

Nombre y apellidos: _____

NORMAS: As respostas deberán estar debidamente xustificadas. Se só se achega a solución, sen ningún tipo de explicación, a puntuación nese apartado será de cero puntos. Permítese o uso de calculadoras científicas non programables e que non teñan capacidade gráfica. En cada un dos exercicios, poderán descontarse ata 0.2 puntos pola falta de rigor matemático na resposta. Na avaluación dos exercicios, valoraranse, ademais: a. A utilización da linguaxe, notación e símbolos matemáticos adecuados. b. A utilización de argumentos, xustificacións e razoamentos coherentes. c. De ser o caso, a interpretación correcta da solución.

1. CA2.1 / CA2.2 (2 puntos) Calcule as seguintes integrais:

(0.5 puntos polo cálculo de cada primitiva)

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ b) $\int (\sin x)\sin(\cos x)dx$ c) $\int x^2 \sin x dx$ d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$

a)

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2+1=t \rightarrow 2xdx=dt \\ dx=\frac{dt}{2x} \end{array} \right\} = \int \cancel{2x} \sqrt{t} \frac{dt}{\cancel{2x}} = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} =$$

$$= \frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ t = x^2 + 1 \end{array} \right\} = \boxed{\frac{2}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + K}$$

b)

$$\int (\sin x)\sin(\cos x)dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{-\sin x} \end{array} \right\} = \int (\cancel{\sin x}) \sin(t) \frac{dt}{-\cancel{\sin x}} =$$

$$= -\int \sin(t) dt = \cos t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el} \\ \text{cambio de variable} \\ t = \cos x \end{array} \right\} = \boxed{\cos(\cos x) + K}$$

c)

$$\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = \sin x dx \rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right\} = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \dots$$

$$\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x)$$

$$\dots = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) = \boxed{-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + K}$$

d)

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$1 = A(x-2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 1=B \\ x=1 \rightarrow 1=-A \rightarrow A=-1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\dots = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = \boxed{-\ln|x-1| + \ln|x-2| + K}$$

2. CA2.1 / CA2.2 (2 puntos) Resolva:

a) (1 punto) Calcule as seguintes integrais:
(0.5 pontos polo cálculo de cada primitiva)

a.1) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx$

a.2) $\int \frac{x}{x^2 - 1} dx$

b) (1 punto) Calcule a seguinte integral: $\int (x+3)e^{-2x} dx$

(1 punto polo cálculo da primitiva)

a.1) Descomponemos la integral en suma de integrales inmediatas.

$$\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{3x^4}{x^2} dx + \int \frac{5x^2}{x^2} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \int 3x^2 dx + \int 5 dx + \int \frac{x^{1/2}}{x^2} dx =$$

$$= x^3 + 5x + \int x^{1/2-2} dx = x^3 + 5x + \int x^{-3/2} dx = x^3 + 5x + \frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1} =$$

$$= x^3 + 5x + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} = \boxed{x^3 + 5x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C}$$

a.2) $\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \boxed{\frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + c}$

b)

$$\int (x+3) e^{-2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x+3 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-2x} dx \rightarrow v = \int e^{-2x} dx = \frac{1}{-2} e^{-2x} \end{array} \right\} = (x+3) \frac{1}{-2} e^{-2x} - \int \frac{1}{-2} e^{-2x} dx =$$

$$= \frac{-x-3}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \frac{-x-3}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-2} e^{-2x} \right) = \frac{-x-3}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} =$$

$$= \frac{-2x-6}{4} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} = \boxed{\frac{-2x-7}{4} e^{-2x} + K}$$

3. CA2.1 / CA2.2 (2 puntos) Resolva:

(0.5 puntos polo cálculo de cada primitiva e 0.5 puntos polo cálculo do valor da integral definida)

a) (1 punto) Dada a seguinte función real de variable real definida sobre o seu

dominio como $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{2x^2}{3-3x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$, pídese calcular a seguinte integral

$$\int_{-1}^0 f(x) dx.$$

b) (1 punto) Calcule a seguinte integral:

$$\int_{\frac{1}{2}}^e \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx$$

a) En el intervalo $(-1, 0)$ la función es $\frac{2x^2}{3-3x}$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{2x^2}{3-3x} dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1-x} dx = \dots$$

x^2	$\overline{1-x}$
$-x^2 + x$	$-x-1$
$\hline x$	
$-x+1$	
$\hline 1$	
Tenemos que $\frac{x^2}{1-x} = -x-1 + \frac{1}{1-x}$	

$$\dots = \frac{2}{3} \int_{-1}^0 -x-1 + \frac{1}{1-x} dx = \frac{2}{3} \left(\int_{-1}^0 -x-1 dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} dx \right) = \frac{2}{3} \left[-\frac{x^2}{2} - x - \ln|1-x| \right]_{-1}^0 =$$

$$= \frac{2}{3} \left(\left[-\frac{0^2}{2} - 0 - \ln|1-0| \right] - \left[-\frac{(-1)^2}{2} - (-1) - \ln|1-(-1)| \right] \right) = \frac{2}{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{3}}$$

b) Aplicamos un cambio de variable para resolver la integral indefinida.

$$\int \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln 2x = t \Rightarrow \frac{2}{x} dx = dt \\ dx = \frac{x}{2} dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2}{3 \cancel{x}} \frac{\cancel{x}}{2} dt = \int \frac{t^2}{6} dt =$$

$$= \frac{1}{6} \int t^2 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{18} = \{\ln 2x = t\} = \frac{(\ln 2x)^3}{18} + C$$

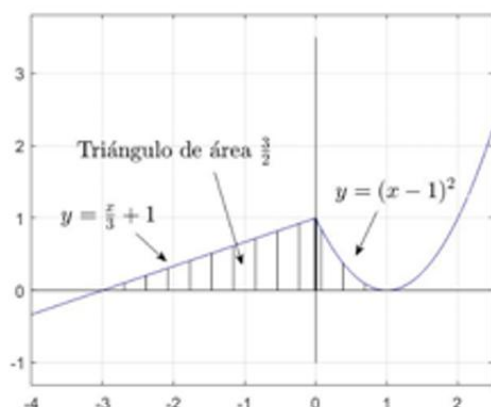
Aplico este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx = \left[\frac{(\ln 2x)^3}{18} \right]_{1/2}^{e/2} = \frac{\left(\ln 2 \frac{e}{2}\right)^3}{18} - \frac{\left(\ln 2 \frac{1}{2}\right)^3}{18} = \frac{(\ln e)^3 - (\ln 1)^3}{18} = \frac{1-0}{18} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

4. CA2.2 / CA4.5 (2 puntos) Resolva:

a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{se } x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

(1 punto: 0,25 polo cálculo dos límites de integración; 0,5 polo cálculo da integral definida e 0,25 por calcular á área)



Tendo en conta que $y = \frac{x}{3} + 1$ é a recta que pasa por $(-3,0)$ e por $(0,1)$ e que $y = (x-1)^2$ é a parábola de vértice $(1,0)$ que pasa polos puntos $(0,1)$ e $(2,1)$, chégase ao debuxo da esquerda, onde está raiada a rexión cuxa área se pide.

Agora é claro que esa área virá dada por

$$A = \frac{3}{2} + \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{3}{2} + \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{9+2}{6} = \frac{11}{6} u^2 = 1.8\bar{3} u^2,$$

onde u indica "unidade de lonxitude".

b) Calcule o volume da rexión xerada ao xirar a función $f(x) = x$ entre os puntos $x = 2$ e $x = 3$ con respecto ao eixe X .

(1 punto: 0,25 pola formulación; 0,5 polo cálculo da integral definida e 0,25 por calcular o volume)

Utilizamos la fórmula del volumen de un cuerpo de revolución: $Volumen = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

$$Volumen = \pi \int_2^3 (x)^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \pi \left(\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) = \boxed{\frac{19\pi}{3} u^3}$$

- 5. CA2.3 / CA4.6 (2 puntos)** Calcule a área da rexión delimitada polas gráficas das seguintes funcións:
(0,5 polo cálculo dos límites de integración; 1 polo cálculo da integral definida e 0,5 por calcular á área)

$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x$$

Averiguamos sus puntos de corte para establecer el comienzo y final de la región limitada por ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x \Rightarrow 0 = 3x^2 - 5x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-2)}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{5+7}{6} = 2 \\ \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

El área será el valor absoluto de la integral definida entre $-\frac{1}{3}$ y 2 de la diferencia de las funciones.

$$\int_{-\frac{1}{3}}^2 f(x) - g(x) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 2 + x - x^2 - (2x^2 - 4x) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 2 + x - x^2 - 2x^2 + 4x dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 -3x^2 + 5x + 2 dx =$$

$$= \left[-x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x \right]_{-\frac{1}{3}}^2 = \left[-2^3 + \frac{5}{2}2^2 + 2 \cdot 2 \right] - \left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) \right] =$$

$$= -8 + 10 + 4 - \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = \frac{343}{54} \approx 6.35$$

$\text{Área} = \left \int_{-\frac{1}{3}}^2 f(x) - g(x) dx \right = \frac{343}{54} \approx 6.35 \text{ u}^2$

Dibujamos el recinto como comprobación:

