

EJERCICIOS BLOQUE: ÁLGEBRA_CIUGA_2025-20

UD3.

MATRICES Y DETERMINANTES

UD4.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

EJERCICIO 1 UD3 EJERCICIO 2 UD4	ABAU_GALICIA_25_ORDINARIA PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2. 2.1. Responda a las dos cuestiones siguientes: 2.1.1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, halle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, donde I y 0 son las matrices identidad y cero, respectivamente. 2.1.2. Calcule la matriz cuadrada X tal que $XA = B$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Son iguales XA y AX? 2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema: $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$
EJERCICIO 3 UD3 EJERCICIO 4 UD4	ABAU_GALICIA_25_EXTRAORDINARIA PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2. 2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2.1.1. ¿Qué condición tiene que cumplir k para que A sea invertible? Calcule A^{-1} cuando sea posible. 2.1.2. Para $k = 0$, calcule la matriz X que satisfaga la igualdad $AX - A = B^2 + A^T$ siendo A^T la traspuesta de A. 2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema: $\begin{cases} x + my + z = m \\ x + (3-m)z = 2m \\ my + 2z = 3m \end{cases}$
EJERCICIO 5 UD3 EJERCICIO 6 UD4	ABAU_GALICIA_24_ORDINARIA PREGUNTA 1. Números e Álgebra. (2 puntos) Sexan A e B dúas matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. a) Calcule A^2. b) Calcule a matriz X que satisfai a igualdade $A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A+B)^T$ a trasposta de $(A+B)$. PREGUNTA 2. Números e Álgebra. (2 puntos) Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3, \\ 2mx + 3my + 2z = 5, \\ (m-4)y + mz = m. \end{cases}$ 1. Números e Álgebra (2 puntos) a) 0,75 puntos b) 1,25 puntos 2. Números e Álgebra (2 puntos) 0,5 por resolver $\det A = 0$, 0,5 polo estudo de cada un dos tres casos Nota: Se o resolve por Gauss, 1,25 por chegar ao sistema triangular equivalente, 0,25 por cada un dos tres casos
EJERCICIO 7 UD3 EJERCICIO 8 UD4	ABAU_GALICIA_24_EXTRAORDINARIA PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ dé respuesta a los dos apartados siguientes: a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2. b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$. PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos) Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = m \\ x - y + 2z = 2m \\ mx + 3z = m \end{cases}$ 1. Números e Álgebra (2 puntos) a) 1 punto b) 1 punto 2. Números e Álgebra (2 puntos) 0,5 por resolver $\det A = 0$, 0,5 polo estudo dos rangos, 0,5 polo estudo de cada un dos dous casos. Nota: Se o resolve por Gauss, 1 por chegar ao sistema triangular equivalente, 0,5 polas conclusións de cada un dos dous casos
EJERCICIO 9 UD3 EJERCICIO 10 UD4	ABAU_GALICIA_23_ORDINARIA 1. Números e Álgebra: Despexe a matriz X da ecuación $XA = A + XB$, se A e B son matrices cadradas tales que $A - B$ é invertible. Logo, calcule X se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, onde I é a matriz identidade de orde 2. 2. Números e Álgebra: Discuta, segundo os valores de m, o sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y - z = 1+m, \\ my - z = 1, \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5. \end{cases}$ 1. Números e Álgebra (2 puntos) 0,75 por despxear X, 0,5 por chegar a $B = -I$, 0,5 por calcular $(A - B)^{-1}$, 0,25 por concluír. 2. Números e Álgebra (2 puntos) 0,5 por resolver $\det A = 0$, 0,5 polo estudo de cada un dos tres casos. Se se fai por Gauss, 1,25 por chegar ao sistema triangular equivalente, 0,25 por cada un dos tres casos.
EJERCICIO 11 UD3 EJERCICIO 12 UD4	ABAU_GALICIA_23_EXTRAORDINARIA 1. Números e Álgebra: a) Calcule A se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. b) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de x, y e z sabendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que I é a matriz identidade. 2. Números e Álgebra: Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} (m+1)x + z = 1, \\ (m+1)x + y + z = m+1, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m. \end{cases}$

	1. Números e Álgebra (2 puntos) a) 0.75 puntos: 0.25 por despegar A, 0.25 por calcular B^{-1}, 0.25 por calcular A. Se se pensa en A como unha matriz incógnita $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: 0.5 por chegar ao sistema, 0.25 pola solución. b) 1.25 puntos: 0.25 polo cálculo de $\det(A - 3I)$, 0.25 por deducir que $x = 0$, 0.25 por calcular A^{-1}, 0.25 por chegar a $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix}$, 0.25 pola conclusión.
EJERCICIO 13 UD3 EJERCICIO 14 UD4	ABAU_GALICIA_22_ORDINARIA 1. Números e Álgebra Despeixe X da ecuación matricial $AB(X - I) = C$, onde I é a matriz identidade (asuma que o produto AB ten inversa). Logo, calcule X se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$ 2. Números e Álgebra Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + mz = 0. \end{cases}$ Só puntúan cinco das oito preguntas. 1. Números e Álgebra (2 puntos): 0.75 por despegar X, 0.5 por calcular $(AB)^{-1}$, e 0.75 por calcular X. 2. Números e Álgebra (2 puntos): 0.5 polo estudo do rango da matriz de coeficientes, 0.5 polo estudo do rango da matriz ampliada, 1 = 0.25×4 polas catro conclusións.
EJERCICIO 15 UD3 EJERCICIO 16 UD4	ABAU_GALICIA_22_EXTRAORDINARIA 1. Números e Álgebra a) Obteña a matriz antisimétrica A de orde 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Logo, calcule a súa inversa no caso de que exista. Nota: a_{ij} é o elemento que está na fila i e na columna j de A. b) Sexa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, ache os valores de b_{12} e de b_{22} sabendo que B non ten inversa e que $\det(A^{-1}B + A) = -1$. 2. Números e Álgebra Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$ 1. Números e Álgebra (2 puntos): a) 0.75 puntos: 0.25 por determinar a matriz A, 0.5 por calcular a súa inversa. b) 1.25 puntos: 0.25 por deducir que $b_{12} = 0$ a partir da singularidade de B, 0.5 por calcular $A^{-1}B + A$ e 0.5 por deducir da igualdade $\det(A^{-1}B + A) = -1$ que $b_{22} = 2$. 2. Números e Álgebra (2 puntos): 0.5 pola resolución da ecuación $\det A = 0$ (onde A é a matriz de coeficientes), 0.75 polo estudo dos rangos da matriz de coeficientes e da matriz ampliada, 0.75 = 0.25×3 polas conclusións (tres casos).
EJERCICIO 17 UD3 EJERCICIO 18 UD4	ABAU_GALICIA_21_ORDINARIA 1. Números e Álgebra: Sexa $A = (a_{ij})$ a matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 2, \\ (-1)^{(i-1)} & \text{se } i \neq 2. \end{cases}$ Explique se A e $A + I$ son ou non invertibles e calcule as inversas cando existan. (Nota: a_{ij} é o elemento de A que está na fila i e na columna j, e I é a matriz identidade.) 2. Números e Álgebra: Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$
EJERCICIO 19 UD3 EJERCICIO 20 UD4	ABAU_GALICIA_21_EXTRAORDINARIA 1. Números e Álgebra: Despeixe X na ecuación matricial $B(X - I) = A$, onde I é a matriz identidade e A e B son matrices cadradas, con B invertible. Logo, calcule X se $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$ 2. Números e Álgebra: Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$
EJERCICIO 21 UD3 EJERCICIO 22 UD4	ABAU_GALICIA_20_ORDINARIA 1. Números e Álgebra: Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Pídesse: a) Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: neste caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.) b) Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A + B)^T$ a trasposta de $A + B$. 2. Números e Álgebra: Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + my + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$ 1. Números e Álgebra (2 puntos) a) 1 punto: 0.25 puntos polo cálculo de A, 0.25 puntos polo cálculo de B e 0.5 puntos polo cálculo de $A^2 - B^2$. b) 1 punto: 0.5 puntos por despegar X e calcular a inversa que naturalmente xurde e 0.5 puntos polo cálculo final de X. 2. Números e Álgebra (2 puntos): 0.5 puntos por chegar a que os valores críticos son $m = \pm 1$ e 0.5 puntos polo estudo de cada un dos tres casos que se presentan.

EJERCICIO 1 UD3 EJERCICIO 2 UD4	ABAU_GALICIA_25_ORDINARIA PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2. 2.1. Responda a las dos cuestiones siguientes: 2.1.1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, halle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, donde I y 0 son las matrices identidad y cero, respectivamente. 2.1.2. Calcule la matriz cuadrada X tal que $XA = B$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Son iguales XA y AX? 2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema: $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$
---	---

2.1.1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, halle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, donde I y 0 son las matrices identidad y cero, respectivamente. 2.1.2. Calcule la matriz cuadrada X tal que $XA = B$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Son iguales XA y AX? 2.1. 2.1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$ $A^2 + \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 14 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 5 + 5\alpha = 0 \\ 2 + 2\alpha = 0 \\ 11 - \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\alpha = -1 \text{ e } \beta = -12.$ 2.1.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, [XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}].$ $\det A = 1, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$ $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$ $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B = XA.$ Logo $AX \neq XA$.	2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema: $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$ 2.2. $\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 & 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 1 & 1 & m & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m & m & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m & m-m^2 & m \end{array} \right) \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} \left(\begin{array}{ccc ccc} 0 & m-1 & 0 & 2-m & m-m^2 & m \\ 1 & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m & m-m^2 & m \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m & m-m^2 & m \\ 0 & 0 & 1-m & m-2 & m-m^2 & -m \end{pmatrix}$ $m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow m \in \{-2, 1\}.$ $m^2 + m - 2 = (m+2)(m-1).$ Sistema triangular equivalente: $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ (m-1)y + (1-m)z = 0 \\ (m+2)(m-1)z = m-1 \end{cases}$ Discusión: - Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é $z = \frac{1}{m+2}, \quad y = z = \frac{1}{m+2}, \quad x = 1 - y - mz = \frac{1}{m+2}.$ - Se $m = -2$, o sistema é incompatible, xa que a terceira ecuación queda $0 = -3$. - Se $m = 1$, temos $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións: $[z = \lambda, \quad y = \mu, \quad x = 1 - \mu - \lambda], \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$ SOLUCIÓN ALTERNATIVA: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A' \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)$, é seguro que $\text{se } m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \text{entón } \text{rank } A \geq 2 \text{ e } [\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0].$ É claro, por outra parte, que $\text{rank } A = 1$ cando $m = 1$, xa que quedan tres filas iguais, non nulas. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + m + m - m^3 - 1 - 1 = -m^3 + 3m - 2 = -(m^3 - 3m + 2).$ $-1 \left \begin{array}{ccc c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right , \text{ de onde } m^3 - 3m + 2 = (m-1)(m^2 + m - 2).$ $m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow m \in \{-2, 1\}.$ $m^2 + m - 2 = (m+2)(m-1).$ $\det A = -(m^3 - 3m + 2) = -(m+2)(m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-2, 1\}.$ Discusión: - Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A' = 3 = n^\circ$ de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado. - Caso $m = -2$: $\text{rank } A = 2$ e $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 1 - 4 - 1 - 1 = -9 \neq 0$, tense que $\text{rank } A' = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible. - Caso $m = 1$: $\text{rank } A = 1$ e $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\text{rank } A' = 1 = \text{rank } A < 3 = n^\circ$ de incógnitas, o sistema é compatible indeterminado.
---	--

EJERCICIO 3 UD3	ABAU_GALICIA_25_EXTRAORDINARIA PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos). Responda uno de estos apartados: 2.1. o 2.2.
	2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2.1.1. ¿Qué condición tiene que cumplir k para que A sea invertible? Calcule A^{-1} cuando sea posible. 2.1.2. Para $k = 0$, calcule la matriz X que satisfaga la igualdad $AX - A = B^2 + A^T$ siendo A^T la traspuesta de A. 2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema: $\begin{cases} x + my + z = m \\ x + (3-m)z = 2m \\ my + 2z = 3m \end{cases}$

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2.1.1. ¿Qué condición tiene que cumplir k para que A sea invertible? Calcule A^{-1} cuando sea posible. 2.1.2. Para $k = 0$, calcule la matriz X que satisfaga la igualdad $AX - A = B^2 + A^T$ siendo A^T la traspuesta de A. 2.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2.1.1. A é invertible se, e só se, $A \neq 0$. Neste caso, $ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 4k + 2 - 1 - 4k = 1$ Como é diferente de 0, existe inversa de A para calquera valor de k. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 4k-1 & 1-2k & -2 \\ -2k & k & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4k-1 & -2k & 2 \\ 1-2k & k & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$ 2.1.2. Para temos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Da ecuación $AX - A = B^2 + A^T \Rightarrow X = A^{-1}(B^2 + A^T + A)$. $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B^2 + A^T + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $X = A^{-1}(B^2 + A^T + A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$	2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema: $\begin{cases} x + my + z = m \\ x + (3-m)z = 2m \\ my + 2z = 3m \end{cases}$ 2.2. $\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & m & 1 & m & F_2 \leftrightarrow F_1 & 1 & m & 1 & m \\ 1 & 0 & 3-m & 2m & & 0 & m & 2 & 3m \\ 0 & m & 2 & 3m & F_3 - F_1 & 0 & -m & 2-m & m \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & m & 1 & m & F_3 + F_2 & 1 & m & 1 & m \\ 1 & 0 & 3-m & 2m & & 0 & m & 2 & 3m \\ 0 & 0 & 4-m & 4m & & 0 & 0 & 4-m & 4m \end{array} \right).$ Sistema triangular equivalente: $\begin{cases} x + my + z = m, \\ my + 2z = 3m, \\ (4-m)z = 4m. \end{cases}$ Discusión: - Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é $z = \frac{4m}{4-m}, y = \frac{3m-2z}{m}, x = m - z - my.$ - Se $m = 0$, temos $\begin{cases} x + z = 0, \\ 2z = 0, \\ 4z = 0. \end{cases}$ O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións: $\begin{cases} x = 0, \\ y = \lambda, \\ z = 0, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$ - Se $m = 4$, temos $\begin{cases} x + 4y + z = 4, \\ 4y + 2z = 12, \\ 0 = 16. \end{cases}$ O sistema é incompatible, porque a terceira ecuación non pode cumprirse. SOLUCIÓN ALTERNATIVA: $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} m & m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m - 2m - 3m + m^2 = m^2 - 4m = m(m-4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0,4\}.$ Discusión: - Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n$, de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado. - Caso $m = 0$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ao ser $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A$, tense que o sistema é compatible indeterminado. - Caso $m = 4$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 16 - 32 - 48 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.
--	---

EJERCICIO 5 UD3	ABAU_GALICIA_24_ORDINARIA PREGUNTA 1. Números e Álgebra. (2 puntos) Sean A e B dúas matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. a) Calcule A^2 . b) Calcule a matriz X que satisfai a igualdade $A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A+B)^T$ a trasposta de $(A+B)$. PREGUNTA 2. Números e Álgebra. (2 puntos) Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3, \\ 2mx + 3my + 2z = 5, \\ (m-4)y + mz = m. \end{cases}$ 1. Números e Álgebra (2 puntos) a) 0.75 puntos b) 1.25 puntos 2. Números e Álgebra (2 puntos) 0.5 por resolver $\det A = 0$, 0.5 polo estudo de cada un dos tres casos Nota: Se o resolve por Gauss, 1.25 por chegar ao sistema triangular equivalente, 0.25 por cada un dos tres casos
----------------------------------	--

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos) Sean A y B dos matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. a) Calcule A^2 . b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$. a) Resolvemos el sistema matricial planteado para obtener la expresión de las matrices A y B. $\begin{aligned} A + 2B &= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A + B &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 1}^\circ - \text{Ecuación 2}^\circ \Rightarrow 2B - B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Hemos obtenido $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculamos A^2 . $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 2+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ La matriz $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Despejamos X en la ecuación matricial planteada. $A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X \Rightarrow A^2X + 2X = (A+B)^T + 3I \Rightarrow$ $\Rightarrow (A^2 + 2I)X = (A+B)^T + 3I \Rightarrow X = (A^2 + 2I)^{-1}[(A+B)^T + 3I]$ Calculamos la expresión de la matriz X haciendo uso de lo obtenido en el apartado anterior. $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^2 + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $ A^2 + 2I = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$ $(A^2 + 2I)^{-1} = \frac{Adj\left(\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\right)}{ A^2 + 2I } = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $X = (A^2 + 2I)^{-1}[(A+B)^T + 3I] = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$ $X = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 21+3 & 0-15 \\ 0-6 & 0+30 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 24 & -15 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ -1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$ La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ -1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$.	PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos) Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3 \\ 2mx + 3my + 2z = 5 \\ (m-4)y + mz = m \end{cases}$ La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{pmatrix}$ Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A. $ A = \begin{vmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{vmatrix} = 3m^3 + 0 + 2m(m-4) - 0 - 2m^2(m+2) - 2m(m-4) =$ $= 3m^3 + 2m^2 - 8m - 2m^3 - 4m^2 - 2m^2 - 8m + 8m = m^3 - 4m^2$ $ A = 0 \Rightarrow m^3 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-4=0 \Rightarrow m=4 \end{cases}$ Analizamos tres casos por separado. CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 4$ En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución). CASO 2. $m = 0$ El sistema queda tan sencillo que lo intentamos resolver. $\begin{cases} 2y + z = 3 \\ -2z = 5 \\ -4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 3 \\ z = -5/2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 0 + \frac{-5}{2} = 3 \Rightarrow \frac{-5}{2} = 3 \text{ ¡imposible!}$ El sistema es incompatible (sin solución). CASO 3. $m = 4$ Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss. $A/B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 3 \\ 8 & 12 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Fila } 2^\circ - 2 \cdot \text{Fila } 1^\circ \\ -8 & -12 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Fila } 2^\circ \leftrightarrow \text{Fila } 3^\circ \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Fila } 2^\circ \leftrightarrow \text{Fila } 3^\circ \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Fila } 2^\circ \leftrightarrow \text{Fila } 3^\circ \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{cases}$ El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible . Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq 4$ el sistema es compatible determinado y si $m = 0$ o $m = 4$ el sistema es incompatible.
---	---

Resumiendo: Si $m \neq 3$ el sistema es compatible determinado y si $m = 3$ el sistema es incompatible.

EJERCICIO 9 UD3 EJERCICIO 10 UD4	ABAU_GALICIA_23_ORDINARIA 1. Números e Álgebra: Despeixe a matriz X da ecuación $XA = A + XB$, se A e B son matrices cadradas tales que $A - B$ é invertible. Logo, calcule X se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, onde I é a matriz identidade de orde 2. 2. Números e Álgebra: $\begin{cases} mx + (2+m^2)y & = 1+m, \\ my - z & = 1, \\ mx + 2y + (2m-4)z & = 5. \end{cases}$ Discuta, segundo os valores de m, o sistema 1. Números e Álgebra (2 puntos) 0.75 por despegar X, 0.5 por chegar a $B = -I$, 0.5 por calcular $(A - B)^{-1}$, 0.25 por concluir. 2. Números e Álgebra (2 puntos) 0.5 por resolver $\det A = 0$, 0.5 polo estudo de cada un dos tres casos. Se se fai por Gauss, 1.25 por chegar ao sistema triangular equivalente, 0.25 por cada un dos tres casos.
--	---

1. <u>Primeira parte:</u> $XA = A + XB \Leftrightarrow XA - XB = A \Leftrightarrow X(A - B) = A \Leftrightarrow X = A(A - B)^{-1}.$ <u>Segunda parte:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A,$ $B = (A^2 - A - I)^{-1} = (-I)^{-1} = -I,$ $A - B = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$ Como $\det(A - B) = 2$, $(A - B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$ Finalmente, $X = A(A - B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$	2. $\begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & m & -m^2 & 2m-4-m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + mF_2} \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m-m^2 & 1-4 \end{pmatrix}$ Sistema triangular equivalente: $\begin{cases} mx + (2+m^2)y & = 1+m, \\ my - z & = 1, \\ (m-4)z & = 4. \end{cases}$ Discusión: - Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é $z = \frac{4}{m-4}, \quad y = \frac{1+z}{m}, \quad x = \frac{1+m-(2+m^2)y}{m}.$ - Se $m = 0$, temos $\begin{cases} 2y & = 1, \\ -z & = 1, \\ -4z & = 4, \end{cases}$ e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións: $\begin{bmatrix} x = \lambda, & y = \frac{1}{2}, & z = -1, & \lambda \in \mathbb{R}. \end{bmatrix}$ - Se $m = 4$, o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda $0 = 4$. SOLUCIÓN ALTERNATIVA: $A = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+m \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$ $\text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$ Como $\begin{vmatrix} 2+m^2 & 0 \\ m & -1 \end{vmatrix} = -(2+m^2) \neq 0$, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$. $\det A = \begin{vmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{vmatrix} = m^2(2m-4) - m(2+m^2) + 2m = m[m(2m-4) - (2+m^2) + 2] = m[2m^2 - 4m - 2 - m^2 + 2] = m(m^2 - 4m) = m^2(m-4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 4\}.$ Discusión: - Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n$, de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado. - Caso $m = 0$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 2 + 8 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = n$, de incógnitas, polo que o sistema é compatible indeterminado. - Caso $m = 4$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 20 - 16 = -16 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.
---	---

EJERCICIO 11 UD3 EJERCICIO 12 UD4	ABAU_GALICIA_23_EXTRAORDINARIA 1. Números e Álgebra: a) Calcule A se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. b) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de x, y e z sabendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que I é a matriz identidade. 2. Números e Álgebra: Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} (m+1)x & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$ 1. Números e Álgebra (2 puntos) a) 0.75 puntos: 0.25 por despegar A, 0.25 por calcular B^{-1}, 0.25 por calcular A. Se se pensa en A como unha matriz incógnita $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: 0.5 por chegar ao sistema, 0.25 pola solución. b) 1.25 puntos: 0.25 polo cálculo de $\det(A - 3I)$, 0.25 por deducir que $x = 0$, 0.25 por calcular A^{-1}, 0.25 por chegar a $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 0.25 pola conclusión.
---	--

1. 1.a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1}$. Como $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, temos que $\det B = 1 + 1 = 2$ e, polo tanto, $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$ Finalmente, $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$ SOLUCIÓN ALTERNATIVA: Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix},$ $(AB)^T = \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} c-d=0 \\ c+d=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=3 \\ b=2-a \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2c=1 \\ c=d \end{cases}$ $\Leftrightarrow [a=3/2, b=1/2, c=1/2, d=1/2].$ Logo $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$ 1.b) Como $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, sabemos que $\det A = 3z - xy \neq 0$. $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{pmatrix}.$ Ao ser $\det(A - 3I) = -xy = 0$ e $y \neq 0$, necesariamente ten que ser $x = 0$. En consecuencia, tamén teremos $z \neq 0$, porque $\det A = 3z - xy = 3z \neq 0$. Neste punto, sábese que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ con y e z non nulos. Obteremos os valores de y e z da igualdade $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$ Posto que $\det A = 3z$, $A^{-1} = \frac{1}{3z} \begin{pmatrix} z & -y \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3z} \begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & 3 \end{pmatrix},$ conque $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$ de onde se deduce que $y = 1$ e $z = 1$. En resumo, os valores pedidos son $x = 0$, $y = 1$ e $z = 1$. Equivalentemente, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$ SOLUCIÓN ALTERNATIVA (que evita o cálculo da inversa): Procédase como na resolución anterior ata chegar a que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ con y e z non nulos. Agora nótese que a igualdade $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ implica que $(3z)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Polo tanto, $\begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} = (3z)I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3+3y & 3z \end{pmatrix}.$ de onde $y = 1$ e $z = 1$.	2. $\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1, F_3 - F_1} \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & m-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - mF_2} \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m^2+m-1 \end{pmatrix}.$ Sistema triangular equivalente: $\begin{cases} (m+1)x & + & z & = & 1, \\ & y & & = & m, \\ & (m-2)z & = & -m^2+m-1. \end{cases}$ Discusión: - Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é $z = \frac{-m^2+m-1}{m-2}, \quad y = m, \quad x = \frac{1-z}{m+1}.$ - Se $m = -1$, o sistema queda $\begin{cases} z & = & 1, \\ y & = & -1, \\ -3z & = & -3, \end{cases}$ que é compatible indeterminado, porque ten as seguintes infinitas solucións: $x \in \mathbb{R}, \quad y = -1, \quad z = 1.$ - Se $m = 2$, o sistema é incompatible, xa que a terceira ecuación queda $0 = -3$. SOLUCIÓN ALTERNATIVA: $A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m+1 \\ m \end{pmatrix}.$ Sabemos que $\text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}$. Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$. $\det A = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-1+m-1-m) = (m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 2\}.$ Discusión: - Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n$.º de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado. - Caso $m = -1$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 1 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = n$.º de incógnitas, situación na que o sistema é compatible indeterminado. - Caso $m = 2$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6+1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 - 2 - 2 = 5 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.
--	--

EJERCICIO 13 UD3 EJERCICIO 14 UD4	ABAU_GALICIA_22_ORDINARIA 1. Números e Álgebra Despeixe X da ecuación matricial $AB(X - I) = C$, onde I é a matriz identidade (asuma que o produto AB ten inversa). Logo, calcule X se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$ 2. Números e Álgebra Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$ Só puntúan cinco das oito preguntas. 1. Números e Álgebra (2 puntos): 0.75 por despegar X, 0.5 por calcular $(AB)^{-1}$, e 0.75 por calcular X. 2. Números e Álgebra (2 puntos): 0.5 polo estudo do rango da matriz de coeficientes, 0.5 polo estudo do rango da matriz ampliada, 1 = 0.25×4 polas catro conclusións.
---	--

1. $AB(X - I) = C \Leftrightarrow X - I = (AB)^{-1}C \Leftrightarrow X = I + (AB)^{-1}C.$ Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, • $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = 8 - 6 = 2.$ • $(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -8 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -8 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$ • $(AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$ Finalmente, $X = I + (AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$	2. A notación F_i indicará «fila i». Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quereira dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$. $\begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 0 & 0 & m^2-m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 0 & 3-m & m^2-m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 0 & m-3 & m^2-m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 0 & 0 & 2(m^2-m) \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 0 & 0 & m^2-m \end{pmatrix}.$ Sistema triangular equivalente: $\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ (m^2-m)z = 0. \end{cases}$ $m^2 - m = m(m-1) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 1\} \quad \text{e} \quad m-3 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$ Discusión: - Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é $z = 0, \quad y = \frac{1}{m-3}, \quad x = 0.$ - Se $m \in \{0, 1\}$, temos $\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y = 1, \\ 0 = 0. \end{cases}$ O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións: $\begin{cases} z = \lambda, & y = \frac{1}{m-3}, & x = -m\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$ - Se $m = 3$, temos $\begin{cases} x + 3z = 1, \\ 6z = 1, \\ 6z = 0. \end{cases}$ O sistema é incompatible, porque a segunda e a terceira ecuación non se poden cumprir á vez. SOLUCIÓN ALTERNATIVA – EJERCICIO 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$ Como $\begin{vmatrix} 1 & m-3 \\ 0 & m-3 \end{vmatrix} = m-3$ e $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & m^2-m \end{vmatrix} = m^2-m$ non se anulan á vez, tense que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$. $\det A = m^2(m-3) + (m-3)(m^2-m) - m(m-3) = (m-3)(m^2 + m^2 - m - m) = (m-3)(2m^2 - 2m) = 2m(m-1)(m-3) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 1, 3\}.$ Discusión: - Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n$.º de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado. - Caso $m = 0$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = n$.º de incógnitas, situación na que o sistema é compatible indeterminado. - Caso $m = 1$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = n$.º de incógnitas, situación na que o sistema é compatible indeterminado. - Caso $m = 3$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 - 6 - 9 = -12 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.
---	--

	ABAU_GALICIA_22_EXTRAORDINARIA 1. Números e Álgebra a) Obteña a matriz antisimétrica A de orde 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Logo, calcule a súa inversa no caso de que exista. Nota: a_{ij} é o elemento que está na fila i e na columna j de A. b) Sexa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, ache os valores de b_{12} e de b_{22} sabendo que B non ten inversa e que $\det(A^{-1}B + A) = -1$. 2. Números e Álgebra Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$ 1. Números e Álgebra (2 puntos): a) 0.75 puntos: 0.25 por determinar a matriz A, 0.5 por calcular a súa inversa. b) 1.25 puntos: 0.25 por deducir que $b_{12} = 0$ a partir da singularidade de B, 0.5 por calcular $A^{-1}B + A$ e 0.5 por deducir da igualdade $\det(A^{-1}B + A) = -1$ que $b_{22} = 2$. 2. Números e Álgebra (2 puntos): 0.5 pola resolución da ecuación $\det A = 0$ (onde A é a matriz de coeficientes), 0.75 polo estudo dos rangos da matriz de coeficientes e da matriz ampliada, 0.75 = 0.25×3 polas conclusións (tres casos).
--	--

1. 1.a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz pedida. Posto que $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$ 1.b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$. Como B non ten inversa, debe ser $\det B = -b_{12} = 0$, de onde $b_{12} = 0$. Logo $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}.$ $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$ $A^{-1}B + A = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1-b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$ Agora de $\det(A^{-1}B + A) = 1 - b_{22} = -1,$ dedúcese que $b_{22} = 2$.	2. $\begin{pmatrix} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ m+1 & m & m-1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ 0 & 0 & m-2 & -3 \end{pmatrix}.$ Sistema triangular equivalente: $\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m-2)z = -3. \end{cases}$ Discusión: - Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é $z = \frac{-3}{m-2}, \quad y = -2 - (m-2)z, \quad x = \frac{-my - z}{m+1}.$ - Se $m = -1$, temos $\begin{cases} -y + z = 0, \\ y - 3z = -2, \\ -3z = -3, \end{cases}$ e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións: $[x = \lambda, \quad y = 1, \quad z = 1], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$ - Se $m = 2$, o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda $0 = -3$. SOLUCIÓN ALTERNATIVA: $A = \begin{pmatrix} m+1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m-2 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} m+1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m-2 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$ Como $\begin{vmatrix} m+1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = m+1$ e $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} = m(m-2) - 1$ non se anulan á vez, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$. $\det A = \begin{vmatrix} m+1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m-2 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-1) + m(m-2)(m+1) - (m+1) - m(m-2)(m+1) = (m+1)(m-1) - (m+1) = (m+1)(m-1-1) = (m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 2\}.$ Discusión: - Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n$ de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado. - Caso $m = -1$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2 + 4 + 3 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = n$ de incógnitas, polo que o sistema é compatible indeterminado. - Caso $m = 2$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 4 = 3 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.
---	--

	ABAU_GALICIA_21_ORDINARIA 1. Números e Álgebra: Sexa $A = (a_{ij})$ a matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 2, \\ (-1)^j/(i-1) & \text{se } i \neq 2. \end{cases}$ Explique se A e $A + I$ son ou non invertibles e calcule as inversas cando existan. (Nota: a_{ij} é o elemento de A que está na fila i e na columna j , e I é a matriz identidade.) 2. Números e Álgebra: Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema $\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$
EJERCICIO 17 UD3 EJERCICIO 18 UD4	

1. $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$. Ao ter unha fila de zeros, a matriz A non ten inversa. $a_{21} = a_{22} = a_{23} = 1, a_{31} = -2, a_{32} = 2$ e $a_{33} = -2$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$ $\det(A + I) = -2 - 2 = -4 \neq 0$, polo que a matriz $A + I$ si que ten inversa. $(A + I)^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	MATEMÁTICAS II 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 0 & m+1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 0 & 0 & m-2 \end{pmatrix}$ Sistema triangular equivalente: $\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ (m-2)z = 0. \end{cases}$ Discusión: - Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é $z = 0, y = \frac{1}{m}, x = m - 2y$. - Se $m = 0$, temos $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3z = 1, \\ -2z = 0. \end{cases}$ O sistema é incompatible, porque as dúas últimas ecuacións non se poden cumprir á vez. - Se $m = 2$, temos $\begin{cases} x + 2y = 2, \\ 2y + 3z = 1, \\ 0 = 0. \end{cases}$ O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións: $\begin{cases} z = \lambda, & y = \frac{1-3\lambda}{2}, & x = 2 - (1-3\lambda) = 1 + 3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$ SOLUCIÓN ALTERNATIVA: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}. \text{rank } A \leq \text{rank } A' \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$ Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) + 6 - 3(m+2) = m^2 + m + 6 - 3m - 6 = m^2 - 2m = m(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 2\}.$ Discusión: - Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A' = 3 = n$,º de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado. - Caso $m = 0$: $\text{rank } A = 2$ e $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$, tense que $\text{rank } A' = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible. - Caso $m = 2$: $\text{rank } A = 2$ e $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 - 3 = 0$, tense que $\text{rank } A' = 2 = \text{rank } A < 3 = n$,º de incógnitas, situación na que o sistema é compatible indeterminado.
---	---

- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0$, tem-se que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situação na que **o sistema é incompatível**.

EJERCICIO 21 UD3 EJERCICIO 22 UD4	ABAU_GALICIA_20_ORDINARIA 1. Números e Álgebra: Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Pídesse: a) Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: neste caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.) b) Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A + B)^T$ a trasposta de $A + B$. 2. Números e Álgebra: Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + my = 0. \end{cases}$ 1. Números e Álgebra (2 puntos) a) 1 punto: 0.25 puntos polo cálculo de A, 0.25 puntos polo cálculo de B e 0.5 puntos polo cálculo de $A^2 - B^2$. b) 1 punto: 0.5 puntos por despezar X e calcular a inversa que naturalmente xurde e 0.5 puntos polo cálculo final de X. 2. Números e Álgebra (2 puntos): 0.5 puntos por chegar a que os valores críticos son $m = \pm 1$ e 0.5 puntos polo estudo de cada un dos tres casos que se presentan.
---	---

1. Números e Álgebra: Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Pídesse: a) Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: neste caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.) b) Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A + B)^T$ a trasposta de $A + B$. Solución: 1.a) Nótese que $2A = A + B + A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, de onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Polo tanto, $B = A + B - A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Como $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$, tense finalmente que $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$ 1.b) En primeiro lugar, imos despezar X: $XA + (A + B)^T = 2I + XB \Leftrightarrow X(A - B) = 2I - (A + B)^T \Leftrightarrow X = [2I - (A + B)^T](A - B)^{-1}.$ Non hai ningún problema no último paso porque $A - B$ é invertible: $\det(A - B) = 16 \neq 0$. - Cálculo de $2I - (A + B)^T$: como $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $2I - (A + B)^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$ - Cálculo de $(A - B)^{-1}$: ao ser $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $\det(A - B) = 16$, $(A - B)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$ Tras estes cálculos, resulta $X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$	2. Números e Álgebra: Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ x + my = 0. \end{cases}$ Solución: A notación F_i indicará "fila i". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) querrá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$. $\begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - mF_1, F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & m & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - mF_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & 0 & -1 + m^2 & -2m^2 \end{pmatrix}$ Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro: $\begin{cases} x + z = 0, \\ y - mz = 2m, \\ (-1 + m^2)z = -2m^2, \end{cases}$ para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión, que queda como segue: - Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é $z = \frac{-2m^2}{-1 + m^2}, \quad y = 2m + mz, \quad x = -z.$ - Se $m \in \{-1, 1\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación queda $0 = -2$. Solución alternativa: Sexan $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{pmatrix}$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, cúmprese que $2 \leq \text{rank } A \leq \text{rank } A' \leq 3$ e tamén, conseguintemente, que $\text{rank } A = 2$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que $\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 1\},$ a discusión do sistema queda como segue: - Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A' = 3 = n$, de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución). - Caso $m \in \{-1, 1\}$: $\text{rank } A = 2$. Por outra banda, ao ser $\begin{vmatrix} m & 0 & 2m \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & \pm 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mp 2 \neq 0$, sábese que $\text{rank } A' = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).
--	--

	ABAU_GALICIA_20_EXTRAOORDINARIA 1. Números e Álgebra: Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese: a) Despeixar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas. b) Resólvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. 2. Números e Álgebra: Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema: $\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m+3)x + my = 3m+6. \end{cases}$ 1. Números e Álgebra (2 puntos) a) 1 punto: 0.5 puntos por despeixar X e 0.5 puntos polas dimensións. b) 1 punto: 0.5 puntos por cálculos previos e 0.5 puntos pola obtención de X aplicando a fórmula obtida no apartado anterior. 2. Números e Álgebra (2 puntos): 0.5 puntos por cada un dos catro casos que se presentan.
--	---

1. Números e Álgebra: Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese: a) Despeixar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas. b) Resólvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Solución: 1.a) En primeiro lugar, despéxase X : $A^2X + AB = B \Leftrightarrow A^2X = B - AB \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1}(B - AB)$. É certo tamén que $X = (A^{-1})^2(B - AB)$, xa que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$. Analizanse agora as dimensións do esquema $\begin{matrix} A^2 & X & + & AB & = & B \\ 4 \times 4 & p \times q & & 4 \times 4 & r \times 3 & r \times 3 \end{matrix}$ dedúcese que $p = r = 4$ e que $q = 3$, conque X e B deben ter dimensión 4×3 . 1.b) Cálculo de $(A^2)^{-1}$: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\det A^2 = 10 - 9 = 1$. Logo $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cálculo de $B - AB$: $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, de onde $B - AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Cálculo de X: $X = (A^2)^{-1}(B - AB) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ Solución alternativa a 1.b): Dado que $B = -A$, tense $X = (A^2)^{-1}(B - AB) = (A^2)^{-1}(-A + A^2) = -A^{-1} + I$. Agora, como $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1$, a inversa de A vén dada por $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e entón $X = -A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$	Solución: A notación F_i indicará "fila i ". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$. $\left(\begin{array}{ccc ccc} m+3 & -m^2 & 3m & F_2 - F_1 & & \\ m+3 & m & 3m+6 & & F_1 & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc ccc} m+3 & -m^2 & 3m & & & \\ & m^2+m & 6 & m+3 & -m^2 & 3m \end{array} \right).$ Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro: $\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m^2+m)y = 6, \end{cases}$ para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión. Hai que notar que $m^2 + m = m(m+1) = 0$ se, e só se, $m \in \{-1, 0\}$ e que $m+3 = 0$ se, e só se, $m = -3$. Consequentemente: - Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é $y = \frac{6}{m^2+m}, \quad x = \frac{3m+m^2y}{m+3}.$ - Se $m = -3$, o sistema triangular redúcese a $\begin{cases} -9y = -9 \\ 6y = 6 \end{cases}$, e é por tanto compatible indeterminado (ten infinitas solucións), porque calquera par $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \end{cases}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, é solución. - Se $m \in \{-1, 0\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a segunda ecuación queda $0 = 6$. Solución alternativa: Sexan $A = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{pmatrix}$ e $A^* = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 3m \\ 3m+6 \end{vmatrix}$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $m+3$ e m non se anulan á vez, cúmprese que $1 \leq \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 2$ e tamén, consequentemente, que $\text{rank } A = 1$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que $\det A = \begin{vmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m + m^3 + 3m^2 = m^3 + 4m^2 + 3m = m(m^2 + 4m + 3) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow m \in \{-3, -1, 0\},$ a discusión do sistema queda como segue: - Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 2 = n$, de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución). - Caso $m = -3$: $\text{rank } A = 1$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, co cal tamén $\text{rank } A^* = 1$. Ao ser $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 1 < n$, de incógnitas, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións). - Caso $m = -1$: $\text{rank } A = 1$ e $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \end{vmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, sábese que $\text{rank } A^* = 2 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución). - Caso $m = 0$: $\text{rank } A = 1$ e $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 6 \end{vmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, sábese que $\text{rank } A^* = 2 > \text{rank } A$, situación na que, de novo, o sistema é incompatible (non ten solución).
---	--