

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 76

1. Ecuación con matrices

- Calcular x , y , z tales que:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + 1 & x + yz \\ x + yz & x^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y^2 + 1 = 5 \\ x + yz = 0 \\ x^2 + z^2 = 5 \end{cases} \rightarrow y = \pm 2$$

- Si $y = 2$:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x^2 + z^2 = 5 \end{cases} \rightarrow x = 2, z = -1; x = -2, z = 1$$

- Si $y = -2$:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x^2 + z^2 = 5 \end{cases} \rightarrow x = -2, z = -1; x = 2, z = 1$$

Soluciones: $x_1 = 2, y_1 = 2, z_1 = -1$

$$x_2 = -2, y_2 = 2, z_2 = 1$$

$$x_3 = -2, y_3 = -2, z_3 = -1$$

$$x_4 = 2, y_4 = -2, z_4 = 1$$

2. Despejar una matriz

- Determinar la matriz X que verifique $AXA - B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y 0 la matriz nula de orden 2.

$$AXA - B = 0 \rightarrow AXA = B \rightarrow X = A^{-1}BA^{-1}$$

Hallamos la inversa de A :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ 3 \cdot (2.^a) + 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)/3 \\ -(2.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Matrices conmutables

- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, obtener todas las matrices B que conmutan con A , es decir, que $A \cdot B = B \cdot A$.

Escribirlas en función de dos parámetros y poner un ejemplo.

Escribimos: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$AB = BA \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & a \\ c+2d & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} c = 2b \\ d = a - b \end{cases}$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a - b \end{pmatrix}$

4. Potencias de una matriz

- Dada $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$, calcular:

a) Las matrices $A^2, A^3, A^4, \dots, A^8$.

b) Los números reales m y n para los que se verifica:

$$(A + I)^3 = mI + nA$$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$$A^3 = (-I) \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = -I$$

$$A^7 = A^6 \cdot A = (-I) \cdot A = -A$$

$$A^8 = A^7 \cdot A = (-A) \cdot A = (-A^2) = I$$

b) $(A + I)^3 = A^3 + A^2 + 2A^2 + 2A + A + I = -A - I - 2I + 2A + A + I = 2A - 2I$

Por tanto, $m = -2, n = 2$.

5. Ecuación con infinitas soluciones

- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$.

$$XAX^{-1} = B \rightarrow XA = BX$$

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\left. \begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} \\ BX &= \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \text{Igualando obtenemos un sistema de ecuaciones.}$$

$$\left. \begin{aligned} 2a &= 8a-9c \\ 2c &= 6a-7c \\ -b &= 8b-9d \\ -d &= 6b-7d \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} 2a &= 8a-9c \\ 2c &= 6a-7c \end{aligned} \rightarrow c = \frac{2}{3}a$$

$$\left. \begin{aligned} -b &= 8b-9d \\ -d &= 6b-7d \end{aligned} \right\} \rightarrow b = d$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ (2/3)a & b \end{pmatrix}$

De todas las posibles soluciones, podemos tomar $a = 3$ y $b = 1$, y obtenemos $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.