TEMA 1. Matrices
Problemas Resueltos

Operaciones con matrices

1. Dadas $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & -9\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}$, halla dos números *a* y *b* para que se verifique que $a\cdot A+b\cdot B=C$.

Solución:

Escribiendo la ecuación extendida y operando, se tiene:

$$a\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a & 3a\\ -a & 7a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5b & -2b\\ 4b & -9b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+5b & 3a-2b\\ -a+4b & 7a-9b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+5b=-11 & 3a-2b=12\\ -a+4b=-14 & 7a-9b=41\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}.$$

Puede comprobarse el resultado:

$$2\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & 14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15 & -6\\ 12 & -27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}.$$

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, halla otras dos matrices del mismo orden, *X* e *Y*, que cumplan: $\begin{cases}2X-Y=A\\ X+3Y=2B\end{cases}$.

Solución:

Primero conviene resolver el sistema en función de *A* y *B*; después se hacen los cálculos.
Por el método de reducción:

$$\begin{cases}2X-Y=A\\ X+3Y=2B\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\\ 2E2\end{matrix}\begin{cases}2X-Y=A\\ 2X+6Y=4B\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\\ E2-E1\end{matrix}\begin{cases}2X-Y=A\\ 7Y=4B-A\end{cases}\Rightarrow Y=\frac{1}{7}(4B-A).$$

Sustituyendo este valor de *Y* en la segunda ecuación inicial, se tiene:

$$X+\frac{3}{7}(4B-A)=2B\Rightarrow X=\frac{3}{7}A+\frac{2}{7}B.$$

Por tanto:

$$X=\frac{3}{7}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}+\frac{2}{7}\cdot\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -18/7\\ 8/7 & -18/7\end{pmatrix}.$$

$$Y=\frac{1}{7}\cdot\left[4\cdot\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & -22/7\\ 2/7 & -8/7\end{pmatrix}.$$

3. (Propuesto en Selectividad 2011, Canarias)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. Resuelve el sistema

$$\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X+4Y=B\end{cases}.$$

Solución:

Aplicando el método de reducción para la resolución de sistemas:

$$\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X+4Y=B \end{cases} \underset{2E2-3E1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2X-3Y=A \\ 17Y=2B-3A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17Y = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si se elimina la matriz Y se tiene:

$$\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X+4Y=B \end{cases} \underset{3E2+4E1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2X-3Y=A \\ 17X=3B+4A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17X = 4\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Para las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A+(B+C)=(A+B)+C$ b) $A(B+C)=AB+AC$

c) $(A-B)C=AC-BC$ d) $A(BC)=(AB)C$

<u>Solución</u>:

a) $A+(B+C)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$

$(A+B)+C=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$

b) $A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$

$AB+AC=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$

c) $(A-B)C=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$

$AC-BC=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -19 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

d) $A(BC)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -19 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 23 \end{pmatrix}.$

$(AB)C=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 23 \end{pmatrix}.$

5. Calcula, si es posible, los productos *AB* y *BA* para las matrices siguientes:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$ f) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$

Solución:

a) $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

b) $AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 2\\ -16 & 2 & -2\end{pmatrix}$;

$BA=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 22 & -10\end{pmatrix}$.

c) $AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

En este caso puede observarse que *AB* = –*BA*.

d) $AB=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\to$ No puede realizarse. $BA=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 5\end{pmatrix}$.

e) $AB=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 3\end{pmatrix}=-11$; $BA=\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -12 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 6 & 9 & -3\end{pmatrix}$.

f) $AB=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2 & -14\\ -2 & -8 & 15\\ 5 & -14 & 6\end{pmatrix}$;

$BA=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -9 & 5\\ 27 & -10 & 1\\ -19 & 5 & 3\end{pmatrix}$.

6. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, halla los productos *AB* y *BA*. Además de que no se cumple la propiedad conmutativa, ¿qué otro comentario puede hacerse?

Solución:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\qquad BA=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 20\\ -5 & 10\end{pmatrix}$$

Además de que no se cumple la propiedad conmutativa, puede observarse la propiedad relativa a divisores de cero: el producto de dos matrices no nulas da la matriz nula.

7. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, comprueba que *AB* = *AC*, y, sin embargo, $B\neq C$.

Solución:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 0 & 10\end{pmatrix};\qquad AC=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 0 & 10\end{pmatrix}$$

En efecto, *AB* = *AC*, y, sin embargo, $B\neq C$. Esta advierte que en el cálculo matricial no puede simplificarse.

8. Para la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}$, calcula el valor de *a* para que $A^2-A=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}$.

Solución:

$$A^2-A=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}\Leftrightarrow A(A-I)=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 0 & -a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a^2-a & -1\\ 0 & a^2+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2-a=12\\ a^2+a=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4;\quad a=-3\\ a=4;\quad a=-5\end{cases}.$$

La única solución común es *a* = 4.

Potencia de una matriz

9. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

a) Demuestra que $A^2=2A-I_2$.

b) Aplicando el apartado a) halla la matriz A^6.

Solución:

a) Operando:

$$A^2=\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -16\\ 4 & -7\end{pmatrix};\quad 2A-I_2=2\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -16\\ 4 & -7\end{pmatrix}$$

Se cumple la igualdad indicada.

b) Si $A^2=2A-I_2\Rightarrow A^4=A^2\cdot A^2=(2A-I_2)\cdot(2A-I_2)=4A^2-4A+I_2^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow A^4 = 4(2A - I_2) - 4A + I_2^2 = 8A - 4I_2 - 4A + I_2 = 4A - 3I_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^6 = A^4 \cdot A^2 = (4A - 3I_2)(2A - I_2) = 8A^2 - 10A + 3I_2^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^6 = 8(2A - I_2) - 10A + 3I_2^2 = 16A - 8I_2 - 10A + 3I_2 = 6A - 5I_2 .$$

Luego:

$$A^6 = 6\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -48 \\ 12 & -23 \end{pmatrix}.$$

10. a) Halla las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que cumplen que $A^3 = A$.

b) Para esas matrices y para el valor $a = -2$, calcula $A^{10} + A^{11} + A^{12}$.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^2 b \\ ab^2 & 0 \end{pmatrix}$.

Para que $A^3 = A$ es necesario que $\begin{cases} a^2 b = a \\ ab^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0; \quad b = 0 \\ ab = 1; \quad b = 1/a \end{cases} \to$

La solución $a = b = 0$ no tiene interés, pues es evidente.

Por tanto, la matriz pedida es $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

b) Para $a = -2$, se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = A;\ A^4 = I \ldots;\ A^{10} = I;\ A^{11} = A;\ A^{12} = I .$$

Por tanto:

$$A^{10} + A^{11} + A^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, encuentra la expresión general de A^n. ¿Cuál es la matriz $A^{10} - 10A$?

Solución:

Segunda y tercera potencias:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puede hacerse la conjetura: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es evidente que se cumple para $n = 1$ (también para $n = 2$ y $n = 3$). Supuesto que se cumple hasta n hay que ver que se cumple para el siguiente, para $n + 1$.

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la conjetura es cierta y puede afirmarse que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En consecuencia,

$$A^{10}-10A=\begin{pmatrix}1 & 10a\\ 0 & 1\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 10a\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 10a\\ 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 0\\ 0 & -9\end{pmatrix}.$$

12. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, encuentra la expresión general de A^n. ¿Cuál es la matriz $A^{10}-10A$?

Solución:

Primeras potencias:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I;\qquad A^3=A^2\cdot A=I\cdot A=A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=I\cdot I=I;\qquad A^5=A^4\cdot A=I\cdot A=A$$

Por tanto, el valor de A^n depende de la paridad del exponente, siendo: $A^{2n}=I$ y $A^{2n-1}=A$.

En consecuencia,

$$A^{10}-10A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 10a\\ 0 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & -10a\\ 0 & 11\end{pmatrix}.$$

13. Halla la expresión general de A^n en los siguientes casos:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I\Rightarrow A^3=A^2\cdot A=I\cdot A=A\Rightarrow A^4=I\Rightarrow\ldots$

$\Rightarrow A^{2n}=I$ y $A^{2n-1}=A$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$;

$A^4=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$; $A^5=\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 5 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $A^6=\begin{pmatrix}1 & 8 & 0\\ 8 & 13 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\ldots$

No puede darse una fórmula para la potencia A^n, pero puede observarse que en los elementos a_{12}, a_{21} y a_{22} aparecen los términos de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…

c) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Puede establecerse la conjetura $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que efectivamente es cierta, pues se cumple para el siguiente: $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, comprueba que para todo *n* natural se cumple que

$A^{2n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:
Para $n = 1$ y $n = 2$ se cumplen las expresiones dadas:

$n = 1$: $A = A^{2\cdot 1-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^2 = A^{2\cdot 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$n = 2$: $A^3 = A^{2\cdot 2-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^4 = A^{2\cdot 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si se ve que $A^{2n} = A^{2n-1} \cdot A$ y que $A^{2n+1} = A^{2n} \cdot A$ ya estaría demostrado.
En efecto:

$$A^{2n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n-1+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{2n};$$

$$A^{2n} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 0 & 1 \\ n & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{2(n+1)-1} = A^{2n+1}.$$

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que para todo *n* natural se cumple que

$A^{2n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & -2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{2n} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:
Para $n = 1$ y $n = 2$ se cumplen las expresiones dadas, pues se obtiene:

$$n=1:\ A=A^{2\cdot 1-1}=\begin{pmatrix}2^{1-1} & 2^{1-1} & 0\\ 2^{1-1} & -2^{1-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ A^2=A^{2\cdot 1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$n=2:\ A^3=A^{2\cdot 2-1}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ A^4=A^{2\cdot 2}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Falta ver que $A^{2n}=A^{2n-1}\cdot A$ y que $A^{2n+1}=A^{2n}\cdot A$.
En efecto:

$$A^{2n-1}\cdot A=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1} & 0\\ 2^{n-1} & -2^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2^{n-1} & 0 & 0\\ 0 & 2\cdot 2^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A^{2n}$$

$$A^{2n}\cdot A=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n & 2^n & 0\\ 2^n & -2^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A^{2(n+1)-1}=A^{2n+1}.$$

$$A^{2n}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ n & 1 & 0\\ n & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ n+1 & 0 & 1\\ n & 1 & 0\end{pmatrix}=A^{2(n+1)-1}=A^{2n+1}.$$

Comprobación de algunas propiedades

16. Halla los valores de a para los que la matriz $A=\begin{pmatrix}a & a+1 & -3\\ a^2-1 & 2 & 4a\\ -3 & a^2+4 & -1\end{pmatrix}$ es simétrica.

Solución:

Debe cumplirse que $\begin{cases}a+1=a^2-1\\ 4a=a^2+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-a-2=0\\ a^2-4a+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2;a=-1\\ a=2\end{cases}$.

El valor de a que cumple las dos condiciones es $a = 2$.

17. Halla el valor de a para que sea ortogonal la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 0 & a\\ a & 0 & -a\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

(Recuerda: Una matriz A es ortogonal si $A\cdot A^t=I$).
Solución:

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix}a & 0 & a\\ a & 0 & -a\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & a & 0\\ 0 & 0 & 1\\ a & -a & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a^2 & 0 & 0\\ 0 & 2a^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2=1\Rightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

18. Demuestra que si las matrices A y B son ortogonales, entonces su producto también es ortogonal.

Solución:

Si A y B son ortogonales $\Rightarrow A\cdot A^t = I$ y $B\cdot B^t = I$.

Para que el producto AB sea ortogonal debe cumplirse que $(AB)\cdot(AB)^t = I$.

Como $(AB)\cdot B^t\cdot A^t = A\cdot\left(B\cdot B^t\right)\cdot A^t = A\cdot I\cdot A^t = A\cdot A^t = I$.

19. Demuestra que si P y Q son matrices cuadradas tales que $P\cdot Q = Q^2\cdot P$, entonces $(P\cdot Q)^2 = Q^6\cdot P^2$.

Solución:

$$(P\cdot Q)^2 = (P\cdot Q)\cdot(P\cdot Q) = \left(Q^2\cdot P\right)\cdot\left(Q^2\cdot P\right) = Q^2\cdot(P\cdot Q)\cdot(Q\cdot P) = Q^2\cdot\left(Q^2\cdot P\right)\cdot(Q\cdot P) =$$
$$= Q^4\cdot(P\cdot Q)\cdot P = Q^4\cdot\left(Q^2\cdot P\right)\cdot P = Q^6\cdot P^2.$$

20. Dada las matrices $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ y $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times m}$, demuestra las propiedades:

1) $\left(A^t\right)^t = A$ 2) $(A+B)^t = A^t + B^t$ 3) $(kA)^t = kA^t$

Solución:

1) $\left(A^t\right)^t = A \to$

$$A^t = \left(\left(a_{ij}\right)_{n\times m}\right)^t = \left(a_{ji}\right)_{m\times n} \Rightarrow \left(A^t\right)^t = \left(\left(a_{ji}\right)_{m\times n}\right)^t = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$$

2) $(A+B)^t = A^t + B^t \to$

$$(A+B)^t = \left(\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{n\times m}\right)^t = \left(a_{ji}+b_{ji}\right)_{m\times n} = \left(a_{ji}\right)_{m\times n} + \left(b_{ij}\right)_{m\times n} = A^t + B^t$$

3) $(kA)^t = kA^t \to$

$$(kA)^t = \left(\left(ka_{ij}\right)_{n\times m}\right)^t = \left(ka_{ji}\right)_{m\times n} = k\left(a_{ji}\right)_{m\times n} = kA^t$$

21. Comprueba las propiedades anteriores para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^t\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

2) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$;

$$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

3) $kA = \begin{pmatrix} k & -2k \\ 3k & 0 \\ 4k & -5k \end{pmatrix} \Rightarrow (kA)^t = \begin{pmatrix} k & 3k & 4k \\ -2k & 0 & -5k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = k\cdot A^t$.

22. Dada las matrices $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ y $B=\left(b_{rs}\right)_{m\times p}$, demuestra la propiedad 4) $\left(A\cdot B\right)^t = B^t\cdot A^t$

Solución:

Primero se verá que las matrices $\left(A\cdot B\right)^t$ y $B^t\cdot A^t$ tienen la misma dimensión.

En efecto:

Como $A\cdot B$ tiene dimensión $n\times p \Rightarrow \left(A\cdot B\right)^t$ tendrá dimensión $p\times n$.

Por otra parte, $B^t\cdot A^t$, es el producto de matrices de dimensión $(p\times m)$ por $(m\times n) \to$ su dimensión será $p\times n$.

El segundo lugar hay que ver que los elementos de $\left(A\cdot B\right)^t$ y de $B^t\cdot A^t$ son iguales.

En efecto:

El elemento c_{ji} de $\left(A\cdot B\right)^t$ es el elemento c_{ij} de $A\cdot B$, que se obtiene al multiplicar la fila i de A por la columna j de B: $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mj}$.

Por otra parte, el elemento e_{ji} de $B^t\cdot A^t$ se obtiene al multiplicar la fila j de B^t (que es la columna j de B) por la columna i de A^t (que es la fila i de A) $\Rightarrow e_{ji}=c_{ji}$.

Por tanto, los elementos de $\left(A\cdot B\right)^t$ y de $B^t\cdot A^t$ son iguales.

23. Comprueba la propiedad anterior para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & -6 & 3\end{pmatrix}$.

Solución:

4) $\left(A\cdot B\right)^t = B^t\cdot A^t$.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 11 & -6\\ 6 & -3 & 0\\ 28 & 26 & -15\end{pmatrix}\Rightarrow \left(AB\right)^t=\begin{pmatrix}10 & 6 & 28\\ 11 & -3 & 26\\ -6 & 0 & -15\end{pmatrix};$$

$$B^tA^t=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & -6\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 6 & 28\\ 11 & -3 & 26\\ -6 & 0 & -15\end{pmatrix}.$$

24. (Propuesto en Selectividad 2006, Castilla y León)

Halla las matrices A cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad: $A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}A$.

Solución:

Si $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ se desea que:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=a\\ b=b\\ c+d=a+c\\ d=b+d\end{cases}\Rightarrow b=0;\ a=d;\ c=c$$

La solución del sistema viene en función de dos indeterminadas, *a* y *c*. Luego, $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.

Una de las matrices es $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, que se obtiene dando los valores *a* = 3 y *c* = -2.

Rango de una matriz

25. Utilizando transformaciones de Gauss halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to A=\begin{matrix} \\ F2+2F1 \\ F3-5F1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \\ \cancel{0} & \cancel{8} & \cancel{-14} \end{pmatrix} \to$ rango = 2

b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to B=\begin{matrix} \\ F2-2F1 \\ F3-F1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{6} \end{pmatrix} \to$ Su rango es 2.

c) $C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to C=\begin{matrix} \\ F2-2F1 \\ F3+F1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \to$ Su rango es 2.

26. Determina, en función de los valores de *a*, el rango de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to A=\begin{matrix} \\ F2-2F1 \\ F3-F1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{a-1} \end{pmatrix} \to$ el rango es 2 para cualquier valor de *a*: en todos los casos, las filas 2 y 3 son proporcionales.

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to A=\begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \to$ el rango es 2 si *a* = 1; es 3 en los demás casos.

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \to A=\begin{matrix} \\ \\ F3-F1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix} \to$ el rango es 2 si *a* = ±1; es 3 en los demás casos.

27. Determina, en función de los valores de *a*, *b* y *c*, el rango de la matriz
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{pmatrix}.$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{pmatrix} \to A=\begin{array}{c}\\ \\ F3+F2\end{array}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a+b+c & a+b+c & a+b+c\end{pmatrix}.$$

Por tanto:
Si *a*, *b* y *c* son iguales (cualquiera que sea su valor) el rango es 1: las tres filas serán proporcionales.
Si *a*, *b* y *c* no son iguales (cualquiera que sea su valor) el rango es 2: las filas 1ª y 3ª siempre son proporcionales.

Inversa de una matriz

28. Halla por dos métodos distintos (directamente y aplicando el método de Gaus–Jordan) la inversa de cada una de las siguientes matrices, si existe.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

Solución:
a) Directamente:

Sea $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3c & b+3d\\ 2a+5c & 2b+5d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3c=1\\ 2a+5c=0\\ b+3d=0\\ 2b+5d=1\end{cases} \Rightarrow a=-5,\ c=2;\ b=3,\ d=-1 \to A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Por el método de Gauss–Jordan:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{array}\right) \to \begin{array}{c}\\ F2-2F1\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right) \to \begin{array}{c}\\ -F2\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c}F1-3F2\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

b) Directamente:

Sea $B^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Rightarrow B\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+c & 3b+d\\ -2a+2c & -2b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+c=1\\ -2a+2c=0\\ 3b+d=0\\ -2b+2d=1\end{cases} \Rightarrow a=1/4,\ c=1/4;\ b=-1/8,\ d=3/8 \to B^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & -1/8\\ 1/4 & 3/8\end{pmatrix}.$$

Por el método de Gauss–Jordan:

$$(B|I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} F1+F2 \\ \ \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \ \\ F2+2F1 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{matrix} \ \\ F2/8 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/8 & 3/8 \end{array}\right) \to \begin{matrix} F1-3F2 \\ \ \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 2/8 & 3/8 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

c) Directamente:

Sea $C^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow C\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+6c & 2b+6d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a+3c=1 \\ 2a+6c=0 \\ b+3d=0 \\ 2b+6d=1 \end{cases} \to$ El sistema es incompatible, lo que indica que la matriz no es invertible.

Por el método de Gauss–Jordan:

$(C|I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \ \\ F2-2F1 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$ En la matriz de la izquierda aparece una fila de ceros, lo que significa que la matriz no es invertible.

29. Aplicando el método de Gaus–Jordan halla, cuando exista la inversa de cada una de las siguientes matrices.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \ \\ \ \\ F3-F1 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{matrix} F1-F3 \\ F2-F3 \\ \ \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} F1-F2 \\ \ \\ \ \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La matriz inversa buscada es $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $$(B|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \ \\ F2-F1 \\ F3-2F1 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\underset{F3+F2}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&0&-4&-3&1&1\end{array}\right)\underset{(F3)/(-4)}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&0&1&3/4&-1/4&-1/4\end{array}\right)\to$$

$$\begin{array}{c}F1-F3\\ \to F2+2F3\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1/4&1/4&1/4\\0&1&0&1/2&1/2&-1/2\\0&0&1&3/4&-1/4&-1/4\end{array}\right)\underset{}{\overset{F1-F3}{\to}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/4&-1/4&3/4\\0&1&0&1/2&1/2&-1/2\\0&0&1&3/4&-1/4&-1/4\end{array}\right)$$

La matriz inversa buscada es $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/4&-1/4&3/4\\1/2&1/2&-1/2\\3/4&-1/4&-1/4\end{pmatrix}$.

c) $(C|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\-1&2&1&0&1&0\\1&0&3&0&0&1\end{array}\right)\to\begin{array}{c}\\F2+F1\\F3-F1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&1&2&1&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{array}\right)\to$

Como en la submatriz izquierda aparecen dos filas repetidas, la matriz C no tiene inversa.

30. Calcula la matriz A que haga que $\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$. Halla la solución de dos maneras:

1) Sin calcular la matriz inversa; 2) Calculándola.

<u>Solución</u>:

1) Si $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+5b&a+3b\\2c+5d&c+3d\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}1=2a+5b\\3=a+3b\\4=2c+5d\\2=c+3d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-12\\b=5\\c=2\\d=0\end{cases}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}-12&5\\2&0\end{pmatrix}.$$

2) De $\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}^{-1}=A$.

Cálculo de la inversa:

$$(M|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\5&3&0&1\end{array}\right)\to\overset{(F1)/2}{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/2&1/2&0\\5&3&0&1\end{array}\right)\to\underset{F2-5F1}{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/2&1/2&0\\0&1/2&-5/2&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\underset{2F2}{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/2&1/2&0\\0&1&-5&2\end{array}\right)\to\overset{F1-(F2)/2}{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-1\\0&1&-5&2\end{array}\right)=(I|M^{-1})$$

Por tanto, $A=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12&5\\2&0\end{pmatrix}$.

31. (Propuesto en Selectividad 1997, Madrid)

Calcula los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda&-2\\5&-\lambda\end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

Solución:

Si $A^{-1}=-A \Rightarrow A^{-1}\cdot A=-A\cdot A=I \Rightarrow \begin{pmatrix}-\lambda & 2\\ -5 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & -2\\ 5 & -\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-\lambda^2+10 & 0\\ 0 & 10-\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow 10-\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm 3.$$

32. (Propuesto en PAU 2018, Castilla La Mancha)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Halla razonadamente dos parámetros *a* y *b* tales que $A^2=aA+bI$.

b) Calcula razonadamente todas las matrices *X* que verifican que $(A-X)(A+X)=A^2-X^2$.

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $aA+bI=a\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & -3a\\ 0 & a+b\end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$A^2=aA+bI \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & -3a\\ 0 & a+b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}1=a+b\\ -6=-3a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}.$$

b) Para que $(A-X)(A+X)=A^2-X^2$ es necesario que $AX=XA$, pues

$$(A-X)(A+X)=A^2+AX-XA+X^2.$$

Sea $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, entonces:

$$AX=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-3c & b-3d\\ c & d\end{pmatrix};\quad XA=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -3a+b\\ c & -3c+d\end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix}a-3c & b-3d\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -3a+b\\ c & -3c+d\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a-3c=a\\ c=c\\ b-3d=-3a+b\\ d=-3c+d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=d\\ c=0\\ b=b\end{cases}.$$

Las matrices pedidas son de la forma: $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$, para cualquier valor de *a* y *b*.

33. (Propuesto en PAU 2017, Navarra)

Encuentra la matriz *X* que verifica $7A-A^7=BB^tX$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

Solución:

Se hacen algunas potencias de *A*.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix};\quad A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix};$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}; \; A^7 = A^3 \cdot A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

→ Aunque no se pide, se podría observar que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$7A - A^7 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}; \; BB^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se obtiene la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5a+2c=6 \\ 2a+2c=0 \\ 5b+2d=0 \\ 2b+2d=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-2 \\ b=-2 \\ d=5 \end{cases}.$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

34. (Propuesto en PAU 2017, País Vasco)

Calcular la potencia A^{2017} de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \; A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

(Se trata de una matriz periódica de periodo 3).

Como $A^4 = I \Rightarrow A^5 = A$; $A^6 = A^2$; $A^7 = A^3$; $A^8 = A^4 = I$. Es evidente que $A^{4n} = I$.

Por tanto, como 2017 = 4 · 504 + 1 ⇒ $A^{2017} = A^{4 \cdot 504} \cdot A = I \cdot A = A$.

35. (Propuesto en PAU 2105, Extremadura)

Determina la relación que debe existir entre los parámetros x e y para que las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ conmuten, es decir, para que $A \cdot B = B \cdot A$.

Solución:

$$A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+y & x^2+1 \\ 1+y^2 & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1+xy \\ yx+1 & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=2x; & x^2+1=1+xy \\ 1+y^2=xy+1; & x+y=2y \end{cases} \Rightarrow x=y.$$