

Nombre y apellidos: _____

NORMAS: As respostas deberán estar debidamente xustificadas. Se só se achega a solución, sen ningún tipo de explicación, a puntuación nese apartado será de cero puntos. Permítese o uso de calculadoras científicas non programables e que non teñan capacidade gráfica. En cada un dos exercicios, poderán descontarse ata 0.2 puntos pola falta de rigor matemático na resposta. Na avaliación dos exercicios, valoraranse, ademais: a. A utilización da linguaxe, notación e símbolos matemáticos adecuados. b. A utilización de argumentos, xustificacións e razoamentos coherentes. c. De ser o caso, a interpretación correcta da solución.

1. **CA.2.4. / CA.4.1. / CA.4.5. (2 puntos)** Dada a función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$,
responda as seguintes cuestións:

- a) Cal é o valor de k que fai que f sexa continua en $x = 0$ para calquera valor de b ?
b) Para que valores de b e k é f derivable en $x = 0$?

- a) Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

- Existe $f(0) = 0^2 + b \cdot 0 - 1 = -1$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + bx - 1 = -1$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k - xe^x}{x} = \frac{k - 0}{0} = \dots$, para que exista el límite debe ser $k = 0$, en caso contrario el límite vale ∞ y la función no sería continua.
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^x = -e^0 = -1$$
- Los tres valores son iguales. Se cumple para $k = 0$.

El valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b es $k = 0$.

- b) Para que la función sea derivable en $x = 0$ debe ser continua, por lo que $k = 0$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{-xe^x}{x} = -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x = 0$ deben coincidir las derivadas laterales.

Obtenemos la derivada de la función en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si } x < 0 \\ -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales en $x = 0$ y hacemos que tengan el mismo valor.

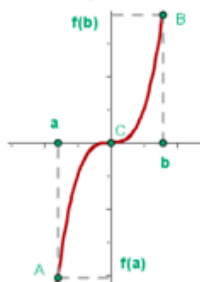
$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + b = b \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^x = -e^0 = -1 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

Los valores que hacen que f derivable en $x = 0$ son $k = 0$ y $b = -1$.

2. **CA.2.1. / CA.2.3. / CA.4.1. (2 puntos)** Resolva:

- a) Enuncie o teorema de Bolzano (acompañe o teorema dun debuxo explicativo)
b) Obteña os valores de a , b e c que fan que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpra $f(0) = 1$ e teña extremos relativos en $x = \pm 1$. Despois indique se os extremos son máximos ou mínimos.

- a) **Teorema de Bolzano.** Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



- b) Debe cumplirse que $f(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c=1}$$

Debe cumplirse que $f'(1) = 0$ y $f'(-1) = 0$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3 \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 - 3 \Rightarrow \boxed{0 = 3a + 2b - 3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3 \\ f'(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) - 3 \Rightarrow \boxed{0 = 3a - 2b - 3}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\begin{array}{l} (+) \left\{ \begin{array}{l} 3a + 2b - 3 = 0 \\ 3a - 2b - 3 = 0 \end{array} \right. \\ \hline 6a - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow 3 + 2b - 3 = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b=0} \end{array}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$.

Averiguamos si $x = \pm 1$ son máximos o mínimos sustituyendo estos valores en la derivada segunda.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3 \\ a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$$

$x = +1 \Rightarrow f''(1) = 6 > 0$. En $x = 1$ hay un mínimo relativo.

$x = -1 \Rightarrow f''(-1) = -6 < 0$. En $x = -1$ hay un máximo relativo.

3. CA.2.1. / CA.2.2. / CA.2.4. (2 puntos) Resuelva:

- a) Calcule el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

- b) Calcule la integral de la función: $f(x) = \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$.

a) Calculamos el valor del segundo límite.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} &= \frac{e^{\sin 0} - e^0}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot e^{\sin x} - e^x}{2x} = \frac{\cos 0 \cdot e^{\sin 0} - e^0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} - e^x}{2} = \frac{-\sin 0 \cdot e^{\sin 0} + \cos 0 \cdot \cos 0 \cdot e^{\sin 0} - e^0}{2} = \\&= \frac{1-1}{2} = \boxed{0}\end{aligned}$$

b) $\int f(x) dx = \int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2} dx = \dots$

$$\begin{array}{r} x^4 \quad +2x+6 \quad | \quad x^2+x-2 \\ -x^4 - x^3 + 2x^2 \quad \quad \quad x^2 - x + 3 \\ \hline -x^3 + 2x^2 + 2x - 6 \\ \quad x^3 + x^2 - 2x \quad \quad \quad \Rightarrow \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2} = x^2 - x + 3 + \frac{-3x}{x^2 + x - 2} \\ \hline \quad \quad 3x^2 \quad -6 \\ \quad \quad -3x^2 - 3x + 6 \\ \hline \quad \quad \quad -3x \end{array}$$

$$\dots = \int x^2 - x + 3 + \frac{-3x}{x^2 + x - 2} dx = \int x^2 - x + 3 dx - \int \frac{3x}{x^2 + x - 2} dx = \dots$$

$$\begin{aligned}x^2 + x - 2 = 0 &\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases} \\ \frac{3x}{x^2 + x - 2} &= \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3x = A(x+2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 3 = 3A \rightarrow A=1 \\ x=-2 \rightarrow -6 = -3B \rightarrow B=2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{3x}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - \int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{2}{x+2} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{x+2} dx = \boxed{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + K}$$

4. **CA.2.1. / CA.2.2. / CA4.5. (2 puntos)** Resuelva:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x dx$ e $\int (\ln x) / x dx$.

b) Calcule $\int (\ln x) / x dx$ empleando el método de integración por partes. Logo obtenga

algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x) / x dx = 3/2$.

a) La primera integral

$$\int (\sin x)^5 \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sin x = t \rightarrow \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} = \boxed{\frac{(\sin x)^6}{6} + K}$$

La segunda integral

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \\ dx = x dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{x} x dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \boxed{\frac{(\ln x)^2}{2} + K}$$

b) Usamos el método de integración por partes para obtener la expresión de la integral.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Por partes} \\ \ln x = u \rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ dv = \frac{1}{x} dx \rightarrow v = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \end{array} \right\} = (\ln x)(\ln x) - \int \ln x \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \ln x \frac{1}{x} dx \Rightarrow 2 \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \boxed{\frac{(\ln x)^2}{2} + K}$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_e^B (\ln x) / x dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_e^B = \left[\frac{(\ln B)^2}{2} \right] - \left[\frac{(\ln e)^2}{2} \right] = \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Igualemos la expresión obtenida a 3/2 y determinamos el valor de B.

$$\int_e^B (\ln x) / x dx = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(\ln B)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow (\ln B)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln B = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln B = 2 \rightarrow \boxed{B = e^2} \\ \ln B = -2 \rightarrow \boxed{B = e^{-2}} \end{array} \right.$$

Los valores buscados son $B = e^2$ y $B = e^{-2}$.

5. **CA2.3 / CA4.6 (2 puntos)** Responda:

- a) Calcule a área encerrada polas gráficas das funcións $f(x) = -x^2 + 2$ e $g(x) = |x|$.
- b) Razoe, sen calcular a integral, se $\int_1^2 x e^x dx$ ten signo positivo ou negativo. Logo, calcule a integral.

a) Averiguamos donde se cortan las gráficas de las dos funciones.

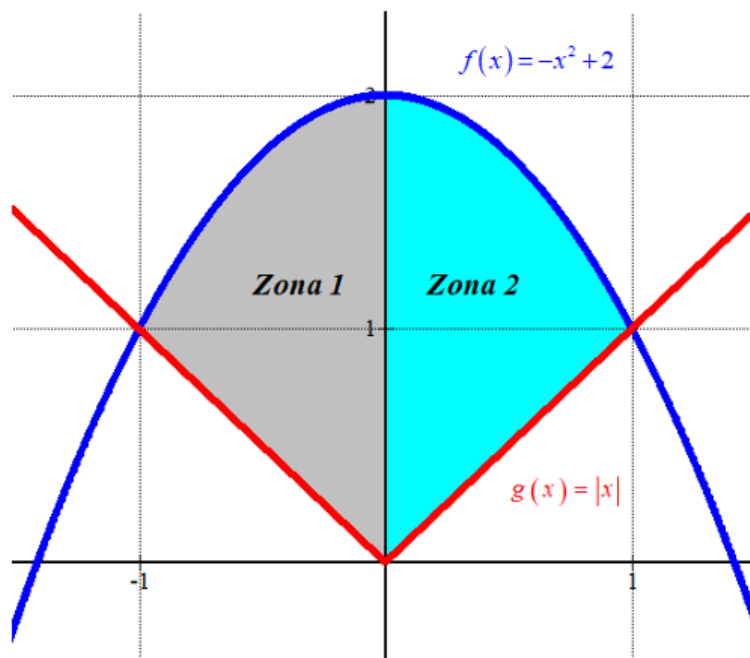
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 2 \\ g(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x = -x^2 + 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \\ = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \notin (-\infty, 0) \\ \frac{1-3}{2} = -1 = x \end{cases} \\ x = -x^2 + 2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \\ = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \notin (0, +\infty) \end{cases} \end{array} \right.$$

Las dos gráficas se cortan en dos puntos. Dibujamos las gráficas de las dos funciones y el recinto limitado por ellas.

x	$y = -x^2 + 2$
-2	-2
-1	1
0	2 vértice
1	1
2	-2

$$g(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

x	$y = x $
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2



El área es la suma de área de la zona 1 y de la zona 2 del dibujo. Las dos funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas y como se aprecia los dos recintos tienen el mismo

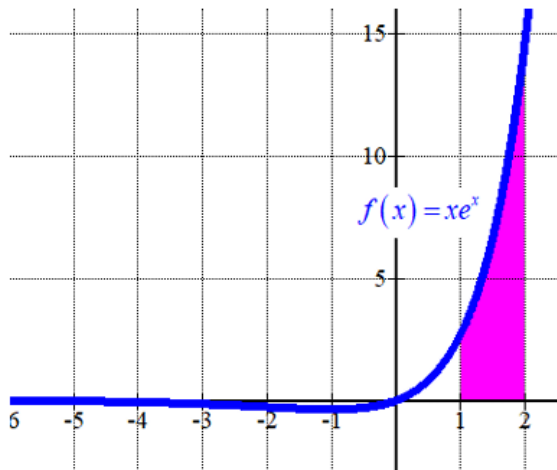
valor de área. El área total es el doble del área de la zona 2.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \int_0^1 (-x^2 + 2) - x dx = 2 \int_0^1 -x^2 - x + 2 dx = 2 \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \\ &= 2 \left(\left[-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 \right] \right) = 2 \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) = \boxed{\frac{7}{3} \approx 2.333 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2$ y $g(x) = |x|$ tiene un valor de $\frac{7}{3} \approx 2.333$ unidades cuadradas.

- b) La función $f(x) = xe^x$ es una función positiva en el intervalo $(1, 2)$ por lo que la integral definida $\int_1^2 xe^x dx$ tendrá un valor positivo.

$$\left. \begin{array}{l} x \in (1, 2) \rightarrow x > 0 \\ e^x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = xe^x > 0, \text{ siendo } x \in (1, 2)$$



Calculamos primero la integral indefinida $\int xe^x dx$.

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = \boxed{xe^x - e^x + K}$$

Calculamos el valor de la integral definida $\int_1^2 xe^x dx$

$$\int_1^2 xe^x dx = \left[xe^x - e^x \right]_1^2 = \left[2 \cdot e^2 - e^2 \right] - \left[1 \cdot e^1 - e^1 \right] = \boxed{e^2 \approx 7.39}$$