

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 382

1. Área entre dos curvas

- Calcular el área comprendida entre las curvas f y g :

$$f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x - 1$$

$$g(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 4x - 1$$

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$f(x) = g(x) \rightarrow x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x - 1 = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 4x - 1 \rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = -2, x = 0, x = 1$$

Buscamos ahora la función diferencia:

$$d(x) = f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 2x$$

$$D(x) = \int d(x) dx = \int (x^3 + x^2 - 2x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + k$$

Calculamos ahora el área de cada uno de los tramos:

$$\int_{-2}^0 dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 = 0 - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{8}{3} u^2$$

$$\int_0^1 d(x) = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1 = -\frac{5}{12} - 0 \rightarrow \text{El área de este tramo es } \frac{5}{12} u^2$$

$$\text{El área total es } \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} u^2$$

2. Construcción de un polinomio definido mediante unas condiciones

- Hallar un polinomio de segundo grado, $P(x)$, que cumpla:

$$P(0) = P(2) = 0 \quad \int_0^1 P(x) dx = 1$$

Como $x = 0$ y $x = 2$ son raíces del polinomio, $P(x) = kx(x - 2) = kx^2 - 2kx$

$$\int_0^1 P(x) dx = \int_0^1 (kx^2 - 2kx) dx = \left[k \frac{x^3}{3} - kx^2 \right]_0^1 = \frac{k}{3} - k = -\frac{2k}{3} = 1 \rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

4. Volumen (giro alrededor del eje X)

- Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar alrededor del eje X la curva:

$$y = \frac{x^2}{2} + 1$$

entre las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^2 f(x)^2 dx = \pi \int_{-1}^2 \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)^2 dx = \\ &= \pi \int_{-1}^2 \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + 1 \right) dx = \pi \left[\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^2 = \\ &= \pi \left[\frac{94}{15} - \left(-\frac{83}{60} \right) \right] = 7,65\pi \text{ u}^3 \end{aligned}$$

