

TEMA 11. La integral definida

Problemas Resueltos

Integrales definidas

1. Halla el valor de:

$$\text{a) } \int_{-2}^3 (x^2 + 2) dx \quad \text{b) } \int_0^7 \frac{4}{\sqrt{5x+1}} dx \quad \text{c) } \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx \quad \text{d) } \int_0^1 xe^{-3x^2+1} dx$$

Solución:

Para hallar una primitiva de cada función hay que ajustar constantes.

$$\text{a) } \int_{-2}^3 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^3 = 9 + 6 - \left(-\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{65}{3}.$$

$$\text{b) } \int_0^7 \frac{4}{\sqrt{5x+1}} dx = \frac{8}{5} \int_0^7 \frac{5}{2\sqrt{5x+1}} dx = \left(\frac{8}{5} \sqrt{5x+1} \right) \Big|_0^7 = \frac{8}{5} (6-1) = 8.$$

$$\text{c) } \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} 2x(1+x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} (8-1) = \frac{7}{3}.$$

$$\text{d) } \int_0^1 xe^{-3x^2+1} dx = -\frac{1}{6} \int_0^1 (-6xe^{-3x^2+1}) dx = \left(-\frac{1}{6} e^{-3x^2+1} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} (e^{-2} - e).$$

2. Calcula la integral $\int_1^e \ln(x^2) dx$.

Solución:

Aplicando una de las propiedades de los logaritmos $\int_1^e \ln(x^2) dx = \int_1^e 2 \ln(x) dx$.

Una primitiva de esa función puede calcularse por el método de partes.

Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$.

Luego:

$$2 \int \ln x dx = 2 \left(x \ln x - \int dx \right) = 2(x \ln x - x).$$

Por tanto:

$$\int_1^e 2 \ln x dx = 2 [x \ln x - x]_1^e = 2 [e \ln e - e - (1 \ln 1 - 1)] = 2.$$

3. Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$ calcula $\int_e^{e^2} \frac{3}{x(4 + \ln x)} dx$.

Solución:

$$\text{Si } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$$

Además: si $x = e$, $t = \ln e = 1$; y si $x = e^2$, $t = \ln e^2 = 2$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{3}{x(4 + \ln x)} dx &= \int_1^2 \frac{3}{(4 + \ln x) \cdot x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{3}{4 + t} dt = \\ &= 3(\ln(4 + t)) \Big|_1^2 = 3(\ln 6 - \ln 5) = 3 \ln \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

4. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 \arcsin x \, dx$ b) $\int_0^1 \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \, dx$

Solución:

En ambos casos, una primitiva de las funciones dadas se obtiene por el método de partes.

a) Para $\int \arcsin x \, dx$ se hace:

$$u = \arcsin x \text{ y } dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx; v = x.$$

Luego,

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = \left[x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

b) Para calcular $\int \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \, dx$ se toma:

$$u = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \text{ y } dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right) dx = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx; v = x.$$

Luego

$$\int \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \, dx = x \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = x \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Por tanto

$$\int_0^1 \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \, dx = \left(x \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \sqrt{x^2 + 1} \right) \Big|_0^1 = \ln(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2} - 1.$$

5. (Propuesto en Selectividad, Madrid) Calcula razonadamente las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \, dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

Solución:

a) La integral $\int e^{2x} \cos x \, dx$ hay que hacerla por partes.

Haciendo $u = e^{2x}$ y $\cos x dx = dv$, se tiene: $du = 2e^{2x} dx$; $v = \sin x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \sin x - \int 2e^{2x} \sin x \, dx.$$

La segunda integral, $\int 2e^{2x} \sin x \, dx$, también debe hacerse por el método de partes.

Tomando: $u = 2e^{2x}$ y $\sin x dx = dv \Rightarrow du = 4e^{2x} dx$ y $-\cos x = v$

Luego,

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \sin x - \left(-2e^{2x} \cos x + \int 4e^{2x} \cos x \, dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \int e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int 2e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{5} (e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \, dx &= \left[\frac{1}{5} (e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x) \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{5} [(e^{2\pi} \sin \pi + 2e^{2\pi} \cos \pi) - (e^0 \sin 0 + 2e^0 \cos 0)] = \frac{1}{5} (-2 - 2e^{2\pi}). \end{aligned}$$

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

Haciendo el cambio $\cos^2 x = t \Rightarrow 2 \cos x (-\sin x) dx = dt \Rightarrow 2 \sin x \cos x dx = -dt$.

Como $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, la integral inicial queda:

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} \, dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} \, dx = \int \frac{-1}{1+t} \, dt = -\ln t = -\ln(1 + \cos^2 x).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} \, dx &= \left(-\ln(1 + \cos^2 x) \right)_0^{\pi/2} = \\ &= -\ln(1 + \cos^2(\pi/2)) - (-\ln(1 + \cos^2 0)) = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

Cálculo de áreas de recintos planos

6. Calcula el área de la región limitada por $y = \frac{4}{x}$, el eje OX y las rectas $x = 1$, $x = 4$.

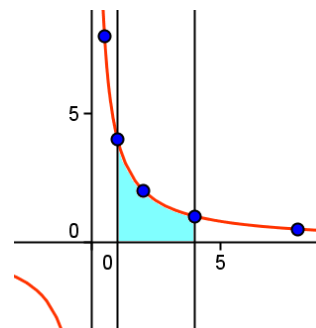
Solución:

La función $y = \frac{4}{x}$, que es una hipérbola equilátera, puede trazarse dando algunos puntos: (0,5, 8); (1, 4); (2, 2); (4, 1); (8, 0,5).

La región es la sombreada en la gráfica adjunta.

El área viene dada por la integral definida:

$$\int_1^4 \frac{4}{x} dx = [4 \ln x]_1^4 = 4 \ln 4 \text{ unidades cuadradas (u}^2\text{)}.$$



7. Halla la superficie del recinto plano encerrado entre la curva dada por la función $f(x) = xe^x$ y el eje OX , en el intervalo $[-2, 0]$.

Solución:

En el intervalo considerado, el signo de la función es negativo, por tanto, la superficie buscada viene dada por:

$$S = - \int_{-2}^0 xe^x dx.$$

Aunque la gráfica no es imprescindible, es bueno hacerla; al menos, esbozarla.

También podría decirse que $S = \left| \int_{-2}^0 xe^x dx \right|$.

La integral $\int xe^x dx$ se hace por partes.

Tomando:

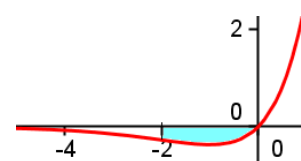
$$u = x \text{ y } dv = e^x dx \Rightarrow du = dx; v = e^x.$$

Se tiene:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

Luego:

$$S = - \int_{-2}^0 xe^x dx = - [xe^x - e^x]_{-2}^0 = 1 - 3e^{-2} \text{ u}^2.$$



8. Calcula el área encerrada entre la curva de la función $f(x) = \frac{x^2}{2+x}$ y el eje OX , en el intervalo $[0, 2]$.

Solución:

Como en el intervalo de integración la función es positiva, el área pedida es:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \frac{x^2}{2+x} dx = \int_0^2 \left(x - 2 + \frac{4}{2+x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln(2+x) \right]_0^2 \\ &= -2 + 4 \ln 4 - 4 \ln 2 = 4 \ln 2 - 2 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

9. Halla el área de la región plana limitada por la curva $y = \sin 2x$ y el eje OX en el intervalo $[0, \pi]$.

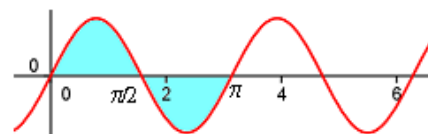
Solución:

La función $y = \sin 2x$ es periódica de periodo π .

Corta al eje OX en los puntos $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$.

Su gráfica se puede trazar a partir de la de la función seno.

El área pedida es la sombreada en la figura adjunta.



Luego:

$$S = 2 \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2 \text{ u}^2.$$

10. Halla el área de la región plana limitada por la curva $y = (\sin x)^2 \cos x$ y el eje OX en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Solución:

Como la función es positiva en el intervalo de estudio, la superficie buscada es:

$$S = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \cos x dx = \frac{1}{3} (\sin x)^3 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{1}{3} \text{ u}^2.$$

11. Halla el área encerrada entre la curva $y = \frac{1}{x}$ y el eje OX , entre $x = 1$ y $x = e^2$.

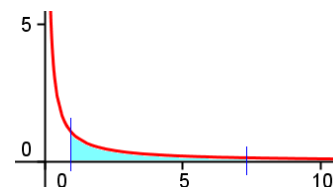
Solución:

El recinto es el sombreado de la figura adjunta.

(No es necesario dibujarlo, pues la función es positiva en el intervalo de integración).

El área es:

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2 \text{ u}^2.$$



12. Calcula el área de la región limitada por la función $y = \frac{4}{x}$ y la recta que pasa por los puntos $(1, 4)$ y $(4, 1)$.

Solución:

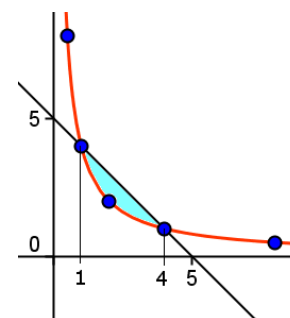
La recta que pasa por los puntos $(1, 4)$ y $(4, 1)$ de la curva tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-4}{1-4} \Leftrightarrow y = -x + 5.$$

El recinto es el sombreado en la figura adjunta.

El área de esa región viene dada por la integral definida:

$$\int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x} \right) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln x \right]_1^4 = \frac{15}{2} - 4 \ln 4 \text{ u}^2.$$



13. Calcula el área comprendida entre las parábolas $y = x^2 + x + 1$ e $y = -x^2 - 2x$.

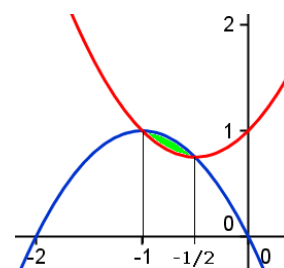
Solución:

El área es la del recinto sombreado en la figura adjunta. (Como las gráficas son parábolas pueden trazarse fácilmente, dando algunos valores).

Las curvas se cortan en $x = -1$ y en $x = -1/2$, que son las soluciones de la ecuación: $x^2 + x + 1 = -x^2 - 2x \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

Luego:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{-1/2} (-x^2 - 2x - (x^2 + x + 1)) dx = \int_{-1}^{-1/2} (-2x^2 - 3x - 1) dx = \\ &= \left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x \right) \Big|_{-1}^{-1/2} = \frac{1}{24} u^2. \end{aligned}$$



14. Halla el área del recinto plano comprendido entre las gráficas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

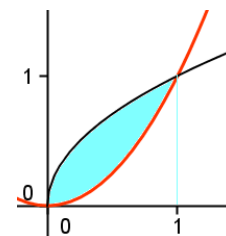
Solución:

El recinto plano comprendido entre las gráficas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, que puede trazarse dando algunos valores, es el adjunto.

Los puntos de corte se obtienen resolviendo la ecuación $x^2 = \sqrt{x}$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 1$. La curva que va por encima es $y = \sqrt{x}$.

Luego:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} u^2.$$



15. Calcula el valor de a para el que las tangentes a la curva $y = x^2 + a$ en los puntos de abscisa de valor absoluto 1, pasan por el origen de coordenadas. Halla el área del recinto limitado por la curva y las dos tangentes.

Solución:

La tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

En nuestro caso, como $f'(x) = 2x$, se tiene:

- En $x = 1$: $y - (1 + a) = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 1 + a$.

Como debe pasar por $(0, 0) \Rightarrow 0 = -1 + a \Rightarrow a = 1$.

La tangente es: $y = 2x$.

- En $x = -1$: $y - (1 + a) = -2(x + 1) \Leftrightarrow y = -2x - 1 + a$.

Por pasar por $(0, 0) \Rightarrow 0 = -1 + a \Rightarrow a = 1$.

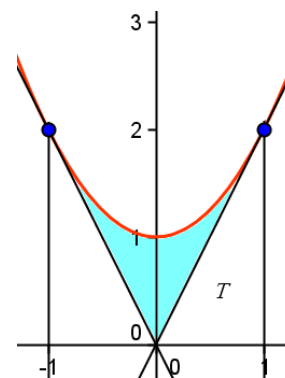
La tangente es: $y = -2x$.

El recinto limitado por la curva y las dos tangentes es el sombreado en la figura adjunta.

El área pedida vale:

$$A = 2 \left[\int_0^1 (x^2 + 1) dx - A_T \right] = 2 \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{3} u^2,$$

A_T es un triángulo de base 1 y altura 2.



16. Calcula el área encerrada entre las curvas dadas por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$.

Solución:

Para determinar el área interesa conocer los puntos de corte de las curvas y saber qué curva va por encima de la otra entre esos puntos de corte. También es conveniente hacer un esquema gráfico de la situación.

Puntos de corte:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow x^2 = x^3 - 2x^2 + 2x \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0. \end{aligned}$$

Las curvas se cortan cuando $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Posición de las curvas en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

Se hace la diferencia $g(x) - f(x)$, que es $g(x) - f(x) = x(x-1)x - 2$.

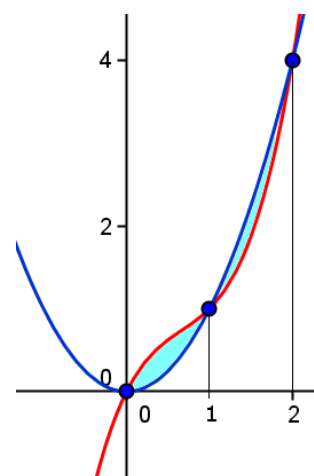
Luego:

- Si $0 < x < 1$, $g(x) - f(x) = x(x-1)x - 2 = (+) \cdot (-) \cdot (-) > 0 \rightarrow g(x)$ va por encima de $f(x)$
- Si $1 < x < 2$, $g(x) - f(x) = x(x-1)x - 2 = (+) \cdot (+) \cdot (-) < 0 \rightarrow g(x)$ va por debajo de $f(x)$

Por tanto, el área pedida viene dada por

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx + \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow S = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ u}^2. \end{aligned}$$

El esquema gráfico, que puede obtenerse calculando y representando algunos puntos de las curvas, es el adjunto.



17. Calcula el área de la región acotada del plano limitada por la curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ y la recta $y = x$.

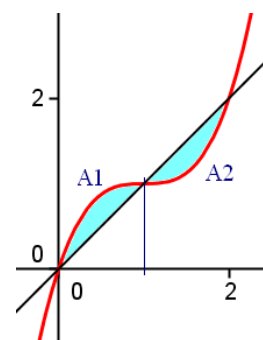
Solución:

La curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ y la recta $y = x$ se cortan cuando $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$, que son las soluciones de $x^3 - 3x^2 + 3x = x \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$.

La región acotada por ellas es la sombreada en la figura adjunta.

El área pedida es

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx = \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right) \Big|_1^2 = \\ &= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) + \left(-4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} - 1 + 1 \right) = \frac{1}{2} \text{ u}^2. \end{aligned}$$



18. Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = |x|$.

Solución:

Las curvas se cortan cuando $x^2 = |x|$.

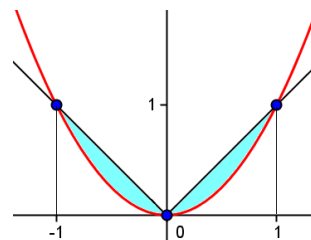
Sus soluciones son $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.

Las curvas son las adjuntas; pueden representarse dando valores:

$(-1, -1)$; $(0, 0)$; $(1, 1)$.

Por tanto:

$$S = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ u}^2.$$



19. De la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0, 0)$ y que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{4}$. Calcula a , b , c y d .

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow \text{pasa por } (0, 0) \Rightarrow f(0) = 0 = d.$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow \text{máximo en } x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \quad (*)$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \rightarrow \text{inflexión en } (0, 0) \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Luego, la función es:

$$f(x) = ax^3 + cx \text{ con } 3a + c = 0 \quad (*) \Rightarrow c = -3a \dots \Rightarrow f(x) = ax^3 - 3ax.$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \frac{5}{4} \Rightarrow \int_0^1 (ax^3 - 3ax) dx = \frac{5}{4} \Rightarrow \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = -1 \text{ y } c = 3 \end{aligned}$$

La función es: $f(x) = -x^3 + 3x$.

20. (Propuesto en Selectividad) Calcula el área determinada por las curvas de ecuaciones $y = 2x^2$ e $y = x^4 - 2x^2$, representadas en el dibujo adjunto.

Solución:

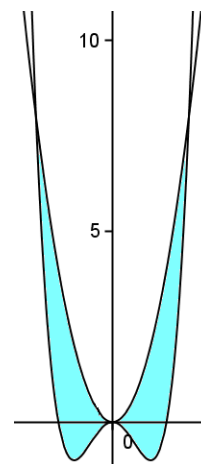
Los puntos de corte de las gráficas se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = x^4 - 2x^2 \\ y = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 0, x = 2.$$

La curva que va por encima, en el intervalo $[-2, 2]$, es $y = 2x^2$.

Por esto, y por la simetría de ambas curvas:

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^2 (2x^2 - x^4 + 2x^2) dx = 2 \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \\ &= 2 \left(\frac{4}{3} x^3 - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = 2 \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{128}{15} \text{ u}^2. \end{aligned}$$



21. Calcula el área del recinto plano limitado por la parábola $y^2 - x = 1$ y por la recta $y = x - 1$.

Solución:

El recinto es el sombreado en la figura adjunta. Puede dibujarse dando algunos puntos:

Para la parábola: $(-1, 0)$; $(0, -1)$ y $(0, 1)$; $(3, -2)$ y $(3, 2)$.

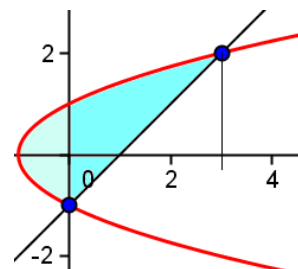
Para la recta: $(0, -1)$ y $(3, 2)$

El corte de la recta con la parábola se produce cuando

$$\sqrt{x+1} = x-1 \Rightarrow x=0, x=3.$$

El área será:

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} dx + \int_0^3 (\sqrt{x+1} - x + 1) dx = \\ &= \frac{4}{3} (x+1)^{3/2} \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{2}{3} (x+1)^{3/2} - \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^3 = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - \frac{9}{2} + 3 - \frac{2}{3} = \frac{9}{2} \text{ u}^2. \end{aligned}$$



22. Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

Los puntos de la gráfica son: $P = (-1, e^{-1})$ y $Q = (1, e)$.

En la figura se dibuja la curva y la cuerda.

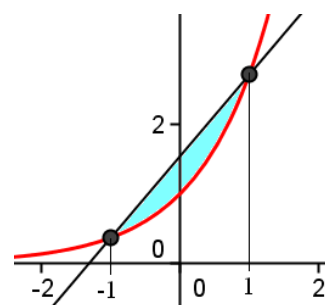
El área encerrada entre la curva y la cuerda es la de la parte sombreada en la figura. Su valor es la diferencia del área del trapecio y la que queda entre la curva y el eje OX .

El área del trapecio es: $A_{TRAP} = \frac{(e^{-1} + e) \cdot 2}{2} = e^{-1} + e$.

El área entre la curva y el eje OX es:

$$A = \int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e - e^{-1}$$

Por tanto, el área de la región sombreada es: $e^{-1} + e - (e - e^{-1}) = 2e^{-1} \text{ u}^2$.



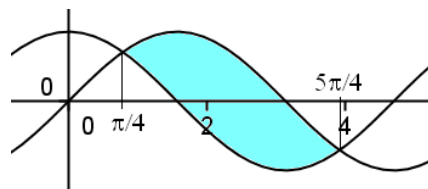
23. Halla el área de la región limitada por las curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ y las rectas $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

Solución:

La región es la sombreada en la figura adjunta.

En el intervalo $[\pi/4, 5\pi/4]$ la curva del seno va por encima de la del coseno. Por tanto, el área pedida viene dada por la integral definida

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx &= [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \\ &= -\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ u}^2. \end{aligned}$$



24. Dibuja el recinto finito del plano limitado por la recta $x = 1$, la parábola $y = x^2$ y la hipérbola $y = \frac{8}{x}$. Calcula su área.

Solución:

Las gráficas se trazan fácilmente dando valores.

Algunos puntos:

Parábola $y = x^2$: (0, 0); (1, 1), (2, 4).

Hipérbola $y = \frac{8}{x}$: (1, 8); (2, 4); (4, 2); (8, 1).

Puntos de corte de la recta $x = 1$ con las curvas:

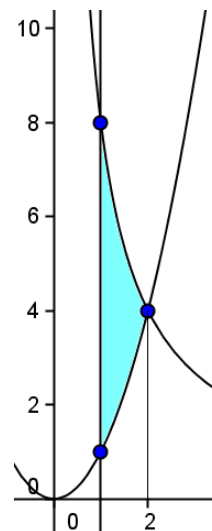
(1, 1) con la parábola; (1, 8) con la hipérbola

Corte entre las curvas:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 8/x \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{8}{x} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2.$$

El recinto es el sombreado en la figura anterior. Su área viene dada por:

$$A = \int_1^2 \left(\frac{8}{x} - x^2 \right) dx = \left(8 \ln x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 8 \ln 2 - \frac{8}{3} - \left(0 - \frac{1}{3} \right) = 8 \ln 2 - \frac{7}{3} \text{ u}^2.$$



25. (Propuesto en Selectividad, Extremadura)

a) Calcula los puntos de corte de la recta $2y - x = 3$ y de la recta $y = 1$ con la rama hipérbola $xy = 2$, $x > 0$.

b) Dibuja el recinto plano limitado por las tres curvas del apartado anterior.

c) Calcula el área de dicho recinto.

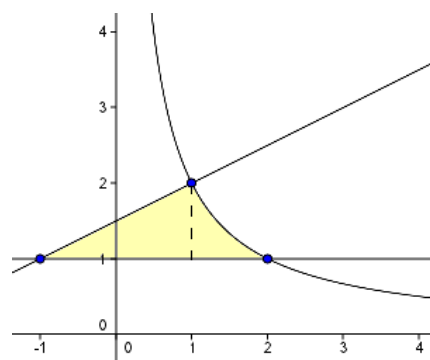
Solución:

a) Los puntos de corte de la curva con cada una de las rectas se obtienen resolviendo los sistemas:

$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow (-1, 1); \begin{cases} 2y - x = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \rightarrow (1, 2);$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow (2, 1).$$

b) Su gráfica es la adjunta. Para representar cada curva basta con dar algunos valores.



c) El recinto sombreado puede descomponerse en dos partes: el triángulo rectángulo de la izquierda, cuya área vale 1 u^2 ; y el “triángulo” curvo de la derecha, cuya área se calcula por la integral definida

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) dx = [2 \ln x - x]_1^2 = 2 \ln 2 - 2 - (2 \ln 1 - 1) = 2 \ln 2 - 1 \text{ u}^2.$$

Por tanto, el área total del recinto vale $2 \ln 2 \text{ u}^2$.

26. Halla el área del recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 0$.

Solución:

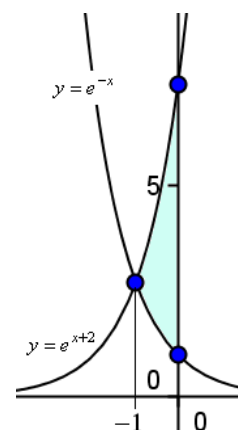
El recinto pedido es el sombreado en la figura adjunta.

Corte de las curvas:

$$e^{x+2} = e^{-x} \Rightarrow x = -1.$$

El área viene dada por:

$$\int_{-1}^0 (e^{x+2} - e^{-x}) dx = (e^{x+2} + e^{-x}) \Big|_{-1}^0 = e^2 + e^0 - e^1 - e^1 = e^2 - 2e + 1.$$



27. (Propuesto en Selectividad, Navarra)

Dadas las funciones $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \frac{4}{x^2}$, calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

Ambas gráficas pueden dibujarse dando algunos pares de valores.

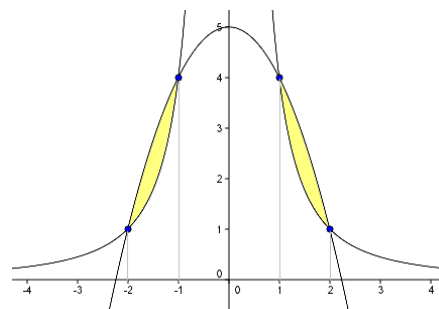
Se cortan en la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = 5 - x^2 \\ y = 4/x^2 \end{cases} \Rightarrow 5 - x^2 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1; \pm 2.$$

Los puntos de corte son:

$$(-2, 1); (-1, 4); (1, 4); (2, 1)$$



La región es la sombreada en la figura adjunta. Su área viene dada por:

$$A = \int_{-2}^{-1} \left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2} \right) dx + \int_{-1}^1 \left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2} \right) dx = 2 \int_1^2 \left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2} \right) dx =$$

$$= 2 \left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x} \right]_1^2 = 2 \left[\left(10 - \frac{8}{3} + 2 \right) - \left(5 - \frac{1}{3} + 4 \right) \right] = 2 \left(3 - \frac{7}{3} \right) = \frac{4}{3} \text{ u}^2.$$

Teorema fundamental del cálculo integral

28. Aplicando el teorema fundamental del cálculo, halla los valores de las constantes a , b , c y d , sabiendo que:

$$\int_0^x (t^3 - t + 1) e^t dt = (ax^3 + bx^2 + cx + d) e^x$$

Solución:

El teorema fundamental del cálculo integral dice:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ se define como $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, entonces $F(x)$ es derivable en $[a, b]$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

Por tanto, si $\int_0^x (t^3 - t + 1) e^t dt = (ax^3 + bx^2 + cx + d) e^x \Rightarrow F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) e^x$ es una primitiva de $f(x) = (x^3 - x + 1) e^x$.

Esto es: $F'(x) = [(ax^3 + bx^2 + cx + d) e^x]' = (x^3 - x + 1) e^x$.

Luego:

$$\begin{aligned} (3ax^2 + 2bx + c) e^x + (ax^3 + bx^2 + cx + d) e^x &= (x^3 - x + 1) e^x \Rightarrow \\ \Rightarrow (ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + (c + d)) e^x &= (x^3 - x + 1) e^x. \end{aligned}$$

Identificando coeficientes se obtiene: $a = 1$; $b = -3$; $c = 5$; $d = -4$.

29. (Propuesto en Selectividad)

Halla los puntos donde se anula la derivada de la función $f(x) = -2x + \int_0^{2x} e^{(t^2 - 10t + 24)} dt$.

Solución:

$$\text{Sea } g(x) = \int_0^{2x} e^{(t^2 - 10t + 24)} dt.$$

Por el teorema fundamental del cálculo integral se tiene:

$$g(x) = \int_0^{2x} e^{(t^2 - 10t + 24)} dt = G(t) \Big|_0^{2x} = G(2x) - G(0) \rightarrow g(x) = G(2x) - G(0),$$

siendo $G'(t) = e^{t^2 - 10t + 24}$.

Derivando:

$$g(x) = G(2x) - G(0) \Rightarrow g'(x) = (G(2x) - G(0))' = G'(2x) \cdot 2 = 2e^{4x^2 - 20x + 24}.$$

Con esto, como $f(x) = -2x + g(x)$, se tendrá:

$$f'(x) = -2 + g'(x) = -2 + 2e^{4x^2 - 20x + 24}.$$

Si $f'(x) = 0$, entonces:

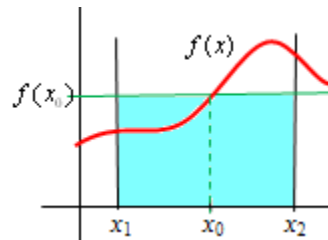
$$-2 + 2e^{4x^2 - 20x + 24} = 0 \Rightarrow 2 = 2e^{4x^2 - 20x + 24} \Rightarrow 4x^2 - 20x + 24 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 3$$

30. Si f es una función continua en el intervalo $[-2, 2]$ tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_1^2 f(t)dt$, ¿se puede asegurar que existen dos números, b y c pertenecientes a $[-2, 2]$, tales que $b \leq -1$, $c \geq 1$ y $f(b) = f(c)$?

Solución:

Por el teorema del valor medio del cálculo integral, se sabe que si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = (x_2 - x_1) \cdot f(x_0)$$



Aplicando este teorema en el intervalo $[-2, -1]$, puede asegurarse que existe $b \in [-2, -1]$, esto es, $-2 < b < -1$, que verifica $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = (-1 - (-2)) \cdot f(b) = f(b)$

Análogamente, para el intervalo $[1, 2]$, existe c , con $1 < c < 2$, tal que.

$$\int_1^2 f(t)dt = (2 - 1)f(c) = f(c)$$

En consecuencia, como $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_1^2 f(t)dt$, puede asegurarse que existen dos números b y c , pertenecientes a $[-2, 2]$, tales que $b \leq -1$, $c \geq 1$ y $f(b) = f(c)$.

31. (Propuesto en Selectividad, Madrid)

Sea la función $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$.

- Calcula $F'(x)$, estudia el crecimiento de $F(x)$ y halla sus máximos y mínimos.
- Calcula $F''(x)$ y estudia la concavidad y convexidad de $F(x)$. Esboza la gráfica con los datos obtenidos.

Solución:

Por el teorema fundamental del cálculo integral,

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt = G(t) \Big|_0^{x^2} = G(x^2) - G(0), \text{ siendo } G'(t) = e^{-t^2}.$$

a) Derivando $F(x) = G(x^2) - G(0)$, se deduce:

$$F'(x) = G'(x^2) \cdot 2x \Rightarrow F'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x \rightarrow \text{Esta derivada se anula en } x = 0.$$

Para $x > 0$, $F' > 0 \Rightarrow F$ será creciente. (Para $x < 0$ debe suponerse que la función no está definida; o, al menos, que no se sabe nada).

Luego, en $x = 0$ la función $F(x)$ tiene un mínimo, que será absoluto.

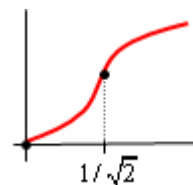
b) $F''(x) = 2e^{-x^4} - 8x^4 e^{-x^4} = 2e^{-x^4} (1 - 4x^4) \Rightarrow F''(x) = 0$ en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, que es un punto de inflexión.

(La solución $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ cae fuera del dominio).

Si $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $F'' > 0$, luego F es convexa (\cup).

Si $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $F'' < 0$, luego F es cóncava (\cap).

Con esto, la gráfica de F puede ser la adjunta.



32. (Propuesto en Selectividad, Madrid) Sea f una función real de variable real, continua y positiva, tal que $\int_0^x f(t)dt = e^x + \arctg x + a$.

Determina el valor de la constante a y halla $f(x)$ aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo.

Solución:

$$\text{Sea } F(x) = \int_0^x f(t)dt = e^x + \arctg x + a.$$

$$\text{En consecuencia, } F(0) = \int_0^0 f(t)dt = e^0 + \arctg 0 + a = 0 \Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1.$$

Como $F(t)$ es una primitiva de $f(t)$, se tendrá que:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2}.$$

33. (Propuesto en Selectividad, La Rioja)

Sea la función $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$, definida para $x \geq 1$.

Halla sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

Por el teorema fundamental del cálculo integral se tiene que si

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ entonces } F'(x) = f(x)$$

$$\text{Por tanto, en este caso, } F'(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Los máximos y mínimos se dan en las soluciones de $F'(x) = 0$ que hacen negativa o positiva a $F''(x)$, respectivamente.

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow x = k\pi, k = 1, 2, 3 \dots$$

$$\text{Derivada segunda: } F''(x) = \frac{(\cos x) \cdot x - \sin x}{x^2}.$$

Signo de la derivada segunda en los puntos $x = k\pi$, $k = 1, 2, 3 \dots$

- Si k es par: $x = 2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi$, $F''(2n\pi) = \frac{1 \cdot 2n\pi - 0}{(2n\pi)^2} > 0 \Rightarrow$ Hay mínimos.
- Si k es impar: $x = \pi, 3\pi, \dots, (2n+1)\pi$, $F''((2n+1)\pi) = \frac{-1 \cdot (2n+1)\pi - 0}{((2n+1)\pi)^2} < 0 \Rightarrow$ Hay máximos.

Por tanto, $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ tiene máximos en los puntos $x = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$; y tiene mínimos cuando $x = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$

34. (Propuesto en Selectividad, Andalucía)

Sea f una función continua en el intervalo $[2, 3]$ y F una primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$, calcula:

- $\int_2^3 f(x) dx$
- $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx$
- $\int_2^3 (F(x))^2 f(x) dx$

Solución:

$$a) \int_2^3 f(x) dx = F(x) \Big|_2^3 = F(3) - F(2) = 2 - 1 = 1.$$

$$b) \int_2^3 (5f(x) - 7) dx = 5 \int_2^3 f(x) dx - \int_2^3 7 dx = 5 - (7x) \Big|_2^3 = 5 - 21 + 14 = -2.$$

$$c) \int_2^3 (F(x))^2 f(x) dx = \frac{(F(x))^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{(F(3))^3}{3} - \frac{(F(2))^3}{3} = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

35. (Propuesto en Selectividad, Madrid)

Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_1^8 f(u) du = 3$. Halla $\int_1^2 f(x^3) x^2 dx$.

Solución:

Si se hace $x^3 = u \Rightarrow 3x^2 dx = du$; y si $x = 2$, $u = 8$.

Con esto:

$$\int_1^2 f(x^3) x^2 dx = \frac{1}{3} \int_1^2 f(x^3) 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int_1^8 f(u) du = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

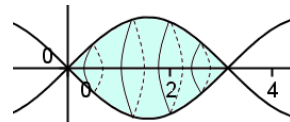
Volúmenes

36. Calcula el volumen del cuerpo generado al girar alrededor del eje OX de la superficie limitada por la curva $y = \sin x$ y el eje OX , entre 0 y π .

Solución:

El volumen pedido vale:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \text{ u}^3.$$



Recuérdese que $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

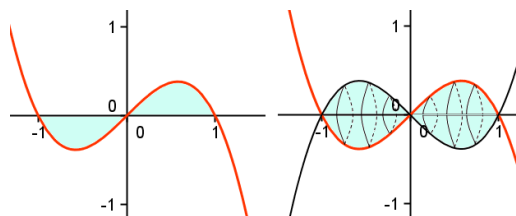
37. Halla el volumen generado al girar alrededor del eje OX el recinto plano determinado por dicho eje y la curva $y = x - x^3$.

Solución:

La gráfica de $y = x - x^3$ es la adjunta.

Puede trazarse calculando los puntos de corte con los ejes y dando algunos valores.

El recinto plano se ha sombreado.



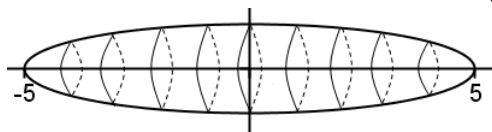
El volumen engendrado es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^0 y^2 dx + \pi \int_0^1 y^2 dx = 2\pi \int_0^1 y^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x - x^3)^2 dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 (x^2 - 2x^4 + x^6) dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{16\pi}{105} \text{ u}^3. \end{aligned}$$

38. Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa alrededor del eje OX .

Solución:

La elipse está centrada en el origen y tiene por semiejes: $a = 5$ y $b = 1$. (Recuérdese que la ecuación de una elipse centrada en el origen de semiejes a y b es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$).



El volumen pedido viene dado por

$$V = \pi \int_{-5}^5 y^2 dx = 2\pi \int_0^5 y^2 dx = 2\pi \int_0^5 \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) dx = 2\pi \left[x - \frac{x^3}{75} \right]_0^5 = \frac{20}{3} \pi \text{ (u}^3\text{)}.$$

39. Se consideran, en el plano, las curvas de ecuaciones $y = -\frac{x^2}{4} + x$ e $y = \frac{x^2}{4} - x$. Se pide:

a) El área del recinto finito determinado por dichas curvas.

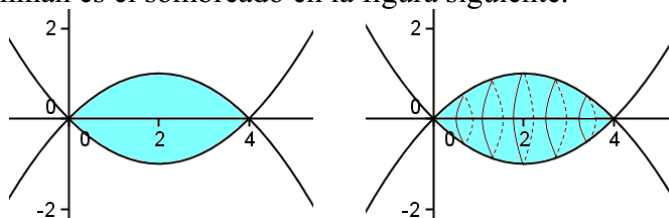
b) El volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX .

Solución:

Las curvas son dos parábolas. Dando algunos valores se pueden trazar y determinar los puntos de corte, que son $x = 0$ y $x = 4$: las soluciones de la ecuación

$$-\frac{x^2}{4} + x = \frac{x^2}{4} - x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0.$$

El recinto que determinan es el sombreado en la figura siguiente.



a) El área encerrada entre esas curvas es:

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{4} + x - \left(\frac{x^2}{4} - x \right) \right) dx = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) dx = \left(-\frac{x^3}{6} + x^2 \right) \Big|_0^4 = -\frac{64}{6} + 16 = \frac{16}{3} \text{ u}^2.$$

b) El volumen del cuerpo de revolución correspondiente vale:

$$V = \pi \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{4} + x \right)^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + x^2 \right) dx = \pi \left(\frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{32\pi}{15} \text{ u}^3.$$

Otros problemas

40. Halla el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 \sin x$ y el eje de abscisas entre el origen y el primer punto positivo donde f se anule.

Solución:

Los puntos de corte de $f(x) = x^2 \sin x$ con el eje de abscisas son $x = k\pi$. El primer punto de abscisa positiva es $x = \pi$.

Como en el intervalo $[0, \pi]$ la función no toma valores negativos, el área pedida viene dada por la integral $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$.

Una primitiva de $\int x^2 \sin x dx$ se obtiene por el método de partes.

Haciendo: $x^2 = u$ y $\sin x dx = dv \Rightarrow 2x dx = du$ y $-\cos x = v$.

Luego, $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$.

Para hacer la segunda integral, $\int x \cos x dx$, se aplica nuevamente el método de partes.

Tomando: $x = u$ y $\cos x dx = dv \Rightarrow dx = du$ y $v = \sin x$.

Luego, $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$.

Por tanto: $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x)$.

En consecuencia,

$$\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \left[-x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) \right]_0^\pi = -\pi^2(-1) - 2 - 2 = \pi^2 - 4.$$

41. (Propuesto en Selectividad) El número de pasajeros que pasan por la terminal de un aeropuerto se ajusta durante un día determinado a la función $P(t) = 432t - t^3$, siendo t el tiempo en horas y $P(t)$ el número de viajeros en el momento t .

a) Representa la gráfica de la función en el contexto del problema. ¿Cuál fue la máxima afluencia del día y en qué momento se da?

b) ¿Qué cantidad de viajeros pasa por esa terminal desde las 0 horas hasta las 18 horas?

Solución:

a) $P(t) = 432t - t^3 = t(432 - t^2)$.

Vale 0 en los instantes $t = 0$ y $t = \sqrt{432} \approx 20,78 \text{ h} \approx 20 \text{ h } 47 \text{ min}$.

Derivando:

$$P'(t) = 432 - 3t^2, \text{ que se anula cuando } t = 12.$$

Si $0 < t < 12$, $P'(t) > 0 \Rightarrow P(t)$ es creciente.

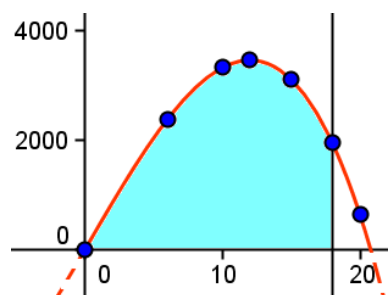
Si $12 < t < 24$, $P'(t) < 0 \Rightarrow P(t)$ es decreciente.

Por tanto, el máximo se da cuando $t = 12$, siendo el número de pasajeros $P(12) = 3456$.

Dando algunos valores más puede trazarse su gráfica, que es la adjunta.

Valores:

$(0, 0)$; $(6, 2376)$; $(10, 3320)$; $(12, 3456)$, máximo; $(15, 3105)$; $(18, 1944)$; $(20, 640)$.



b) El número de viajeros que pasa por esa terminal entre las 0 y las 18 horas viene dado por el valor de la integral:

$$C = \int_0^{18} (432t - t^3) dt = \left[216t^2 - \frac{t^4}{4} \right]_0^{18} = 43740 \text{ pasajeros.}$$

42. (Propuesto en Selectividad, Galicia) El tiempo, en horas, que tarda un autobús en hacer el recorrido entre dos ciudades es una variable aleatoria con función de densidad:

$f(x) = 0,3(3x - x^2)$, si $x \in [1, 3]$; y 0 en otro caso.

a) Calcula el tiempo medio que tarda en hacer el trayecto.

b) Calcula la probabilidad de que la duración del trayecto sea inferior a dos horas.

Solución:

a) Si $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria continua definida en $[a, b]$, su

media viene dada por $\mu = \int_a^b xf(x)dx$.

En este caso:

$$\mu = \int_1^3 x \cdot 0,3(3x - x^2) dx = \left[\frac{0,9x^3}{3} - \frac{0,3x^4}{4} \right]_1^3 = 2,025 - 0,225 = 1,8.$$

b) Si X es la variable que mide el tiempo del trayecto, hay que hallar $P(X \leq 2)$. O, lo que es lo mismo, $P(1 \leq X \leq 2)$. En el contexto del problema:

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 0,3(3x - x^2) dx = \left[\frac{0,9x^2}{2} - \frac{0,3x^3}{3} \right]_1^2 = 1 - 0,35 = 0,65.$$

43. Halla el área limitada por la curva $y = xe^{-x^2}$, el eje de abscisas, y la recta $x = a$, siendo a la abscisa del punto máximo de la curva.

Solución:

Derivando se tiene:

$$y = xe^{-x^2} \Rightarrow y' = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

$$\Rightarrow y'' = -4xe^{-x^2} - 2x(1 - 2x^2)e^{-x^2} = (4x^3 - 6x)e^{-x^2}.$$

La derivada primera se anula si $(1 - 2x^2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ o $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La derivada segunda es negativa en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y positiva en $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por tanto, el máximo se da en $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La curva corta al eje OX en $x = 0$; por tanto, el intervalo de integración es $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

En dicho intervalo la curva es siempre positiva, luego el área pedida es:

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} (-2xe^{-x^2}) dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} e^{-1/2} + \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{e}}.$$

44. Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$, tal que $f(1) = 0$ y

$$\int_0^1 2xf'(x)dx = 1. \text{ Utilizando la fórmula de integración por partes halla } \int_0^1 f(x)dx.$$

Solución:

Si en la integral $\int 2xf'(x)dx$ se toma:

$$u = 2x \text{ y } f'(x)dx = dv \Rightarrow du = 2dx \text{ y } v = f(x).$$

Por tanto:

$$\int 2xf'(x)dx = 2xf(x) - \int 2f(x)dx \Rightarrow 2 \int f(x)dx = 2xf(x) - \int 2xf'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = xf(x) - \frac{1}{2} \int 2xf'(x)dx.$$

Luego:

$$\int_0^1 f(x)dx = [xf(x)]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 2xf'(x)dx = 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

45. (Propuesto en Selectividad, Asturias) Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$.

- Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.
- Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.
- Calcula el área de ese recinto.

Solución:

$$a) y = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow y' = 3x^2 - 4x + 1 \rightarrow y(0) = 0; y'(0) = 1.$$

Tangente en $(0, 0)$: $y = x$.

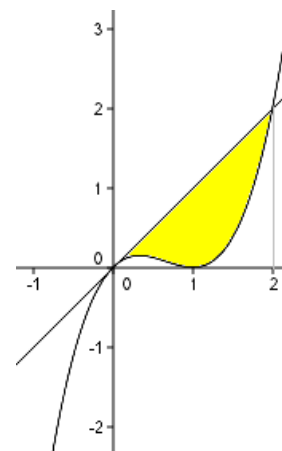
b) La derivada se anula, $3x^2 - 4x + 1 = 0$, cuando $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \begin{cases} 1/3 \\ 1 \end{cases}$.

Como $y' = 6x - 4 \Rightarrow y'(1/3) < 0$; $y'(1) > 0$. Luego, en $x = 1/3$ se tiene un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

La recta tangente corta a la curva cuando $x^3 - 2x^2 + x = x \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$.

Algunos puntos de la gráfica de la curva son:

$(-1, -4)$; $(0, 0)$; $(1/3, 4/27)$, máximo; $(1, 0)$, mínimo; $(2, 2)$.



c) El recinto comprendido entre la recta y la curva es el sombreado en la figura adjunta. Como en el intervalo $[0, 2]$ la recta va por encima de la curva, el área pedida viene determinada por la integral

$$A = \int_0^2 (x - (x^3 - 2x^2 + x)) dx = \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \text{ u}^2.$$

46. (Propuesto en Selectividad 2016, Castilla-La Mancha)

Calcula la integral definida $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{x}}{2} dx$.

Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes.

Solución:

Si $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2\sqrt{x} \cdot dt = dx \Rightarrow 2t dt = dx$. Por tanto:

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2} dx = \int \frac{\cos t}{2} \cdot 2t dt = \int (t \cos t) dt$$

La última integral puede hacerse por el método de partes.

Tomando:

$$u = t \text{ y } dv = \cos t dt \Rightarrow du = dt \text{ y } v = \sin t$$

Luego,

$$\int t \cos t dt = t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t + c$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2} dx = \sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{x}}{2} dx = \left[\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x} \right]_0^{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - 0 - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$