Exercicios do libro de texto- Integral definida – clase 28/11/2025

Página 383

18 **Halla el área limitada por la función $y = 2x - x^2$ y sus tangentes en los puntos en los que su gráfica corta al eje de abscisas.**

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $2x - x^2 = 0$. Son $x = 0$ y $x = 2$.

II. Calculamos la derivada de $f(x) = 2x - x^2$, que es $f'(x) = 2 - 2x$.

La tangente que pasa por (0, 0) tiene pendiente $f'(0) = 2$; por tanto, es $y = 2x$.

La tangente que pasa por (2, 0) tiene pendiente $f'(2) = -2$; por tanto, es $y = -2x + 4$.

III. Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: entre 0 y 1 y entre 1 y 2.

La función diferencia en el primer intervalo es:

$$f_1(x) = 2x - (2x - x^2) = x^2$$

y en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = -2x + 4 - (2x - x^2) = x^2 - 4x + 4$$

IV. Sus primitivas son:

$$G_1(x) = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

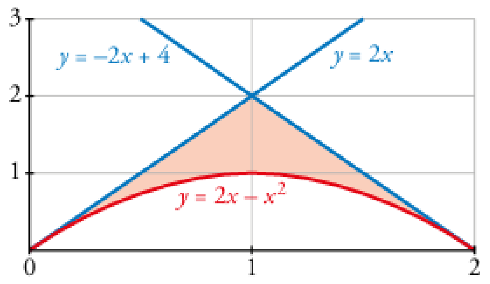
$$G_1(x) = \int (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

V. $G_1(0) = 0,\ G_1(1) = \frac{1}{3},\ G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3}$

$G_2(1) = \frac{7}{3},\ G_2(2) = \frac{8}{3},\ G_2(2) - G_2(1) = \frac{1}{3}$

El área buscada es: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\ u^2$.

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



20 **Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.**

I. Calculemos la ecuación de la recta tangente en el punto (0, 0); para ello, calculamos la derivada de nuestra función:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$y(0) = 1 \ \text{(pendiente)}$$

La recta tangente tiene por ecuación $y = x$.

II. Calculamos las soluciones de: $x^3 - 2x^2 + x = x$. Son $x = 0$ y $x = 2$ (límites de integración).

III. Obtenemos la función diferencia:

$$y = x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2$$

IV. Buscamos su primitiva:

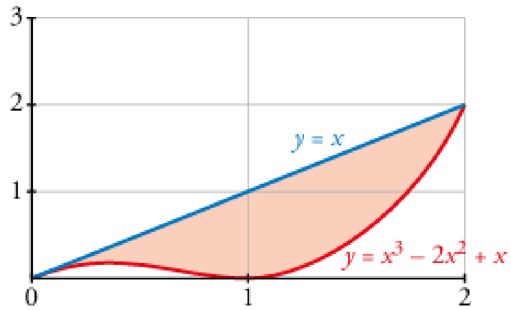
$$G(x) = \int (x^3 - 2x^2)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$$

V. $G(0) = 0$, $G(2) = \dfrac{-4}{3}$

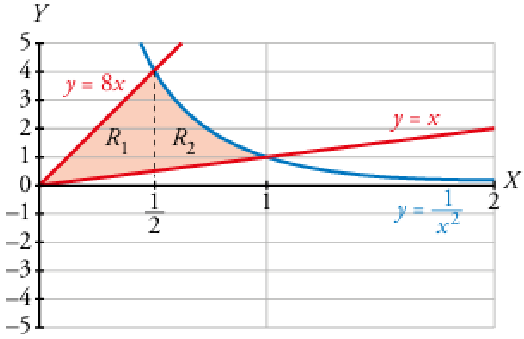
$$G(2) - G(0) = \frac{-4}{3}$$

El área buscada es: $\left|\dfrac{-4}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



30 **Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, y halla su área.**



I. Buscamos los puntos de intersección de las funciones:

$$\frac{1}{x^2} = x \rightarrow x^3 = 1.\ \text{Su solución es } x = 1.$$

$$\frac{1}{x^2} = 8x \rightarrow 8x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}.\ \text{Su solución es } x = \frac{1}{2}.$$

$$x = 8x \rightarrow 7x = 0.\ \text{Su solución es } x = 0.$$

Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{2}$ a 1. Corresponden a los recintos R_1 y R_2 señalados en el gráfico.

II. Hallamos la función diferencia en el primer intervalo:

$$f_1(x) = 8x - x = 7x$$

Y en el segundo intervalo:

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} - x$$

III. Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \int 7x\, dx = \frac{7x^2}{2}$$

$$G_2(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx = \frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2}$$

IV. $G_1(0) = 0$, $G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-17}{8},\ G_2(1) = \frac{-3}{2}$$

V. Área de R_1: $G\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(0) = \frac{7}{8}$

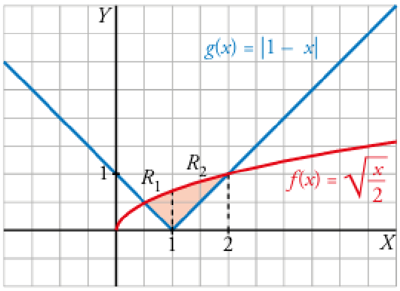
Área de R_2: $G_2(1) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$

El área buscada es $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ u².

33 **Si $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ y $g(x) = |1 - x|$:**

a) Dibuja las dos gráficas sobre unos mismos ejes y halla sus puntos de intersección.

b) Determina el área del recinto encerrado entre ambas gráficas.



a) Definimos $g(x)$ por intervalos: $g(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Buscamos los puntos de intersección resolviendo la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = (1 - x) \quad \text{o bien} \quad \sqrt{\frac{x}{2}} = (x - 1)$$

Al elevar al cuadrado cualquiera de las dos ecuaciones, llegamos a:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \begin{cases} x = 2 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

Sus soluciones son $\frac{1}{2}$ y 2 (límites de integración).

b) Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: de $\frac{1}{2}$ a 1 y de 1 a 2, porque en $x = 1$ cambia la definición de $g(x)$.

Tenemos, por tanto, dos recintos de integración, R_1 y R_2.

I. La función diferencia en el primer intervalo es:

$$h_1(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (1 - x)$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$h_2 = \sqrt{\frac{x}{2}} - (x - 1)$$

II. Sus primitivas son:

$$H_1(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + x - 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 + \frac{x^2}{2} - x$$

$$H_2(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} - x + 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $H_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}$; $H_1(1) = \frac{2\sqrt{2} - 3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

$H_2(1) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$; $H_2(2) = \frac{4}{3}$

IV. Área del recinto R_1: $H_1(1) - H_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24}$

Área del recinto R_2: $H_2(2) - H_2(1) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

El área buscada es $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$ u^2.

48 **Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa alrededor de *OX*.**

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \right)^2 dx = \pi \int_{-5}^{5} \left(1 - \frac{x^2}{25} \right) dx = \pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{75} \right]_{-5}^{5} = \frac{20\pi}{3} \text{ u}^3$$