Igualamos ambas ecuaciones:

$300 + 20t = 10 + 25t \Rightarrow -5t = -290 \Rightarrow x = \frac{-290}{-5} = 58$ segundos

Para el cálculo del espacio: $s_b = 10 + 25 \cdot t \Rightarrow s_b = 10 + 25 \cdot 58 = 1460$ metros.

Actividad 2. En un examen hay diez preguntas. Por cada una bien contestada me dan dos puntos y por cada pregunta mal contestada me quitan un punto. En el examen he obtenido un 8. ¿Cuántas preguntas he fallado?

> Preguntas acertadas = x; preguntas falladas = y.
> Las condiciones del problema se resumen en las ecuaciones siguientes:
> $x + y = 10$ (preguntas)
> $2x - y = 8$ (puntos)
> Resolviendo el sistema, la solución es: $x = 6,\ y = 4$. He fallado cuatro preguntas.

Actividad 3. Calcule dos números sabiendo que se diferencian en 14 unidades y que su media aritmética es 25.

> Sean x e y los números que nos piden. Las condiciones del problema son:
>
> Diferencia en 14 unidades: $x - y = 14$
>
> Media aritmética: $\frac{x+y}{2} = 25$
>
> La solución del sistema es $x = 32, y = 18$

Actividad 4. La edad de Antía es el doble que la de Xiana. Si Antía tuviese 12 años menos y Xiana 8 años más, las dos tendrían la misma edad. ¿Cuántos años tiene cada una?

> Edad de Antía = x; edad de Xiana = y
>
> Condiciones del problema: Edad doble: $x = 2y$
>
> Otra condición: $x - 12 = y + 8$
>
> La solución del sistema es $x = 40$ años, $y = 20$ años

Actividades propuestas

S37. Halle dos números que sumen 84 y cuyo cociente sea 6.

S38. En un corral con gallinas y conejos hay 50 cabezas y 134 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay?

S39. Tenemos dos tipos de piensos, uno de 0,50 euros el kilogramo y otro de 0,80 euros el kilogramo. ¿Qué cantidad de cada tipo debemos mezclar para tener 100 kg de pienso a 0,704 euros cada kilogramo?

S40. Una persona recorre 1000 km, parte en coche y parte en bicicleta. En el coche va a 90 km/h y en la bicicleta a 20 km/h. Ha tardado 15 horas en completar el viaje. ¿Cuántos kilómetros ha hecho en bicicleta?

S41. Un hotel tiene habitaciones dobles e individuales, en total son 120 habitaciones. El número de camas es 195. ¿Cuántas de las habitaciones son dobles?

S42. En una fiesta, si cada invitado come cinco pasteles, entonces sobran tres, y si come seis, falta uno. ¿Cuántos invitados y cuántos pasteles hay en la fiesta?

3. Actividades finales

S43. Indique, sin calcularlos y razonando la respuesta, si los números decimales equivalentes a las siguientes fracciones son decimales exactos o periódicos.

$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{11}{12}$

S44. ¿Cuántas cifras periódicas tiene el número decimal equivalente a $\frac{1}{7}$?

S45. Teniendo en cuenta la forma en la que se hace una división obteniendo un divisor con cifras decimales, para calcular el número decimal equivalente a una fracción del tipo $\frac{1}{m}$, (como por ejemplo la de la actividad anterior):

¿Cuándo el número decimal tiene que ser periódico?
¿Por qué el número máximo de cifras periódicas tiene que ser menor que *m*?

S46. Calcule:

$\frac{x^2 \cdot x^{-4}}{x^{-3}}$	$x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$	$(x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-7}$
$\frac{(-2)^0 \cdot (-2)^{-2}}{2^4 \cdot (-2)^{-3}}$	$\frac{2^7 \cdot 4^{-2}}{8^2 \cdot 2^5}$	$\left(\frac{\left(3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{9}\right)^{-1}}\right)^{-1}$

S47. Calcule:

$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) : \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right)\right] - \frac{6}{5}$	$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right)$
$\left(7 : \left(1 - \frac{2}{9}\right) - 5\right) : 4$	$\frac{9}{5} + \frac{6}{7} - 2$
$\frac{7}{12} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)\right]$	$\left(2 - \frac{5}{4}\right) - \left[1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)\right]$
$\frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{10} - \frac{1}{2}\right)$	$\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3}$
$\frac{3}{4} + \left(\frac{9}{2} - \frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{2} - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)$
$\left(2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{5}\right)$	$\left(\frac{4}{9} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} : 2\right)$
$\left(2 - \frac{1}{5} - \frac{4}{15}\right) : \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{3} + \frac{-2}{9}\right)$	$\left(\frac{9}{2} - \frac{7}{6}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{-8}{5}\right) + \frac{1}{2}$

S48. Resuelva las ecuaciones:

$10^{3x-2} = 10\,000$	$10^{5x+8} = 0{,}01$	$10^{3x-7} = 100\,000\,000$

S49. Use la calculadora para hacer el producto de $12\,345\,678 \cdot 87\,654\,321$. ¿Qué significa el resultado que aparece en la calculadora? ¿Es exacto ese resultado? Razone la respuesta.

S50. Efectúe las siguientes operaciones dejando el resultado en notación científica.

$0{,}0003 \cdot 32\,100\,000$	$0{,}0003 \cdot 32\,100\,000 + 456 \cdot 10^7$
$(0{,}0003 \cdot 32\,100\,000 + 456 \cdot 10^7) : (876\,000 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}67 \cdot 10^7)$	

S51. Exprese en forma de raíz:

$2^{-2/3}$	$5^{3/4}$	$7^{-1/2}$
$3^{1/6}$	$7^{6/5}$	$(-5)^{-3/4}$

S52. Simplifique los siguientes radicales:

$\sqrt[5]{32}$	$\sqrt[3]{3375}$	$\sqrt[4]{\dfrac{81x^4y^{20}}{16z^8}}$	$\sqrt[3]{\dfrac{x^{-2}y^8z^2}{x^4y^{-4}z^5}}$

S53. Exprese estos radicales utilizando el radical más simple posible:

$\sqrt{12x^3}$	$\sqrt[3]{168}$	$\sqrt{98}$	$\sqrt{350}$
$\sqrt[4]{243}$	$\sqrt{512}$	$\sqrt[5]{900\,000}$	$\sqrt[6]{8\,000\,000}$

S54. Exprese en forma de raíz de un número:

$3 \cdot \sqrt{7}$	$5 \cdot \sqrt[4]{2}$	$7 \cdot \sqrt{10}$	$3 \cdot \sqrt{13}$
$x \cdot \sqrt[5]{y}$	$2 \cdot \sqrt[3]{6}$	$\dfrac{2}{\sqrt[6]{17}}$	$\dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[4]{2}}$

S55. Calcule:

$(2 + 3 \cdot \sqrt{2})^2$	$\sqrt{180} - 2 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{20}$
$7 \cdot \sqrt{50} - 3 \cdot \sqrt{18} + \sqrt{24} - \dfrac{3}{2}\sqrt{8} - \sqrt{6}$	$\sqrt{3} + \dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} - \dfrac{5 \cdot \sqrt{3}}{3}$
$\sqrt{\dfrac{a^4b}{c^5}} - \sqrt{\dfrac{4a^2b}{c^3}} + \sqrt{\dfrac{b}{c}}$	$\dfrac{a+1}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{9}{a^2 + 2a + 1}}$
$\sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}$	$\dfrac{\sqrt[5]{abc} \cdot \sqrt[10]{a^2b^4}}{\sqrt[15]{a^4b^6c^3}}$

S56. Calcule *x*:

$\sqrt{8}+\sqrt{50}-x=4\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{x}+\sqrt{8}-\sqrt[3]{5}=3\cdot\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}$

S57. Racionalice:

$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{5}{\sqrt[4]{5^7}}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}$	$\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$
$\frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

S58. Calcule:

$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{8}+\sqrt[4]{64}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{1-2\sqrt{3}}-8\sqrt{12}$
$\sqrt{18}-3\sqrt{8}+3\sqrt{50}+\sqrt{27}+\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\sqrt[4]{4}+\sqrt{8}-\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{64}+\sqrt{\frac{9}{2}}$

S59. Dados los polinomios $P(x)=5x^4-7x^3+5x-1$, $Q(x)=4x^3-3x^2+3x+6$, $R(x)=2x^4-5x^3-6x^2+2x+3$, $S(x)=x^2+x+1$ y $T(x)=2x-3$; calcule:

$P(x)+Q(x)\cdot T(x)$	$(P(x)+R(x))\cdot T(x)$	$3P(x)-2S(x)T(x)$
$R(x):S(x)$	$(2P(x)+Q(x)):S(x)$	$P(x):(S(x)-T(x))$

S60. Calcule:

$(2+x)^4$	$(1-x)^4$	$(2-x)^5$
$(\sqrt{3}+1)^7$	$(\sqrt{5}-x)^5$	$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$

S61. Calcule:

$(2+x)^2$	$(1-x)^2$	$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})$
$(\sqrt{3}+1)^2$	$(\sqrt{5}-2)^2$	$(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$

S62. Resuelva las ecuaciones:

$x^2-6x+7=-2$	$21x^2+100=-5$
$x^2-3x+2=0$	$x\cdot(2x-1)+\frac{3}{5}=\frac{3x^2-x}{5}+\frac{1}{5}$
$2x^2-6x=6x^2-8x$	$2x-\frac{6x^2-2x+1}{6}+\frac{2x^2-3x}{2}=-1$

S63. Para embaldosar un salón de 8 m de longitud por 6 m de anchura se han utilizado 300 baldosas cuadradas. ¿Cuánto mide el lado de las baldosas?

S64. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Calcule sus dimensiones si un lado mide 2 cm menos que el otro.

S65. Dentro de 12 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 12 años. ¿Cuál es la edad actual de Pedro?

S66. Resuelva los sistemas de ecuaciones.

$\begin{cases} 2x-5y-9=0 \\ 7x+4y-10=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5y=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} -x+11y=12 \\ x-3y=-6 \end{cases}$
$\begin{cases} x+2y=11 \\ 2x-y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x-(y+1)=3 \\ y+(x+3)=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 10(x-2)+y=1 \\ x+3(x-y)=5 \end{cases}$

S67. Resuelva gráficamente los sistemas:

$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-8=2y \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=5 \\ 2y+8=x \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} y=-2 \\ x-2y-4=0 \end{cases}$

S68. La suma de dos números es el doble que su diferencia y uno de ellos es el triple del otro. Calcule el valor de esos números.

S69. Berta paga, por dos cafés solos y tres con leche, 3,45 euros; Edelmiro paga 0,30 euros menos por cuatro solos y uno con leche. ¿Cuánto vale cada tipo de café?

S70. Un deportista es diez veces más rápido corriendo que nadando. En una prueba recorre 4410 m corriendo durante 10 minutos y nadando durante 5 minutos. ¿Con qué velocidades corre y nada el deportista?

4. Solucionario

4.1 Soluciones de las actividades propuestas

S1.

Fracción	Expresión decimal	Tipo de decimal
$\frac{3}{4}$	*0,75*	*Decimal exacto*
$\frac{11}{3}$	*3,6666666..* $= 3,\hat{6}$...	*Periódico puro*
$\frac{11}{15}$	*0,73333333...* $= 0{,}7\hat{3}$	*Periódico mixto*
$\frac{3}{25}$	*0,12*	*Decimal exacto*
$\frac{121}{6}$	*20,1666666...*$= 20{,}1\hat{6}$	*Periódico mixto*
$\frac{17}{330}$	*0,05151515...* $= 0{,}0\widehat{51}$	*Periódico mixto*
$\frac{500}{9}$	*55,55555555...* $= 55,\hat{5}$	*Periódico puro*
$\frac{73}{2}$	*36,5*	*Decimal exacto*

S2.

$0{,}25\hat{1} = \frac{226}{900} = \frac{113}{450}$	$3,\widehat{35} = \frac{332}{99}$	$1,\hat{9} = \frac{18}{9} = \frac{2}{1}$
$12{,}28 = \frac{1228}{100} = \frac{307}{25}$	$7{,}25 = \frac{725}{100} = \frac{29}{4}$	$2 = \frac{2}{1}$
$8,\hat{8} = \frac{80}{9}$	$1,\hat{1} = \frac{10}{9}$	$7{,}222\hat{1} = \frac{64\,999}{9000}$
$13{,}3 = \frac{133}{10}$	$3{,}8\widehat{21} = \frac{3783}{990} = \frac{1261}{330}$	$0,\widehat{4321} = \frac{4321}{9999}$
$-7{,}00\widehat{541} = \frac{-699\,841}{99\,900}$	$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	$-0{,}7\widehat{212} = \frac{-7140}{9900} = \frac{-119}{165}$

S3. *Solo hay que calcular la fracción generatriz de* $1,\hat{9}$. *Así,* $1,\hat{9} = \frac{2}{1} = 2$.

S4. *Solo hay que calcular la fracción generatriz de* $1{,}3\hat{9}$. *Así,* $1{,}3\hat{9} = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

S5.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\frac{81}{16}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{3}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{16}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}=64$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\frac{8}{27}$	$(3)^{-2}=\frac{1}{9}$
$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{2}=\frac{9}{4}$	$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}=\frac{16}{81}$	$\left(\left(\frac{10}{6}\right)^{-1}\right)^{-2}=\frac{100}{36}=\frac{25}{9}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{2}=\frac{25}{9}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}:\left(\frac{2}{5}\right)^{-5}=\frac{2}{5}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right)^{2}=\frac{4}{9}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{4}:\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}=1$	$((2^{-1})^{3})^{2}:\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right)^{3}=3^{-6}=\frac{1}{729}$

S6.

$\frac{2^4}{9^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\frac{2^4\cdot 3^6}{18^2\cdot 3^2}=2^2$	$\frac{3x^5y^{-3}z^7}{3^{-1}\cdot(x^2y)^2\cdot(yz)^{-7}\cdot x}=(3yz^7)^2$
$9\cdot x^{-6}\cdot(x^2y)^2=\left(\frac{3y}{x}\right)^2$	$\frac{x^2y^3}{x^{-8}y^8}=\left(\frac{x^2}{y}\right)^5$	$\left(\left(\frac{1}{x^{-1}}\right)^{-2}\right)^{-3}=x^6$

S7.

$\frac{3}{5}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{23}{30}$	$\frac{7}{9}-\frac{1}{6}:\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$
$\frac{3}{5}:6+\frac{5}{6}:4=\frac{37}{120}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3:\frac{1}{9}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$	$\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{5}{7}-\frac{4}{9}\right)=\frac{85}{378}$

S8.

10^{-4} =*0,000 1*	10^{11} =*100 000 000 000*	$8\cdot 10^5$ =*800 000*
$9\cdot 10^{-2}$ =*0,09*	10^0 =*1*	10^{-3} =*0,001*

S9.

$370\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000=3{,}7\cdot 10^{17}$
$-0{,}000\ 056=-5{,}6\cdot 10^{-5}$
$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 807=8{,}07\cdot 10^{-22}$
$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 947=9{,}47\cdot 10^{-13}$
$-294\ 300\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000=-2{,}943\cdot 10^{32}$
$1\ 000\ 000\ 000=1\cdot 10^{9}$

S10.

$-2{,}75 \cdot 10^4 = -27\,500$	$8{,}08 \cdot 10^{-7} = 0{,}000\,000\,808$
$-9{,}98 \cdot 10^8 = -998\,000\,000$	$-3{,}2 \cdot 10^{-4} = -0{,}000\,32$
$1{,}08 \cdot 10^6 = 1\,080\,000$	$1{,}623 \cdot 10^{-20} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,016\,23$

S11.

$2 \cdot 10^5 + 5{,}76 \cdot 10^7 - 5{,}4 \cdot 10^6 = 5{,}24 \cdot 10^7$	$(2{,}34 \cdot 10^{24}) : (1{,}4 \cdot 10^{20}) = 1{,}671428 \cdot 10^4$
$(4{,}5 \cdot 10^9) \cdot (6{,}5 \cdot 10^3) = 2{,}925 \cdot 10^{13}$	$(1{,}2 \cdot 10^7)^2 = 1{,}44 \cdot 10^{14}$

S12.

$\sqrt{125} = 5^{3/2}$	$\sqrt[3]{25} = 5^{2/3}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{25}} = 5^{-2/5}$	$\sqrt{5} = 5^{1/2}$

S13.

$\sqrt{a^{12}} = a^6$	$\sqrt[3]{8a^3b^6} = 2ab^2$	$(25x^8)^{1/2} = 5x^4$	$\sqrt{\frac{9a^2}{64b^8c^2}} = \frac{3a}{8b^4c}$

S14.

$\sqrt{125} = 5 \cdot \sqrt{5}$	$\sqrt{128} = 8 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$	$\sqrt{72} = 6 \cdot \sqrt{2}$
$\sqrt[3]{864} = 6 \cdot \sqrt[3]{4}$	$\sqrt[4]{48} = 2 \cdot \sqrt[4]{3}$	$\sqrt[5]{486} = 3 \cdot \sqrt[5]{2}$	$\sqrt[3]{1080} = 6 \cdot \sqrt[3]{5}$

S15.

$12 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{288}$	$2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$	$5 \cdot \sqrt{8} = \sqrt{200}$	$7 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{245}$
$2 \cdot \sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{224}$	$5 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{250}$	$10 \cdot \sqrt[6]{17} = \sqrt[6]{17\,000\,000}$	$\frac{2}{3} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{\frac{32}{81}}$

S16.

$\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81} = 4 \cdot \sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{3}$	$5 \cdot \sqrt{x} + 3 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{x} = 10 \cdot \sqrt{x}$
$\sqrt{18} + \sqrt{50} + 1 - \sqrt{2} - \sqrt{8} + 3 = 5 \cdot \sqrt{2} + 4$	$\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8} = 5 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2}$
$2 \cdot \sqrt{8} + 4 \cdot \sqrt{72} - 7 \cdot \sqrt{18} = 7 \cdot \sqrt{2}$	$3 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{8} - \sqrt{32} - \sqrt{50} = 2 \cdot \sqrt{2}$
$\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{c^2}} \div \sqrt{\frac{ab}{c}} = \sqrt[10]{\frac{c}{ab}}$	$\sqrt[5]{x} \div \sqrt[3]{x} = \sqrt[15]{\frac{1}{x^2}}$
$\sqrt{ab} \div \sqrt[3]{ab} = \sqrt[6]{ab}$	$\sqrt[4]{a^3b^5c} \div \sqrt{ab^3c^3} = \sqrt[4]{\frac{a}{bc^5}}$

S17.

$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}=\frac{-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$	$\frac{9}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{9\sqrt{7}-9\sqrt{5}}{2}$
$\frac{6}{\sqrt[4]{5}}=\frac{6\sqrt[4]{125}}{5}$	$\frac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$	$\frac{3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{14}+5\sqrt{21}}{14}$	$\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}}=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3-x}$

S18.

$P(0)=-2$	$P(1)=0$
$P(-1)=-8$	$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-7}{8}$
$P\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{-140}{27}$	$P(\sqrt{2})=5\sqrt{2}-6$
$P(-\sqrt{3})=-6\sqrt{3}-8$	$P(3\sqrt{2})=63\sqrt{2}-38$

S19. $\mathbf{3x^4+7x^3-5x^2-x-4.}$

S20.

$P(x)-R(x)=3x^4-2x^3+6x^2+3x-4$	$P(x)-Q(x)=5x^4-11x^3+3x^2+2x-7$
$2P(x)-3R(x)=4x^4+x^3+18x^2+4x-11$	
$2Q(x)-4R(x)=-8x^4+28x^3+18x^2-2x$	

S21.

$(2x^3-x^2-3)\cdot(2x^2+4x-3)=4x^5+6x^4-10x^3-3x^2-12x+9$
$(3x-5)\cdot(x-3)-2\cdot(x^2-x)=x^2-12x+15$

S22.

$(6x^4-11x^3-3x^2-5):(2x^2-5x+3)$. *Cociente:* $3x^2+2x-1$. *Resto:* $-11x-2$
$(2x^5-20x):(2x+2)$. *Cociente:* $x^4-x^3+x^2-x-9$. *Resto: 18*
$(x^4-5x^2+4):(x^2-4)$. *Cociente:* x^2-1. *Resto:* 0
$(x^4-2x^3+15x-4):(x-1)$. *Cociente:* x^3-x^2-x+14. *Resto:* 10

S23.

$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$
$(1+2x)^5=1+10x+40x^2+80x^3+80x^4+32x^5$
$(1-2x)^3=1-6x+12x^2-8x^3$
$(1+\sqrt{2})^4=17+12\sqrt{2}$
$(1+2\sqrt{3})^3=37+30\sqrt{3}$
$(2\sqrt{2}-1)^4=113-72\sqrt{2}$

S24.

$(3a+2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$	$(2x-y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$
$(x+6)\cdot(x-6) = x^2 - 36$	$\left(2\sqrt{2}+3\right)^2 = 17 + 12\sqrt{2}$
$\left(2-3\sqrt{2}\right)^2 = 22 - 12\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-5\sqrt{3}\right) = -73$

S25.

$x^2 - 5x + 6 = 0$	Soluciones: $x = 3, x = 2$
$2x^2 - 12x + 10 = 0$	Soluciones: $x = 5, x = 1$
$4x^2 + 4x - 3 = 0$	Soluciones: $x = \frac{1}{2}, x = \frac{-3}{2}$
$x^2 + 9x - 10 = 0$	Soluciones: $x = 1, x = -10$

S26.

$3x^2 - 6x + 3 = 0$. Tiene una solución.	$x^2 + x - 3 = 0$. Tiene dos soluciones.
$x^2 + x + 3 = 0$. No tiene solución.	$-x^2 - 2x - 3 = 0$. No tiene solución.

S27.

$3x^2 - 27 = 0 \ \ x = 3, x = -3$	$-2x^2 + 50x = 0 \ \ x = 0, \ x = 25$
$13x^2 + 52x = 0 \ \ x = 0, x = -4$	$x^2 + x = 0 \ \ x = 0, x = -1$
$\frac{3}{2}x^2 + 15 = 0$. No tiene solución.	$\frac{1}{3}x^2 - \frac{25}{3} = 0 \ \ x = 5, x = -5$
$x^2 - \frac{9}{4} = 0 \ \ x = \frac{3}{2}, x = \frac{-3}{2}$	

S28.

$x^2 + (10-x)^2 = 50 \Rightarrow x = 5$

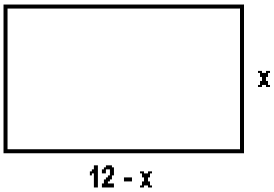
S29.

$3x + x^2 = 88 \Rightarrow x = 8, \ \ x = -11$

S30.

$x^2 - 3x = 9x$. La solución es 12 años.

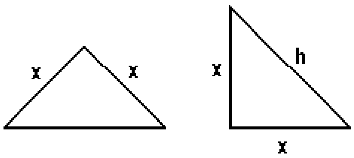
S31.



$x \cdot (12 - x) = 35$

Las dimensiones del rectángulo son 5 cm por 7 cm.

S32.



$\frac{x \cdot x}{2} = 12 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24} = 4{,}9$

Por el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{24 + 24} = \sqrt{48} = 6{,}9$

Así, el perímetro es de 4,9 + 4,9 + 6,9 = 16,7 metros.

S33.

$x \cdot (x + 30) = 7000 \Rightarrow$ Las dimensiones son 70 metros por 100 metros.

S34.

$x \cdot (x - 7) = 60.$ Los números son 12 y 5 o bien -12 y -5

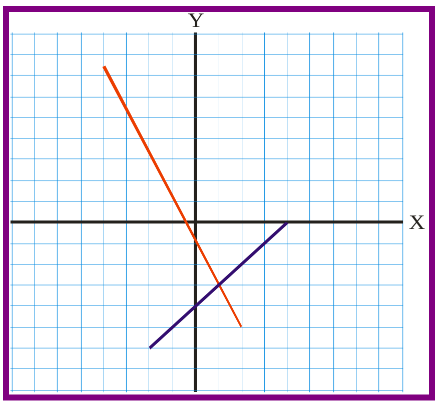
S35.

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ $x = 3, y = 2$	$\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ $x = 1, y = 3$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$ $x = 8, y = 6$	$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x + 7y = 20 \end{cases}$ $x = 5, y = 0$

S36.

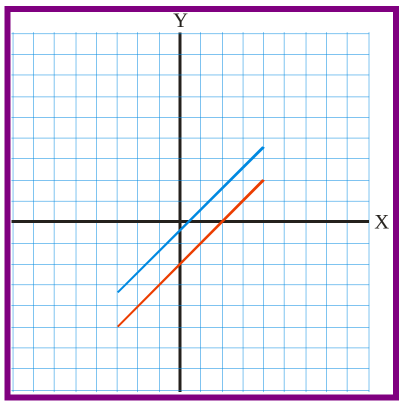
$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$

$x = 1, y = -3$



$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases}$

No tiene solución.



S37.

Sean x e y los números a determinar. Si su suma es 84, podemos escribir: x + y = 84.

Que su cociente sea 6 significa que $\frac{x}{y} = 6$. Los números pedidos son x = 72 e y = 12.

S38.

Sea *x* el número de gallinas e *y* el número de conejos.

$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 4y = 134 \end{cases}$ El número de gallinas es x = 33 y el número de conejos y = 17.

S39.

Sea x la cantidad de pienso de 0,50 €/kg que debemos mezclar e y la cantidad de pienso de 0,80 €/kg.

Deberemos mezclar 32 kg de pienso de 0,50 €/kg y 68 kg de pienso de 0,80 €/kg.

S40.

Sea x la parte del trayecto que ha recorrido en bicicleta e y la parte que ha recorrido en coche. De las condiciones del problema deducimos la ecuación: x + y = 1000

Por otra parte, podemos escribir la ecuación: $\frac{x}{20} + \frac{y}{90} = 15$. Por lo tanto, ha recorrido 100 km en bicicleta y 900 en coche.

S41.

Sea x el número de habitaciones dobles e y el número de habitaciones individuales.

$\begin{cases} x + y = 120 \\ 2x + y = 195 \end{cases}$ El número de habitaciones dobles es x = 75 y el de habitaciones individuales y = 45.

S42.

Sea x el número de invitados e y el número de pasteles. Obtenemos las ecuaciones:

5x = y – 3

6x = y + 1

El número de invitados será x = 4 y el número de pasteles y = 23.

4.2 Soluciones de las actividades finales

S43. *Son exactos cuando el denominador puede ser descompuesto en potencias de 2 y/o de 5, ya que cuando un número decimal exacto es pasado a fracción su denominador es una potencia de 10.*

$\frac{11}{6}$ Periódico	$\frac{11}{16}$ Exacto	$\frac{11}{7}$ Periódico	$\frac{11}{13}$ Periódico
$\frac{11}{8}$ Exacto	$\frac{11}{9}$ Periódico	$\frac{11}{12}$ Periódico	

S44. *Seis cifras, pues* $\frac{1}{7} = 0{,}182457182457182457 \ldots$

S45.

Porque 7 no se descompone en potencias de 2 y/o de 5.
Porque al dividir entre un número *m* solo hay $m - 1$ restos diferentes.

S46.

$\frac{x^2 \cdot x^{-4}}{x^{-3}} = x$	$x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$(x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-7} = x^6 \cdot x^7 = x^{13}$
$\frac{(-2)^0 \cdot (-2)^{-2}}{2^4 \cdot (-2)^{-3}} = -2^{-3}$	$\frac{2^7 \cdot 4^{-2}}{8^2 \cdot 2^5} = -\frac{1}{2^8} = 2^{-8}$	$\left(\frac{\left(3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{9}\right)^{-1}}\right)^{-1} = 6$

S47.

$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) : \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right)\right] - \frac{6}{5} = \frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right) = \frac{-3}{64}$
$\left(7 : \left(1 - \frac{2}{9}\right) - 5\right) : 4 = 1$	$\frac{9}{5} + \frac{6}{7} - 2 = \frac{23}{35}$
$\frac{7}{12} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)\right] = \frac{-1}{2}$	$\left(2 - \frac{5}{4}\right) - \left[1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)\right] = \frac{-1}{24}$
$\frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{10} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3} = \frac{25}{21}$
$\frac{3}{4} + \left(\frac{9}{2} - \frac{5}{3}\right) = \frac{43}{12}$	$\frac{5}{2} - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) = \frac{23}{12}$
$\left(2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{5}\right) = \frac{47}{20}$	$\left(\frac{4}{9} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} : 2\right) = \frac{29}{18}$
$\left(2 - \frac{1}{5} - \frac{4}{15}\right) : \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{3} + \frac{-2}{9}\right) = \frac{69}{77}$	$\left(\frac{9}{2} - \frac{7}{6}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{-8}{5}\right) + \frac{1}{2} = \frac{25}{3}$

S48.

$10^{3x-2} = 10\,000 \quad x = 2$	$10^{5x+8} = 0{,}01 \quad x = -2$	$10^{3x-7} = 100\,000\,000 \quad x = 5$

S49. *El resultado exacto es* $1\,082\,152\,022\,374\,638$. *Pero en la pantalla de una calculadora normal no caben todas las cifras, por lo que aparece como resultado* $1{,}082152022 \cdot 10^{15}$, *que es una aproximación del resultado exacto.*

S50.

$0{,}0003 \cdot 32\,100\,000 = 9{,}63 \cdot 10^3$	$0{,}0003 \cdot 32\,100\,000 + 456 \cdot 10^7 = 4{,}560\,009\,63 \cdot 10^9$
$(0{,}0003 \cdot 32\,100\,000 + 456 \cdot 10^7) : (876\,000 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}67 \cdot 10^7) = 1{,}114\,666\,604\,8 \cdot 10^{-2}$	

S51.

$2^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$5^{3/4} = \sqrt[4]{125}$	$7^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{7}}$
$3^{1/6} = \sqrt[6]{3}$	$7^{6/5} = \sqrt[6]{7^5}$	$(-5)^{-3/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{-125}}$

S52.

$\sqrt[5]{32} = 2$	$\sqrt[3]{3375} = 15$	$\sqrt[4]{\frac{81x^4y^{20}}{16z^8}} = \frac{3xy^5}{2z^2}$	$\sqrt[3]{\frac{x^{-2}y^8z^2}{x^4y^{-4}z^5}} = \frac{y^4}{x^2z}$

S53.

$\sqrt{12x^3} = 2x \cdot \sqrt{3x}$	$\sqrt[3]{168} = 2 \cdot \sqrt[3]{21}$	$\sqrt{98} = 7 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{350} = 5 \cdot \sqrt{14}$
$\sqrt[4]{243} = 3 \cdot \sqrt[4]{3}$	$\sqrt{512} = 16 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt[5]{900\,000} = 10 \cdot \sqrt[5]{9}$	$\sqrt[6]{8\,000\,000} = 10 \cdot \sqrt{2}$

S54.

$3 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{63}$	$5 \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{1250}$	$7 \cdot \sqrt{10} = \sqrt{490}$	$3 \cdot \sqrt{13} = \sqrt{117}$
$x \cdot \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{x^5y}$	$2 \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{48}$	$\frac{2}{\sqrt[6]{17}} = \sqrt[6]{\frac{64}{17}}$	$\frac{2}{3 \cdot \sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{8}{81}}$

S55.

$\left(2 + 3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 22 + 12\sqrt{2}$	$\sqrt{180} - 2 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{20} = 6 \cdot \sqrt{5}$
$7 \cdot \sqrt{50} - 3 \cdot \sqrt{18} + \sqrt{24} - \frac{3}{2}\sqrt{8} - \sqrt{6} = 23 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{6}$	$\sqrt{3} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$
$\sqrt{\frac{a^4b}{c^5}} - \sqrt{\frac{4a^2b}{c^3}} + \sqrt{\frac{b}{c}} = \left(\frac{a-c}{c}\right)^2 \sqrt{\frac{b}{c}}$	$\frac{a+1}{3} \cdot \sqrt{\frac{9}{a^2 + 2a + 1}} = 1$
$\sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a \cdot \sqrt[6]{a}$	$\frac{\sqrt[5]{abc} \cdot \sqrt[10]{a^2b^4}}{\sqrt[15]{a^4b^6c^3}} = \sqrt[15]{a^2b^3}$

S56.

$\sqrt{8}+\sqrt{50}-x=4\cdot\sqrt{2}$ $x=3\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{x}+\sqrt{8}-\sqrt[3]{5}=3\cdot\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}$ $x=8$

S57.

$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[3]{x}$	$\frac{5}{\sqrt[4]{5^7}}=\frac{\sqrt[4]{5}}{5}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}=-7-5\sqrt{2}$
$\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{x}$	$\frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$
$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{-\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{3}+6}{4}$	$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x+y)\sqrt{x}-(x+y)\sqrt{y}}{x-y}$	

S58.

$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{8}+\sqrt[4]{64}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{1-2\sqrt{3}}-8\sqrt{12}=\frac{-1}{11}-\frac{512}{33}\sqrt{3}$
$\sqrt{18}-3\sqrt{8}+3\sqrt{50}+\sqrt{27}+\sqrt{\frac{4}{3}}=12\sqrt{2}+\frac{11}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt[4]{4}+\sqrt{8}-\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{64}+\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{11}{2}\sqrt{2}$

S59.

$P(x)+Q(x)\cdot T(x)=13x^4-25x^3+15x^2+8x-19$
$(P(x)+R(x))\cdot T(x)=14x^5-45x^4+24x^3+32x^2-17x-6$
$3P(x)-2S(x)T(x)=15x^4-25x^3+2x^2+17x+3$
$R(x):S(x)$. Cociente: $2x^2-7x-1$. Resto: $10x+4$
$(2P(x)+Q(x)):S(x)$. Cociente: $10x^2-20x+7$. Resto: $26x-3$
$P(x):(S(x)-T(x))$. Cociente: $5x^2-2x-22$. Resto: $-9x+87$

S60.

$(2+x)^4=16+32x+24x^2+8x^3+x^4$
$(1-x)^4=1-4x+6x^2-4x^3+x^4$
$(2-x)^5=32-80x+80x^2-40x^3+10x^4-x^5$
$(\sqrt{3}+1)^7=568+328\sqrt{3}$
$(\sqrt{5}-x)^5=25\sqrt{5}-125x+50\sqrt{5}\cdot x^2-50x^3+5\sqrt{5}\cdot x^4-x^5$
$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$

S61.

$(2+x)^2 = 4 + 4x + x^2$	$(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$	$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = 2$
$(\sqrt{3}+1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$	$(\sqrt{5}-2)^2 = 9 - 4\sqrt{5}$	$(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}) = 6$

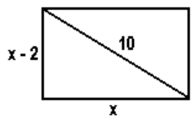
S62.

$x^2 - 6x + 7 = -2.$ La solución es única: x = 3
$21x^2 + 100 = -5.$ La ecuación en este caso tampoco tiene solución, ya que no es posible calcular $\sqrt{-5}$.
$x^2 - 3x + 2 = 0.$ Solución: x = 2, x = 1
$x \cdot (2x-1) + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{5}.$ La ecuación no tiene solución, ya que $\sqrt{-40}$ no es un número real.
$2x^2 - 6x = 6x^2 - 8x.$ Solución: x = 0, x = 1/2
$2x - \frac{6x^2 - 2x + 1}{6} + \frac{2x^2 - 3x}{2} = -1.$ Solución: x = –1

S63.

Sea x el lado de las baldosas cuadradas. Se necesitan 300 baldosas cuadradas de 0,4 m de lado.

S64.



Largo: x = 8 cm; ancho: x – 2 = 8 – 2 = 6 cm.

S65.

Sea *x* la edad actual de Pedro. Su edad hace 12 años era (x – 12) y dentro de 12 años será (x + 12). Solución: 20 años.

S66.

$\begin{cases} 2x - 5y - 9 = 0 \\ 7x + 4y - 10 = 0 \end{cases}$ Solución $x = 2, y = -1$	$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ Solución $x = 3,\ y = 4$
$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5y = -3 \end{cases}$ *Solución*: $x = \frac{7}{5},\ y = -\frac{3}{5}$	$\begin{cases} x - (y+1) = 3 \\ y + (x+3) = 4 \end{cases}$ Solución: $x = \frac{5}{2},\ y = -\frac{3}{2}$
$\begin{cases} -x + 11y = 12 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$ Solución $x = -\frac{15}{4},\ y = \frac{3}{4}$	$\begin{cases} 10(x-2) + y = 1 \\ x + 3(x-y) = 5 \end{cases}$ Solución: $x = 2,\ y = 1$

S67.

$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-8=2y \end{cases}$	Las rectas se cortan en el punto (2, -1), por lo que la solución del sistema es x = 2, y = -1.
$\begin{cases} x-y=5 \\ 2y+8=x \end{cases}$	Las rectas se cortan en el punto (2, -3), por lo que la solución del sistema es x = 2, y = -3.
$\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$	Las rectas se cortan en el punto (-2, -3). La solución del sistema es x = -2, y = -3.
$\begin{cases} y=-2 \\ x-2y-4=0 \end{cases}$	Las rectas se en el punto (0, -2), por lo que la solución del sistema es x = 0, y = -2.

S68.

Sean x e y los números a determinar.

$$\begin{cases} x=3y \\ x+y=2(x-y) \end{cases} \quad \begin{cases} x=3y \\ x+y=2x-2y \end{cases} \Rightarrow 3y+y=2\cdot 3y-2y \Rightarrow 4y=6y-2y \Rightarrow 4y=4y$$

Esta ecuación se cumple para cualquier valor de y. Por lo tanto, se trata de un sistema indeterminado con infinitas soluciones en el que las dos ecuaciones son equivalentes y que se cumple para cualquier par de números que verifiquen una de las condiciones, por ejemplo, que un número sea el tripe del otro: 1 y 3, 2 y 6, 3 y 9, etc.

S69.

Sea *x* el precio de un café solo e *y* el precio de un café con leche. El precio de un café solo es x = 0,60 € y el de un café con leche y = 0,75 €.

S70.

Sea x la velocidad a la que nada y 10x la velocidad a la que corre.
La velocidad nadando es de 42 m/minuto y corriendo 10 · 42 = 420 m/minuto.

5. Glosario

C	▪ Coeficiente principal	Coeficiente del monomio de mayor grado de un polinomio.
	▪ Coeficientes de un polinomio	Cada uno de los números que, en cada monomio del polinomio, multiplica la parte literal.
E	▪ Ecuación de 2º grado completa	Ecuación de segundo grado con todos sus coeficientes distintos de cero.
	▪ Ecuación de 2º grado incompleta	Ecuación de segundo grado en la que algún coeficiente, que no sea el de segundo grado, vale cero.
	▪ Ecuación lineal	Ecuación de primer grado.
F	▪ Fracción generatriz	Fracción que representa un número decimal dado.
G	▪ Grado de un polinomio	Grado del monomio de mayor grado que forma parte del polinomio y tiene coeficiente distinto de cero.
M	▪ Mantisa	En la notación científica, parte que va delante de la potencia de diez.
	▪ Monomios semejantes	Monomios que tienen la misma parte literal.
N	▪ Número decimal exacto	Número decimal que tiene un número finito (que se acaba) de cifras decimales.
	▪ Número decimal periódico	Número decimal con un número infinito de cifras decimales, de las que todas o algunas se repiten indefinidamente.
	▪ Número periódico mixto	Número periódico con parte decimal periódica y no periódica.
	▪ Número periódico puro	Número periódico que no tiene cifras no periódicas en la parte decimal.
	▪ Números irracionales	Números que no pueden ser representados por fracciones.
P	▪ Polinomio	Suma y/o resta de monomios.
R	▪ Racionalización	Procedimiento para eliminar las expresiones radicales de los denominadores.
	▪ Radicales semejantes	Radicales que, una vez reducidos, tienen el mismo índice y el mismo radicando.
T	▪ Término independiente	Término de grado cero de un polinomio.
V	▪ Valor numérico de un polinomio	Número obtenido cuando sustituimos la variable de un polinomio por un número y efectuamos las operaciones correspondientes.

6. Bibliografía y recursos

Bibliografía

- *Libros para la educación secundaria a distancia de adultos. Ámbito tecnológico-matemático.* Consellería de Educación y Ordenación Universitaria.
- *Matemáticas ESO 1.* Ed. Anaya, 2016.
- *Matemáticas ESO 2.* Ed. Anaya, 2016.
- *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas ESO 3.* Ed. Anaya 2016.
- *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas ESO 3.* Ed. Anaya 2016.
- *Matemáticas enseñanzas académicas ESO 3.* Ed. Santillana.
- *Matemáticas enseñanzas aplicadas ESO 3.* Ed. Santillana.

Enlaces de Internet

En estos enlaces encontrará trucos e información que puede consultar para mejorar su práctica.

- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_segundo_grado/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Radicales/indice.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Potencias/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/notacion/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuaciones2grado/inicio.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Potencias_mac/indice.htm
- https://www.youtube.com/user/juanmemol/videos
- http://aulamatematica.com/
- http://matematicasies.com/?-Ecuaciones,6-
- http://matematicasies.com/-Numeros-Reales-
- http://matematicasies.com/-Polinomios,65-
- http://matematicasies.com/-Radicales-
- http://matematicasies.com/-Polinomios,62-