CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PAU Convocatoria ordinaria 2026 MATEMÁTICAS II	CÓDIGO 20

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria:** la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

La caída de los tipos de interés en el segundo semestre de 2024 permitió a las familias ahorrar alrededor de 200 euros al mes en comparación con lo que venían pagando por sus hipotecas y préstamos. Este ahorro equivalía a más de 2000 euros anuales. Ante este escenario, los bancos ofrecieron condiciones más atractivas para captar clientes, lo que generó una fuerte competencia entre las entidades. Una de ellas lanzó los siguientes productos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto y Préstamo Estudia. Cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos.
La política de la empresa determinó que el reparto final de los préstamos concedidos fuera el siguiente: un 45 % correspondió a Préstamos 24 Horas, un 40 % a Préstamos Auto y un 15 % a Préstamos Estudia. Además, se analizó el porcentaje de impago en estos productos, que fue del 20 % en Préstamos 24 Horas, del 30 % en Préstamos Auto y del 25 % en Préstamos Estudia.

Responda estos cuatro apartados: 1.1., 1.2., 1.3 y 1.4.

1.1. Seleccionado un préstamo al azar, calcule la probabilidad de que no se haya pagado.

1.2. Sabiendo que no se pagó un préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Auto.

1.3. Si se pagó el préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Estudia.

1.4. Según los datos proporcionados por el enunciado, indique dos sucesos relacionados con este problema que sean incompatibles.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos).

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes. Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron compras o devoluciones, las cuales se recogieron (en miles de unidades) en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1.1. Indique qué representan las filas y las columnas, y especifique tanto las compras como las devoluciones realizadas por cada cliente durante el mes de febrero.

2.1.2. Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 3250 €, el segundo un total de 2850 € y el cuarto un total de 2800 €, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

2.2. Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema: $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos).
Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2, 3.3.

3.1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\arctan(x+\pi)$, donde arctan denota la función arcotangente.

3.1.1.. Determine los intervalos de concavidad y de convexidad de f. Estudie y halle, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

3.1.2. Calcule

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{f(x)}{\sin x}$$

¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador $\sin x$ por $g(x)$, siendo $g(x)=\sin x \ si \ x\neq-\pi \ y \ g(-\pi)=2$?

3.2. La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es igual a 100 metros. ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?

3.3. Responda:

3.3.1. Calcule el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+2$ y $g(x)=|x|$.

3.3.2. Razone, sin calcular la integral, si $\int_1^2 xe^x dx$ tiene signo positivo o negativo. Luego, calcule la integral.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos).
Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Responda:

4.1.1. Considere el triángulo de vértices $A(0,0,0)$, $B(2,4,0)$ y $C(5,0,0)$. Utilizando productos vectoriales, calcule su área. Luego, compruebe el resultado mediante otro método.

4.1.2. Calcule la distancia del punto $P(2,4,2)$ al plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $C(5,0,0)$ y $D(0,0,3)$.

4.2. Responda:

4.2.1. Se consideran el plano $\pi: ax+y+z=1$ y la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{3}$, donde a es un parámetro real.

− Estudie la posición relativa de π y r en función de a,
− obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares y
− razone si r puede estar contenida en π o no.

4.2.2. Si π es el plano de ecuación $-3x+y+z=1$, diga qué valor debe tomar el parámetro b para que la recta $s:\frac{x-1}{2}=\frac{y-b}{3}=\frac{z+1}{3}$ esté contenida en π.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)
CONTEXTO
La caída de los tipos de interés en el segundo semestre de 2024 permitió a las familias ahorrar alrededor de 200 euros al mes en comparación con lo que venían pagando por sus hipotecas y préstamos. Este ahorro equivalía a más de 2000 euros anuales. Ante este escenario, los bancos ofrecieron condiciones más atractivas para captar clientes, lo que generó una fuerte competencia entre las entidades. Una de ellas lanzó los siguientes productos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto y Préstamo Estudia. Cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos.
La política de la empresa determinó que el reparto final de los préstamos concedidos fuera el siguiente: un 45 % correspondió a Préstamos 24 Horas, un 40 % a Préstamos Auto y un 15 % a Préstamos Estudia. Además, se analizó el porcentaje de impago en estos productos, que fue del 20 % en Préstamos 24 Horas, del 30 % en Préstamos Auto y del 25 % en Préstamos Estudia.

Responda estos cuatro apartados: 1.1., 1.2., 1.3 y 1.4.

1.1. Seleccionado un préstamo al azar, calcule la probabilidad de que no se haya pagado.

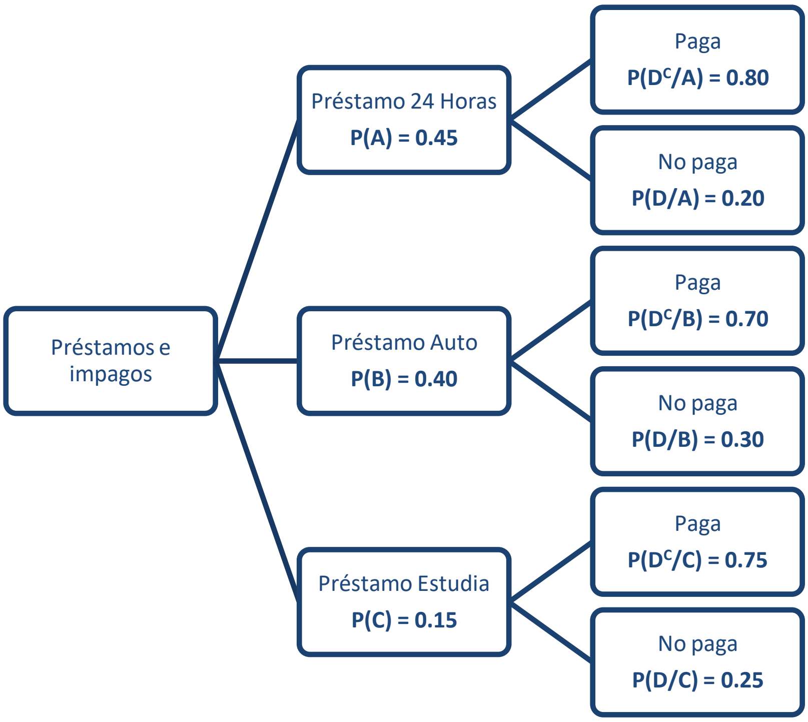
1.2. Sabiendo que no se pagó un préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Auto.

1.3. Si se pagó el préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Estudia.

1.4. Según los datos proporcionados por el enunciado, indique dos sucesos relacionados con este problema que sean incompatibles.

Llamamos A al suceso "tener un Préstamo 24 Horas", B a "tener un Préstamo Auto", C a "tener un Préstamo Estudia" y D a "no pagar el préstamo".

Realizamos un diagrama de árbol que nos permite expresar de forma ordenada lo que sucede en el experimento y la probabilidad de cada suceso del mismo.



1.1. Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)=$$

$$=0.45\cdot 0.20+0.40\cdot 0.30+0.15\cdot 0.25=\boxed{0.2475}$$

1.2. Nos piden calcular $P(B/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{P(B)P(D/B)}{P(D)}=\frac{0.40\cdot 0.30}{0.2475}=\boxed{\frac{16}{33}\simeq 0.4848}$$

1.3. Nos piden calcular $P(C/D^C)$.

$$P(C/D^C)=\frac{P(C\cap D^C)}{P(D^C)}=\frac{P(C)P(D^C/C)}{1-P(D)}=\frac{0.15\cdot 0.75}{1-0.2475}=\boxed{\frac{45}{301}\simeq 0.1495}$$

1.4. Dos sucesos F y G son incompatibles cuando $F\cap G=\varnothing$, es decir, no tienen nada en común. El experimento consiste en elegir un préstamo al azar y sabemos que cada cliente solo puede tener uno de los préstamos que la entidad concede, por lo que $A\cap B=\varnothing$.
El suceso A = "el préstamo es 24 Horas" y el suceso B = "el préstamo es Auto" son incompatibles: $P(A\cap B)=0$.

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes. Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron compras o devoluciones, las cuales se recogieron (en miles de unidades) en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1.1. Indique qué representan las filas y las columnas, y especifique tanto las compras como las devoluciones realizadas por cada cliente durante el mes de febrero.

2.1.2. Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 3250 €, el segundo un total de 2850 € y el cuarto un total de 2800 €, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

2.1.1. Es una matriz con 4 filas y 3 columnas. En cada fila aparecen los datos de cada cliente y en cada columna los datos de cada fármaco, por lo que en la celda situada en la fila 4 y columna 2 aparece un 7 que indica que el cliente 4 pide 7000 unidades del 4º fármaco.

El cliente 1º ha hecho una compra de 9000 unidades del fármaco 1, 5000 unidades del 2º y 2000 del 3º.

El cliente 2º ha hecho una compra de 3000 unidades del fármaco 1, 8000 unidades del 2º y 0 del 3º.

El cliente 3º no ha hecho ninguna compra (toda la fila 3ª está llena de ceros).

El cliente 4º ha hecho una compra de 6000 unidades del fármaco 1, 7000 unidades del 2º y ha devuelto 1000 unidades del 3º.

2.1.2. Si llamamos "x", "y" y "z" a los precios por unidad del fármaco 1, 2 y 3, respectivamente se nos plantea el siguiente sistema de ecuaciones que resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1000x \\ 1000y \\ 1000z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3250 \\ 2850 \\ 0 \\ 2800 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 9000x+5000y+2000z=3250 \\ 3000x+8000y=2850 \\ 6000x+7000y-1000z=2800 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 900x+500y+200z=325 \\ 300x+800y=285 \\ 60x+70y-10z=28 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 900x+500y+200z=325 \\ x=\dfrac{285-800y}{300} \\ 60x+70y-10z=28 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 900\dfrac{285-800y}{300}+500y+200z=325 \\ 60\dfrac{285-800y}{300}+70y-10z=28 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3(285-800y)+500y+200z=325 \\ \dfrac{285-800y}{5}+70y-10z=28 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 855-2400y+500y+200z=325 \\ 57-160y+70y-10z=28 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -1900y+200z=-530 \\ -90y-10z=-29 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -190y+20z=-53 \\ -90y-10z=-29 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -190y+20z=-53 \\ -180y-20z=-58 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\overline{-370y \qquad =-111} \Rightarrow \boxed{y=\frac{111}{370}=0.30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{285-800\cdot 0.3}{300}=0.15} \Rightarrow 60\cdot 0.15+70\cdot 0.3-10z=28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9+21-10z=28 \Rightarrow -10z=-2 \Rightarrow \boxed{z=\frac{2}{10}=0.20}$$

Una unidad del primer fármaco cuesta 15 céntimos, una del segundo 30 céntimos y una del tercer fármaco cuesta 20 céntimos.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema: $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$.y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + m + m - m^3 - 1 - 1 = -m^3 + 3m - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^3 + 3m - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow -m^3 + 3m - 2 = (m-1)(-m^2 - m + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & -1 & 2 \\ 1 & & -1 & -2 \\ \hline & -1 & -2 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow -m^3 + 3m - 2 = (m-1)^2(-m-2)$$

El determinante se anula para $m = 1$ y $m = -2$. Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq 1 \;\; y \;\; m \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 1$

El sistema queda tan sencillo que lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \Rightarrow x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $m=-2$

Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^{a}+Fila\,1^{a}\\ \begin{array}{cccc}1 & -2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2 & -1\\ \hline 0 & -3 & 3 & 0\end{array}\rightarrow Nueva\,Fila\,2^{a}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^{a}+2\cdot Fila\,1^{a}\\ \begin{array}{cccc}-2 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -4 & 2\\ \hline 0 & 3 & -3 & 3\end{array}\rightarrow Nueva\,Fila\,3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^{a}+Fila\,2^{a}\\ \begin{array}{cccc}0 & 3 & -3 & 3\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\rightarrow Nueva\,Fila\,3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{array}{cccc}1 & 1 & -2 & 1\end{array}}^{A/B}\\ \begin{array}{cccc}0 & -3 & 3 & 0\end{array}\\ \underbrace{\begin{array}{ccc}0 & 0 & 0\end{array}}_{A}\ \ 3\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m\neq 1\ \ y\ \ m\neq -2$ el sistema es compatible determinado, si $m=1$ el sistema es compatible indeterminado y si $m=-2$ el sistema es incompatible.

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos).
Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2, 3.3.
3.1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\arctan(x+\pi)$, donde arctan denota la función arcotangente.
3.1.1.. Determine los intervalos de concavidad y de convexidad de f. Estudie y halle, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
3.1.2. Calcule

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{f(x)}{\sin x}$$

¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador $\sin x$ por $g(x)$, siendo $g(x)=\sin x \ si \ x\neq-\pi \ y \ g(-\pi)=2$?

3.1.1. Obtenemos la segunda derivada y averiguamos cuando se anula.

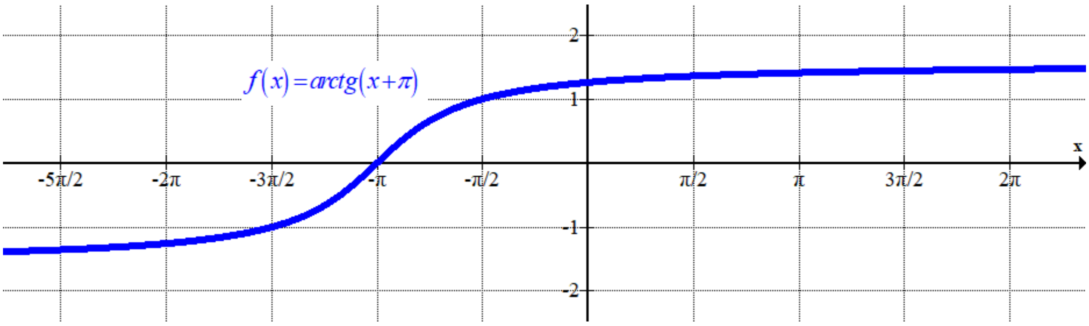
$$f(x)=arctg(x+\pi)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+(x+\pi)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{0-1\cdot 2(x+\pi)}{\left(1+(x+\pi)^2\right)^2}=\frac{-2(x+\pi)}{\left(1+(x+\pi)^2\right)^2}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{-2(x+\pi)}{\left(1+(x+\pi)^2\right)^2}=0\Rightarrow -2(x+\pi)=0\Rightarrow x+\pi=0\Rightarrow \boxed{x=-\pi}$$

Estudiamos la concavidad y convexidad de la función antes y después de $x=-\pi$.

- En el intervalo $(-\infty,-\pi)$ tomamos $x=-2\pi$ y la segunda derivada vale $f''(-2\pi)=\frac{-2(-2\pi+\pi)}{\left(1+(-2\pi+\pi)^2\right)^2}=\frac{2\pi}{\left(1+\pi^2\right)^2}>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $(-\infty,-\pi)$.
- En el intervalo $(-\pi,+\infty)$ tomamos $x=0$ y la segunda derivada vale $f''(0)=\frac{-2(0+\pi)}{\left(1+(0+\pi)^2\right)^2}=\frac{-2\pi}{\left(1+\pi^2\right)^2}<0$. La función es cóncava (∩) en el intervalo $(-\pi,+\infty)$.

La función es convexa antes de $x=-\pi$ y cóncava después. La función presenta un punto de inflexión en $x=-\pi$.
Para $x=-\pi$ tenemos que $f(-\pi)=arctg(-\pi+\pi)=arctg(0)=0$, por lo que el punto de inflexión tiene coordenadas $(-\pi,0)$.



3.1.2. Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{f(x)}{sen(x)}=\lim_{x\to-\pi}\frac{arctg(x+\pi)}{sen(x)}=\frac{arctg(-\pi+\pi)}{sen(-\pi)}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L\acute{}Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to-\pi}\frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos(x)}=\frac{\frac{1}{1+(-\pi+\pi)^2}}{\cos(-\pi)}=\frac{\frac{1}{1}}{-1}=\boxed{-1}$$

Si cambiamos en el denominador $sen(x)$ por $g(x)=sen(x)\ si\ x\neq-\pi\ y\ g(-\pi)=2$ el límite nos queda igual. La función $g(x)$ y la función $sen(x)$ solo difieren en $x=-\pi$. Esta variación puntual no cambia la tendencia de la función en el entorno de $x=-\pi$. El cálculo del límite seguiría el mismo proceso, obteniendo el mismo valor.

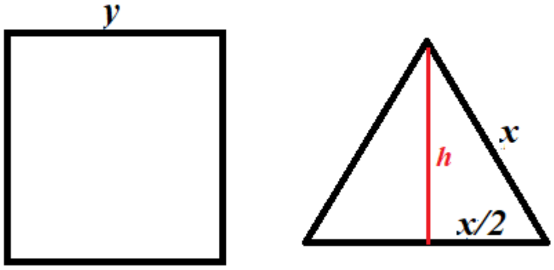
$$\lim_{x\to-\pi}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\pi}\frac{arctg(x+\pi)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to-\pi}arctg(x+\pi)}{\lim_{x\to-\pi}g(x)}=\frac{\lim_{x\to-\pi}arctg(x+\pi)}{\lim_{x\to-\pi}sen(x)}=$$

$$=\frac{arctg(-\pi+\pi)}{sen(-\pi)}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L\acute{}Hôpital)=\lim_{x\to-\pi}\frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{g\acute{}(x)}=$$

$$=\lim_{x\to-\pi}\frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{(sen(x))\acute{}}=\lim_{x\to-\pi}\frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos(x)}=\frac{\frac{1}{1+(-\pi+\pi)^2}}{\cos(-\pi)}=\frac{\frac{1}{1}}{-1}=\boxed{-1}$$

3.2. La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es igual a 100 metros. ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



El triángulo equilátero tiene de lado "x" y el cuadrado tiene de lado "y".
La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

$$4y+3x=100 \Rightarrow y=\frac{100-3x}{4}=25-\frac{3}{4}x$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos "h" y "$x/2$.

$$x^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+h^2 \Rightarrow h^2=x^2-\frac{x^2}{4}=\frac{3x^2}{4} \Rightarrow h=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Obtenemos la expresión de la suma de las áreas de cuadrado y triángulo.

$$A(x,y)=y^2+\frac{hx}{2} \Rightarrow \left\{h=\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\} \Rightarrow A(x,y)=y^2+\frac{x\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}=y^2+\frac{\sqrt{3}x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{y=25-\frac{3}{4}x\right\} \Rightarrow A(x)=\left(25-\frac{3}{4}x\right)^2+\frac{\sqrt{3}x^2}{4}=$$

$$=625+\frac{9}{16}x^2-\frac{150}{4}x+\frac{\sqrt{3}x^2}{4}=\frac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-600x+10000}{16}$$

Derivamos la función área y vemos cuando se anula.

$$A(x)=\frac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-600x+10000}{16} \Rightarrow A'(x)=\frac{2\left(9+4\sqrt{3}\right)x-600}{16}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{2\left(9+4\sqrt{3}\right)x-600}{16}=0 \Rightarrow 2\left(9+4\sqrt{3}\right)x-600=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{600}{18+8\sqrt{3}}\simeq 18.83}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de $x=18.83$ tomamos $x=10$ y la derivada vale

$A'(10)=\dfrac{2\left(9+4\sqrt{3}\right)10-600}{16}\simeq -17<0$. La función decrece antes de $x=18.83$.

- Después de $x=18.83$ tomamos $x=20$ y la derivada vale

  $A'(20)=\dfrac{2\left(9+4\sqrt{3}\right)20-600}{16}\simeq 2.32>0$. La función crece después de $x=18.83$.

Como la función decrece antes y crece después podemos afirmar que en $x=18.83$ la función tiene un mínimo.
Para este valor del lado del triángulo determinamos el valor del lado del cuadrado.

$$y=25-\frac{3}{4}\left(\frac{600}{18+8\sqrt{3}}\right)\simeq 10.87$$

El cuadrado debe tener 10.87 metros de lado y el triángulo equilátero debe tener 18.83 metros de lado para conseguir una suma de áreas del cuadrado y triángulo mínima.

3.3. Responda:

3.3.1. Calcule el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+2$ y $g(x)=|x|$.

3.3.2. Razone, sin calcular la integral, si $\int_1^2 xe^x dx$ tiene signo positivo o negativo. Luego, calcule la integral.

3.3.1. Averiguamos donde se cortan las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+2 \\ g(x)=|x|=\begin{cases}-x & si\ x<0 \\ x & si\ x>0\end{cases} \\ f(x)=g(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -x=-x^2+2 \to x^2-x-2=0 \to x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}= \\ =\dfrac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+3}{2}=2\notin(-\infty,0) \\ \dfrac{1-3}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases} \\ x=-x^2+2 \to x^2+x-2=0 \to x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}= \\ =\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{2}=\boxed{1=x} \\ \dfrac{-1-3}{2}=-2\notin(0,+\infty)\end{cases}\end{cases}$$

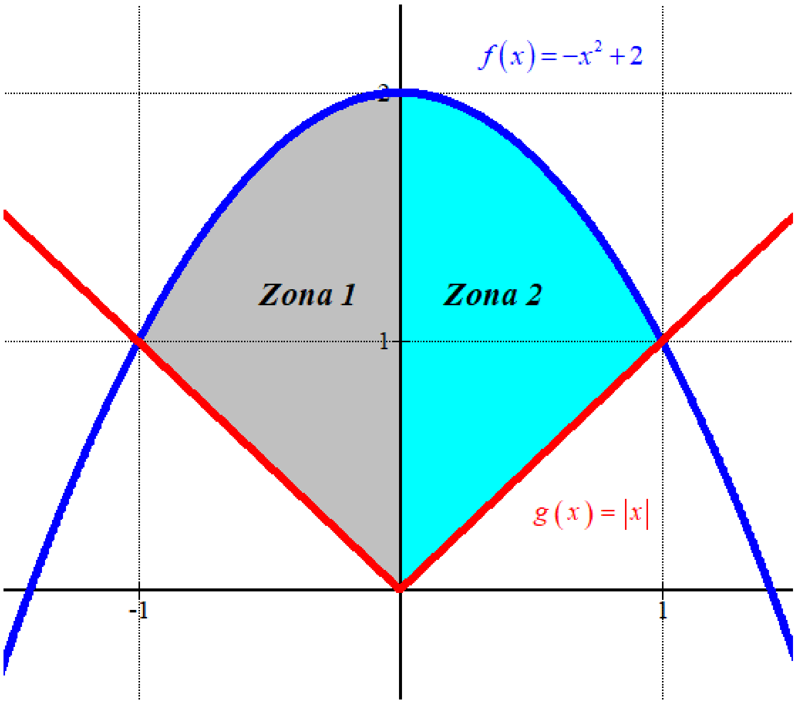
Las dos gráficas se cortan en dos puntos. Dibujamos las gráficas de las dos funciones y el recinto limitado por ellas.

$f(x)=-x^2+2$

x	$y=-x^2+2$
-2	-2
-1	1
0	2 *vértice*
1	1
2	-2

$g(x)=|x|=\begin{cases}-x & si\ x<0 \\ x & si\ x>0\end{cases}$

x	$y=\|x\|$
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	4



El área es la suma de área de la zona 1 y de la zona 2 del dibujo. Las dos funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas y como se aprecia los dos recintos tienen el mismo valor de área. El área total es el doble del área de la zona 2.

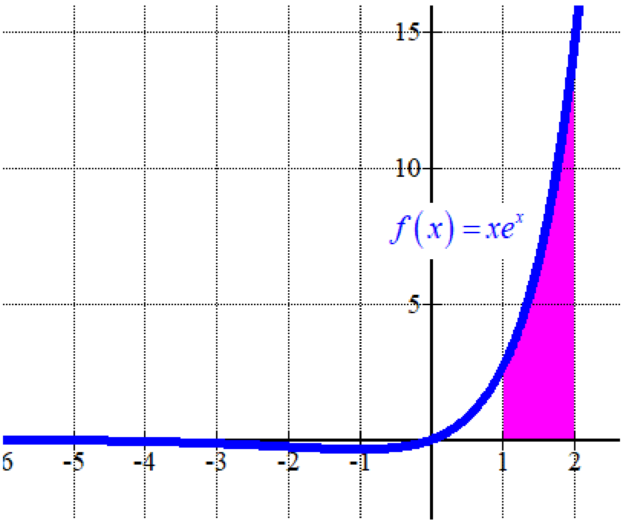
$$\text{Área} = 2\int_0^1 \left(-x^2+2\right) - x dx = 2\int_0^1 -x^2 - x + 2 dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 =$$

$$= 2\left(\left[-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2\cdot 1\right] - \left[\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 2\cdot 0\right]\right) = 2\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \boxed{\frac{7}{3} \simeq 2.333\ u^2}$$

El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2+2$ y $g(x) = |x|$ tiene un valor de $\frac{7}{3} \simeq 2.333$ unidades cuadradas.

3.3.2. La función $f(x) = xe^x$ es una función positiva en el intervalo $(1,2)$ por lo que la integral definida $\int_1^2 xe^x dx$ tendrá un valor positivo.

$$\left.\begin{array}{l} x\in(1,2) \rightarrow x>0 \\ e^x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = xe^x > 0, \text{ siendo } x\in(1,2)$$



Calculamos primero la integral indefinida $\int xe^x dx$.

$$\int xe^x dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array}\right\} = xe^x - \int e^x dx = \boxed{xe^x - e^x + K}$$

Calculamos el valor de la integral definida $\int_1^2 xe^x dx$

$$\int_1^2 xe^x dx = \left[xe^x - e^x\right]_1^2 = \left[2\cdot e^2 - e^2\right] - \left[1\cdot e^1 - e^1\right] = \boxed{e^2 \simeq 7.39}$$

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Responda:

4.1.1. Considere el triángulo de vértices $A(0,0,0)$, $B(2,4,0)$ y $C(5,0,0)$. Utilizando productos vectoriales, calcule su área. Luego, compruebe el resultado mediante otro método.

4.1.2. Calcule la distancia del punto $P(2,4,2)$ al plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $C(5,0,0)$ y $D(0,0,3)$.

4.1.1. Consideramos los vectores que unen el vértice A con los vértices B y C. El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{matrix} A(0,0,0) \\ B(2,4,0) \\ C(5,0,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB}=(2,4,0)-(0,0,0)=(2,4,0) \\ \overrightarrow{AC}=(5,0,0)-(0,0,0)=(5,0,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-20k=(0,0,-20)$$

$$Área\ \ ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{0^2+0^2+(-20)^2}}{2}=\frac{20}{2}=10\ u^2$$

El área del triángulo ABC vale 10 unidades cuadradas.

Calculamos el área utilizando conceptos geométricos.

Hallamos la longitud del lado BC.

$$\overrightarrow{BC}=(5,0,0)-(2,4,0)=(3,-4,0)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}=5.$$

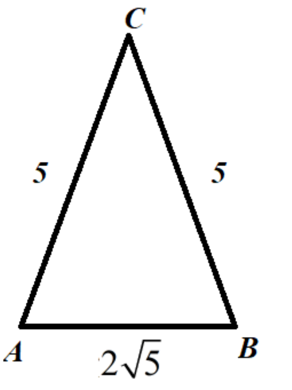
Hallamos la longitud del lado AC.

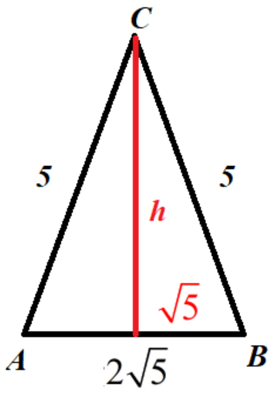
$$\overrightarrow{AC}=(5,0,0)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{5^2+0^2+0^2}=5$$

Hallamos la longitud del lado AB.

$$\overrightarrow{AB}=(2,4,0)-(0,0,0)=(2,4,0)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+4^2+0^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

Los lados BC y AC son iguales. El triángulo ABC es un triángulo isósceles como se indica en el dibujo.





Hallamos h con el teorema de Pitágoras: $h^2=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20\Rightarrow h=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

El área del triángulo ABC es la mitad del producto de la base ($2\sqrt{5}$) por la altura ($2\sqrt{5}$).

$$\acute{A}rea\ ABC = \frac{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2} = 10\ u^2$$

El área del triángulo ABC vale 10 unidades cuadradas.

4.1.2. Hallamos la ecuación del plano π que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $C(5,0,0)$ y $D(0,0,3)$.

$$\left.\begin{array}{l} A(0,0,0)\in\pi \\ C(5,0,0)\in\pi \\ D(0,0,3)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{AC}=(5,0,0)-(0,0,0)=(5,0,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AD}=(0,0,3)-(0,0,0)=(0,0,3) \\ A(0,0,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : y = 0}$$

El plano que contiene los puntos A, C y D tiene ecuación $\pi : y = 0$.

Hallamos la distancia del punto $P(2,4,2)$ al plano $\pi : y = 0$.

$$d(P,\pi) = \frac{|4|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = 4\ u$$

La distancia del punto $P(2,4,2)$ al plano $\pi : y = 0$ tiene un valor de 4 unidades.

4.2. Responda:

4.2.1. Se consideran el plano $\pi : ax + y + z = 1$ y la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$, donde a es un parámetro real.

− Estudie la posición relativa de π y r en función de a,
− obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares y
− razone si r puede estar contenida en π o no.

4.2.2. Si π es el plano de ecuación $-3x + y + z = 1$, diga qué valor debe tomar el parámetro b para que la recta $s : \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π.

4.2.1. Estudiamos el producto escalar del vector director de la recta: $\overrightarrow{v_r} = (2,3,3)$ y el vector normal del plano: $\vec{n} = (a,1,1)$. Averiguamos cuando se anula dicho producto escalar.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (2,3,3) \\ \vec{n} = (a,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = (a,1,1)(2,3,3) = 2a + 3 + 3 = 2a + 6$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

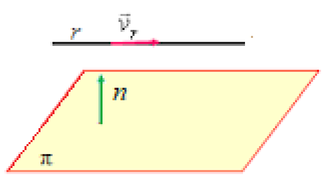
Nos planteamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. Si $a = -3$.

En este caso el producto escalar $\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r}$ vale cero, por lo que ambos vectores son perpendiculares. El plano y la recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.
Comprobamos si un punto cualquiera de la recta pertenece al plano. Tomamos el punto $P_r(1,0,-1) \in r$.

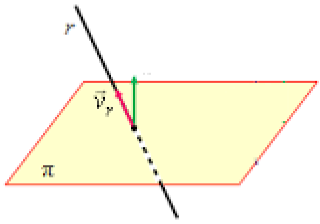
$$\left.\begin{array}{l} P_r(1,0,-1) \in r \\ \pi : -3x + y + z = 1 \\ ¿P_r \in \pi ? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿-3 \cdot 1 + 0 - 1 = 1? \Rightarrow ¡¡\textit{No es cierto}!!$$

El punto P_r no pertenece al plano. La recta r es paralela al plano π.



CASO 2. Si $a \neq -3$.

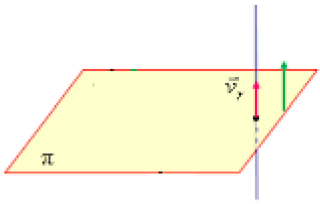
En este caso el producto escalar es distinto de cero, por lo que ambos vectores forman un ángulo distinto de 90º. La recta y el plano son secantes (coinciden en un punto).



Resumiendo: Si $a=-3$ el plano y la recta son paralelos. Si $a\neq -3$ el plano y la recta son secantes.
Para que la recta sea perpendicular al plano deben ser el vector normal del plano y el director de la recta de la misma dirección y sus coordenadas deben ser proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(2,3,3)\\ \vec{n}=(a,1,1)\\ \overrightarrow{v_r}\parallel\vec{n}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2}{a}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}\Rightarrow\frac{2}{a}=3\Rightarrow 2=3a\Rightarrow\boxed{a=\frac{2}{3}}$$

Para $a=\frac{2}{3}$ la recta es perpendicular al plano.



La recta no puede estar contenida en el plano, pues para $a=-3$ el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano, pero hemos visto que para este valor la recta es paralela y sus puntos no están en el plano.

4.2.2. Para que la recta "s" esté contenida en el plano el producto escalar del vector normal del plano y el vector director de la recta debe ser nulo. Además, los puntos de la recta deben estar contenidos en el plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:-3x+y+z=1\rightarrow\vec{n}=(-3,1,1)\\ s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-b}{3}=\dfrac{z+1}{3}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,3,3)\\ Q_s(1,b,-1)\end{array}\right.\\ ¿\vec{n}\perp\overrightarrow{u_s}?\rightarrow ¿\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_s}=0?\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_s}=(-3,1,1)(2,3,3)=-6+3+3=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi:-3x+y+z=1\\ Q_s(1,b,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow -3\cdot 1+b-1=1\Rightarrow -3+b-1=1\Rightarrow\boxed{b=5}$$

Para $b=5$ la recta s está contenida en el plano π.