

TEMA 10. La integral indefinida

Problemas Resueltos

Integrales inmediatas

1. Calcula las siguientes integrales:

- | | | |
|--|---------------------------------------|---|
| a) $\int (3x^2 + x - 2\sqrt{x}) dx$ | b) $\int x(4 - 4x^2) dx$ | c) $\int \frac{e^{-2x}}{5} dx$ |
| d) $\int \frac{5x}{3 + 3x^2} dx$ | e) $\int \cos(4x + 3) dx$ | f) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos 5x \right) dx$ |
| g) $\int \left(3 \cos \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{5} \right) dx$ | h) $\int x \cos(3x^2) dx$ | i) $\int (\cos(2x) - 3e^{2x-3}) dx$ |
| j) $\int \cos x \cdot (\sin x)^2 dx$ | k) $\int 5x(1 - 2x^2)^2 dx$ | l) $\int (2 - 3x)^2 dx$ |
| m) $\int \frac{x^2}{x^3 + 2} dx$ | n) $\int \frac{3}{1 + x^2} dx$ | o) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{3 - x^3}} dx$ |
| p) $\int \frac{5x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ | q) $\int \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ | r) $\int 2xe^{3x^2} dx$ |
| s) $\int (1 - x)^3 dx$ | t) $\int x(1 - x)^3 dx$ | u) $\int \frac{(x-1)^3}{x} dx$ |

Solución:

En la mayoría de los casos hay que ajustar constantes y operar cuando sea necesario.

- a) $\int (3x^2 + x - 2\sqrt{x}) dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2 \int x^{1/2} dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2 \frac{x^{3/2}}{3/2} + c$
- b) $\int x(4 - 4x^2) dx = \int (4x - 4x^3) dx = 2x^2 - x^4 + c$
- c) $\int \frac{e^{-2x}}{5} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(-2)} \int (-2)e^{-2x} dx = -\frac{1}{10} e^{-2x} + c$
- d) $\int \frac{5x}{3 + 3x^2} dx = \frac{5}{6} \int \frac{6x}{3 + 3x^2} dx = \frac{5}{6} \ln(3 + 3x^2) + c$
- e) $\int \cos(4x + 3) dx = \frac{1}{4} \int 4 \cos(4x + 3) dx = \frac{1}{4} \sin(4x + 3) + c$
- f) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos 5x \right) dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x dx - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \int 5 \cos 5x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{15} \sin 5x + c$
- g) $\int \left(3 \cos \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{5} \right) dx = 6 \int \left(\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \right) dx - \frac{1}{10} \int 2 \sin 2x dx = 6 \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{10} \cos 2x + c$
- h) $\int x \cos(3x^2) dx = \frac{1}{6} \int 6x \cos(3x^2) dx = \frac{1}{6} \sin(3x^2) + c$
- i) Ajustando constantes en cada una de las funciones:
- $$\int (\cos(2x) - 3e^{2x-3}) dx = \int \cos(2x) dx - \int (3e^{2x-3}) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) dx - \frac{3}{2} \int (2e^{2x-3}) dx =$$
- $$= \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{3}{2} e^{2x-3} + c$$

j) Ajustando constantes:

$$\int \cos x \cdot (\sin x)^2 dx = \frac{1}{3} \int 3(\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \frac{1}{3} (\sin x)^3 + c$$

$$k) \int 5x(1-2x^2)^2 dx = -\frac{5}{4} \int (-4x(1-2x^2)^2) dx = -\frac{5}{4} \cdot \frac{(1-2x^2)^3}{3} + c = -\frac{5}{12} (1-2x^2)^3 + c$$

l) Se opera en el integrando:

$$\int (2-3x)^2 dx = \int (4-12x+9x^2) dx = 4x-6x^2+3x^3+c$$

m) Ajustando constantes:

$$\int \frac{x^2}{x^3+2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3+2} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3+2) + c$$

$$n) \int \frac{3}{1+x^2} dx. \text{ Es inmediata: } \int \frac{3}{1+x^2} dx = 3 \cdot \int \frac{1}{1+x^2} dx = 3 \arctan x + c.$$

o) Ajustando constantes:

$$\int \frac{4x^2}{\sqrt{3-x^3}} dx = -\frac{4 \cdot 2}{3} \int \frac{-3x^2}{2\sqrt{3-x^3}} dx = -\frac{8}{3} \int \frac{-3x^2}{2\sqrt{3-x^3}} dx = -\frac{8}{3} \sqrt{3-x^3} + c.$$

p) Ajustando constantes:

$$\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -5 \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = -5\sqrt{1-x^2} + c$$

$$q) \int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} dx. \text{ Es inmediata: } \int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} dx = 5 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 5 \arcsin x + c$$

r) Ajustando constantes:

$$\int 2xe^{3x^2} dx = \frac{2}{6} \int 6xe^{3x^2} dx = \frac{1}{3} e^{3x^2} + c$$

s) Desarrollando el integrando:

$$\int (1-x)^3 dx = \int (1-3x+3x^2-x^3) dx = x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4 + c$$

También podría hacerse directamente ajustando constantes:

$$\int (1-x)^3 dx = -\int (-1)(1-x)^3 dx = -\frac{(1-x)^4}{4} + c$$

t) Hay que desarrollar el cubo, multiplicar e integrar: $\int x(1-x)^3 dx =$

$$= \int x(1-3x+3x^2-x^3) dx = \int (x-3x^2+3x^3-x^4) dx = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + c$$

u) Hay que desarrollar el cubo, dividir e integrar:

$$\int \frac{(x-1)^3}{x} dx = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - 3 + 3x - x^2 \right) dx = \ln x - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + c$$

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 5x(1-2x)^2 dx$

b) $\int (3x^2-2x)^2 dx$

c) $\int \frac{x}{1+3x^2} dx$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int 5x(1-2x)^2 dx = \int 5x(1-4x+4x^2) dx = \int (5x-20x^2+20x^3) dx = \frac{5}{2}x^2 - \frac{20}{3}x^3 + 5x^4 + c \\ \text{b)} \quad & \int (3x^2-2x)^2 dx = \int (9x^4-12x^3+4x^2) dx = \frac{9}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c \\ \text{c)} \quad & \int \frac{x}{1+3x^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{1+3x^2} dx = \frac{1}{6} \ln(1+3x^2) + c \end{aligned}$$

3. Calcula:

$$\text{a)} \quad \int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}} dx \qquad \text{b)} \quad \int \sqrt{x}(7x^2+3) dx \qquad \text{c)} \quad \int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2} dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{3x^2+1} + c \\ \text{b)} \quad & \int \sqrt{x}(7x^2+3) dx = \int (7x^{5/2}+3x^{1/2}) dx = \frac{7x^{7/2}}{7/2} + \frac{3x^{3/2}}{3/2} + c = 2x^{7/2} + 2x^{3/2} + c \\ \text{c)} \quad & \int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2} dx = \int \left(\frac{5}{x} + \sqrt{3}x^{-3/2} \right) dx = 5 \ln x + \frac{\sqrt{3}}{-1/2} x^{-1/2} + c = 5 \ln x - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}} + c. \end{aligned}$$

4. Resuelve las integrales:

$$\text{a)} \quad \int (\sin 2x - 3 \cos 5x) dx \qquad \text{b)} \quad \int (\sin x + \cos x)^2 dx \qquad \text{c)} \quad \int (\sin x - \cos x)^2 dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int (\sin 2x - 3 \cos 5x) dx = \int \sin 2x dx - \int 3 \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x dx - \frac{3}{5} \int 5 \cos 5x dx = \\ & = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{3}{5} \sin 5x + c \\ \text{b)} \quad & \int (\sin x + \cos x)^2 dx = \\ & = \int (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) dx = \int (1 + 2 \sin x \cos x) dx = x + \sin^2 x + c \\ \text{c)} \quad & \int (\sin x - \cos x)^2 dx = \\ & = \int (\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x) dx = \int (1 - 2 \sin x \cos x) dx = x + \cos^2 x + c \end{aligned}$$

También se puede escribir:

$$\int (\sin x - \cos x)^2 dx = x - \sin^2 x + c, \text{ pues } x + \cos^2 x = x + (1 - \sin^2 x) + c = x - \sin^2 x + (1 + c)$$

5. Halla:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int e^{4x} dx & \text{b)} \quad \int e^{x/3} dx & \text{c)} \quad \int x e^{1-x^2} dx \\ \text{d)} \quad & \int 4^x dx & \text{e)} \quad \int 4 \cdot 3^x dx & \text{f)} \quad \int 20x \cdot 3^{x^2} dx \end{aligned}$$

Solución:

$$a) \int e^{4x} dx = \frac{1}{4} \int 4e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + c$$

$$b) \int e^{x/3} dx = 3 \int \frac{1}{3} e^{x/3} dx = 3e^{x/3} + c$$

$$c) \int x e^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int (-2x e^{1-x^2}) dx = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$$

$$d) \int 4^x dx = 4^x \cdot \frac{1}{\ln 4} + c$$

$$e) \int 4 \cdot 3^x dx = 4 \int 3^x dx = 4 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + c = \frac{4}{\ln 3} \cdot 3^x + c$$

$$f) \int 20x \cdot 3^{x^2} dx = 10 \int 2x \cdot 3^{x^2} dx = 10 \cdot 3^{x^2} \cdot \frac{1}{\ln 3} + c = \frac{10}{\ln 3} \cdot 3^{x^2} + c$$

6. Calcula:

$$a) \int (e^x + e^{-x}) dx$$

$$b) \int (e^x + e^{-x})^2 dx$$

$$c) \int (e^{2x} - \sin 2x) dx$$

Solución:

$$a) \int (e^x + e^{-x}) dx = e^x - e^{-x} + c$$

$$b) \int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x \cdot e^{-x}) dx = \int e^{2x} dx + \int e^{-2x} dx + \int 2 dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 2x + c$$

$$c) \int (e^{2x} - \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int 2 \sin x dx = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \cos 2x + c$$

7. Resuelve, ajustando constantes, las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{1}{2+x^2} dx$$

$$b) \int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$c) \int \frac{x-3}{x^2+9} dx$$

Solución:

$$a) \int \frac{1}{2+x^2} dx \text{ es parecida a } \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c. \text{ Para resolverla hay que ajustar}$$

constantes buscando que aparezca $\int \frac{f}{1+f^2} dx = \arctan f + c$. Puede hacerse lo que sigue:

$$\frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)} = \frac{1}{2 \left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{2}/\sqrt{2}}{2 \left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1/\sqrt{2}}{\left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1/\sqrt{2}}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{2+x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \int \frac{1/\sqrt{2}}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

- b) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ es parecida a $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$. Para resolverla hay que ajustar constantes buscando que aparezca $\int \frac{f}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arcsin f + c$. Se consigue así:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{16\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}} dx = \int \frac{1}{4\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}} dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

- c) $\int \frac{x-3}{x^2+9} dx = \int \left(\frac{x}{x^2+9} - \frac{3}{x^2+9} \right) dx = \int \frac{x}{x^2+9} dx - \int \frac{3}{x^2+9} dx$.

La primera integral es casi inmediata: es un neperiano; en ella hay que ajustar constantes.

La segunda integral también es casi inmediata, aunque algo más difícil: es un arcotangente.

También hay que ajustar constantes.

$$\int \frac{x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+9) + c_1.$$

$$\int \frac{3}{x^2+9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{3}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} dx = \frac{3}{9} \int \frac{3 \cdot (1/3)}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} dx = \int \frac{1/3}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} dx = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c_2.$$

Por tanto:

$$\int \frac{x-3}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+9) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c.$$

Integración por descomposición en fracciones racionales

8. Calcula, descomponiendo el integrando, las siguientes integrales:

- a) $\int \frac{2x-x^2+3x^3}{x^4} dx$ b) $\int \frac{x^3-3x^2+5}{4x^3} dx$ c) $\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}} dx$
d) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$ e) $\int \left(\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} \right) dx$ f) $\int \frac{x^3-1}{x+3} dx$

Solución:

a) Se escribe el integrando como se indica:

$$\int \frac{2x-x^2+3x^3}{x^4} dx = \int \left(\frac{2x}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} + \frac{3x^3}{x^4} \right) dx = \int \left(2x^{-3} - x^{-2} + \frac{3}{x} \right) dx = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3 \ln x + c$$

- b) Dividiendo: $\int \frac{x^3-3x^2+5}{4x^3} dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4x} + \frac{5}{4x^3} \right) dx = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \ln x - \frac{5}{8x^2} + c$

c) Operando se tiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}} dx &= \int \left(x^{5/2} + 5x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2x^{-1/2} \right) dx = \\ &= \frac{2}{7}x^{7/2} + 5\frac{2}{5}x^{5/2} - 3\frac{2}{3}x^{3/2} + 2 \cdot 2x^{1/2} + c = \left(\frac{2}{7}x^3 + 2x^2 - 2x + 4 \right) x^{1/2} + c \end{aligned}$$

$$d) \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \int \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx = \int (x^{-1/4} - x^{-5/12}) dx = \frac{4}{3} x^{3/4} - \frac{12}{7} x^{7/12} + c$$

$$e) \int \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} \right) dx = \int \left(\frac{4x^2 + 1}{4x^2 + 1} - \frac{4x}{4x^2 + 1} \right) dx = \int \left(1 - \frac{4x}{4x^2 + 1} \right) dx = x - \frac{1}{2} \ln(4x^2 + 1) + c$$

f) Dividiendo el integrando (puede hacerse por Ruffini), se tiene:

$$\int \frac{x^3 - 1}{x + 3} dx = \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{28}{x + 3} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x^2 + 9x - 28 \ln(x + 3) + c$$

9. a) Comprueba que $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^3 + x}$. b) Calcula la integral indefinida: $\int \frac{1}{x^3 + x} dx$.

Solución:

a) Efectivamente: $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} - \frac{x^2}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^3 + x}$.

b) Por lo visto:

$$\int \frac{1}{x^3 + x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

10. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2 - 3x + 5x^2}{2x} dx$

b) $\int \frac{(x - 3)^2}{4x} dx$

c) $\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{x^2} dx$

d) $\int \frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x} dx$

e) $\int \frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x + 1} dx$

f) $\int \frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x^2 + 1} dx$

Solución:

a) $\int \frac{2 - 3x + 5x^2}{2x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} x \right) dx = \ln x - \frac{3}{2} x + \frac{5}{4} x^2 + c$

b) $\int \frac{(x - 3)^2}{4x} dx = \int \frac{x^2 - 6x + 9}{4x} dx = \int \frac{1}{4} x dx - \int \frac{3}{2} dx + \int \frac{9}{4x} dx = \frac{1}{8} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{9}{4} \ln x + c$

c) $\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{x^2} dx = \int \left(2x - 3 + \frac{5}{x^2} \right) dx = x^2 - 3x - \frac{5}{x} + c$

d) $\int \frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x} dx = \int \left(3x^2 - x + 4 - \frac{5}{x} \right) dx = x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 4x - 5 \ln x + c$

e) $\int \frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x + 1} dx = \int \left(3x^2 - 4x + 8 - \frac{13}{x + 1} \right) dx = x^3 - 2x^2 + 8x - 13 \ln(x + 1) + c$

Se ha dividido: $\frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x + 1} = 3x^2 - 4x + 8 - \frac{13}{x + 1}$

f) $\int \frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x^2 + 1} dx = \int \left(3x - 1 + \frac{x - 4}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{3}{2} x^2 - x + \int \frac{x - 4}{x^2 + 1} dx =$

$$= \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - 4\arctan x + c$$

Se ha dividido: $\frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x^2 + 1} = 3x - 1 + \frac{x - 4}{x^2 + 1}$

La integral: $\int \frac{x-4}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{4}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 4\arctan x$

11. Calcula las integrales:

a) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2} dx$ b) $\int \frac{2dx}{x^2-4}$ c) $\int \frac{1}{x^2-2x-3} dx$ d) $\int \frac{1}{2x^2+2x-12} dx$

Solución:

Todas pueden hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.

a) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2} dx$.

Como las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = -2$: $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, se tiene la igualdad:

$$\frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Luego:

$$x+8 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$\text{si } x = 1: 9 = 3A \Rightarrow A = 3$$

$$\text{si } x = -2: 6 = -3B \Rightarrow B = -2$$

Con esto:

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-2} dx = \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{-2}{x+2} dx = 3\ln(x-1) - 2\ln(x+2) + c$$

b) $\int \frac{2dx}{x^2-4}$.

Como:

$$\frac{2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{x^2-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = A(x+2) + B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ y } B = -\frac{1}{2}$$

Luego,

$$\int \frac{2dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{1/2}{x-2} - \frac{1/2}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x+2) + c$$

c) $\int \frac{1}{x^2-2x-3} dx$

La ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ tiene soluciones reales: $x = -1$ y $x = 3$.

Por tanto:

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+1)}{(x+1)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-3) + B(x+1) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{4}; B = \frac{1}{4}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-2x-3} dx &= \int \left(\frac{-1/4}{x+1} + \frac{1/4}{x-3} \right) dx = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-3} dx = \\ &= -\frac{1}{4} \ln(x+1) + \frac{1}{4} \ln(x-3) + c \end{aligned}$$

d) $\int \frac{1}{2x^2+2x-12} dx$

El denominador: $2x^2+2x-12 = 2(x-2)(x+3)$.

La descomposición que se hace es:

$$\frac{1}{2x^2+2x-12} = \frac{A}{2(x-2)} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+2B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

Luego:

$$1 = A(x+3) + 2B(x-2)$$

si $x=2$: $1 = 5A \Rightarrow A = 1/5$

si $x=-3$: $1 = -10B \Rightarrow B = -1/10$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x^2+2x-12} dx &= \int \left(\frac{1/5}{2(x-2)} - \frac{1/10}{x+3} \right) dx = \frac{1}{10} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{10} \int \frac{1}{x+3} dx = \\ &= \frac{1}{10} \ln(x-2) - \frac{1}{10} \ln(x+3) + c \end{aligned}$$

12. Calcula las integrales:

a) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ b) $\int \frac{x}{x^2-1} dx$ c) $\int \frac{x^2}{x^2-1} dx$ d) $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$

Solución:

a) $\int \frac{1}{x^2-1} dx \rightarrow$ Hay que descomponer la función dada en fracciones simples.

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

Luego:

$$1 = A(x+1) + B(x-1) \Rightarrow 1 = (A+B)x + A-B$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{cases} 0 = A+B \\ 1 = A-B \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = -\frac{1}{2}$$

Con esto:

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1/2}{x-1} dx - \int \frac{1/2}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) + c$$

b) Es inmediata: $\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + c$

c) Se transforma el integrando como sigue:

$$\int \frac{x^2}{x^2-1} dx = \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) dx = x + \int \frac{1}{x^2-1} dx =$$

$$= (\text{la última integral se ha hecho más arriba}) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) + c$$

d) Es inmediata si se transforma el integrando como sigue:

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} dx = \int \left(x + \frac{x}{x^2-1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + c$$

13. Halla:

a) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+1} dx$ b) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1} dx$ c) $\int \frac{3}{x^2-4x+5} dx$ d) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx$

Solución:

a) El denominador tiene una raíz real doble: $x^2+2x+1 = (x+1)^2$.

Por tanto, se hace la descomposición:

$$\frac{3x+1}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow A = 3; B = -2$$

Luego,

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+1} dx = \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx = 3 \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + c$$

b) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1} dx$

Como el denominador $x^2-2x+1 = (x-1)^2$, se hace la descomposición:

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A+B(x-1)}{(x-1)^2}$$

Luego:

$$x+2 = A+B(x-1)$$

Si $x = 1$: $3 = A \Rightarrow A = 3$; si $x = 0$: $2 = A - B \Rightarrow B = 1$

Con esto:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+1} dx = \int \frac{3}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{-3}{x-1} + \ln(x-1) + c$$

En los casos que siguen el denominador no tiene raíces reales.

c) $x^2-4x+5 = (x-2)^2+1$.

Se puede escribir: $\frac{3}{x^2-4x+5} = \frac{3}{(x-2)^2+1} \Rightarrow$

$$\int \frac{3}{x^2-4x+5} dx = \int \frac{3}{(x-2)^2+1} dx = 3 \arctan(x-2) + c$$

d) $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$.

Por tanto:

$$\frac{2x+1}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2-1}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{(x+1)^2+1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + c$$

14. Propuestas en UNED. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x} dx$ b) $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x} dx$ c) $\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1} dx$.

Solución:

a) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x} dx$.

Como $x^3-x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$ se hace la descomposición:

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x^2-1)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x(x^2-1)}$$

Igualando los numeradores primero y último se obtiene el sistema:
$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ B-C=2 \\ -A=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=1; B=1, C=-1.$$

Por tanto,

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln x + \ln(x-1) - \ln(x+1) + c$$

b) $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x} dx$.

El denominador $x^3+x = x(x^2+1) \rightarrow$ El segundo factor no tiene raíces reales.

Con esto: $\frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + x(Bx+C)}{x(x^2+1)} \Rightarrow A=1; B=1; C=0.$

Luego:

$$\int \frac{2x^2+1}{x^3+x} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx = \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$$

c) $\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1} dx$.

Como $x^3-x^2+x-1 = (x-1)(x^2+1)$ se hace la descomposición:

$$\frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-B+C)x + A-C}{(x-1)(x+1)^2} \Rightarrow A=1; B=-2; C=0.$$

Luego: $\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x-1) - \ln(x^2+1) + c$

Método de integración por partes

15. Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int x \cos x dx & \text{b) } \int x e^{2x} dx & \text{c) } \int x^2 \cdot e^{3x} dx & \text{d) } \int 2x^3 e^{x^2} dx \\ \text{e) } \int (x \ln x) dx & \text{f) } \int \arcsin x dx & \text{g) } \int x^2 \sin(2x) dx & \text{h) } \int x^3 \cos x dx \end{array}$$

Solución:

Todas pueden resolverse aplicando el método de integración por partes.

$$\text{a) } \int x \cos x dx$$

Se toma: $x = u$ y $dv = \cos x dx \Rightarrow du = dx$ y $v = \sin x$

Luego,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

$$\text{b) } \int x e^{2x} dx$$

Tomando: $u = x \Rightarrow du = dx$; $e^{2x} dx = dv \Rightarrow \int e^{2x} dx = \int dv \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$

Luego:

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

$$\text{c) } \int x^2 \cdot e^{3x} dx.$$

Tomando: $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$; $dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x}$

Se tiene: $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$

La segunda integral, $\int x e^{3x} dx$, también se hace por partes.

Tomando ahora: $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x}$

Se tiene: $\int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right) + c = \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + c \end{aligned}$$

d) $\int 2x^3 e^{x^2} dx$.

Haciendo $u = x^2$ y $dv = 2xe^{x^2} dx$ se tiene:

$$\int 2x^3 e^{x^2} dx = x^2 e^{x^2} - \int 2xe^{x^2} dx = x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + c$$

e) $\int (x \ln x) dx$.

Tomando: $u = x \ln x \Rightarrow du = (\ln x + 1) dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\text{Luego, } \int (x \ln x) dx = x^2 \ln x - \int (x \ln x + x) dx = x^2 \ln x - \int (x \ln x) dx - \int x dx$$

En el segundo miembro aparece la misma integral, que se traspone al primer miembro, obteniéndose,

$$2 \int (x \ln x) dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\text{De donde, } \int (x \ln x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

f) $\int \arcsin x dx$

Se toma: $u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\text{Luego, } \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

g) $\int x^2 \sin(2x) dx$

Haciendo: $x^2 = u$, $\sin 2x dx = dv \Rightarrow 2x dx = du$; $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$

$$\text{Luego, } \int x^2 \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx$$

Para hacer la segunda integral se aplica nuevamente el método de partes.

$$\int x \cos 2x dx$$

Tomando: $x = u$; $dv = \cos 2x dx \Rightarrow dx = du$; $v = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$\text{Luego, } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$\text{Por tanto: } \int x^2 \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$$

h) $\int x^3 \cos x dx$.

Se hace: $u = x^3$; $dv = \cos x dx \Rightarrow du = 3x^2 dx$; $v = \sin x$

Luego:

$$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x - \int 3x^2 \sin x dx$$

Segunda integral: $\int 3x^2 \sin x dx = -3x^2 \cos x + \int 6x \cos x dx$

(Se ha hecho: $3x^3 = u$; $\sin x dx = dv$)

Tercera integral: $\int 6x \cos x dx = 6x \sin x + 6 \cos x$

(Se hace: $6x = u$; $\cos x dx = dv$)

Luego:

$$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c.$$

16. Utilizando el método de integración por partes, calcula $\int \frac{x}{e^x} dx$

Solución:

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx$$

Se hace:

$$u = x \text{ y } dv = e^{-x} dx \Rightarrow du = dx; v = -e^{-x}$$

Luego:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c$$

17. A partir del resultado de $\int \ln x dx$, calcula las siguientes integrales.

a) $2 \int \ln x dx$ b) $\int \ln(2x) dx$ c) $\int \ln x^2 dx$ d) $\int (\ln x)^2 dx$

Solución:

$\int \ln x dx$ se calcula por el método de partes.

Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

Con esto:

a) $2 \int \ln x dx = 2 \left(x \ln x - \int dx \right) = 2(x \ln x - x) + c$

b) $\int \ln(2x) dx = \int (\ln 2 + \ln x) dx = \int \ln 2 dx + \int \ln x dx = (\ln 2) \cdot x + x \ln x - x + c$

c) $\int \ln x^2 dx = \int 2 \ln x dx = 2 \int \ln x dx = 2 \left(x \ln x - \int dx \right) = 2(x \ln x - x) + c$

$$d) \int (\ln x)^2 dx$$

$$\text{Tomando: } u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx; \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int (\ln x)^2 dx &= x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} x dx = x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x dx = \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \end{aligned}$$

Integración por cambio de variable

18. Calcula las siguientes integrales haciendo el cambio que se indica:

$$a) \int x\sqrt{1-x^2} dx \rightarrow (1-x^2 = t) \quad b) \int (\sin x)^3 dx \rightarrow (\cos x = t)$$

$$c) \int \frac{dx}{x(4-\ln x)} \rightarrow (t = \ln x) \quad d) \int x\sqrt[3]{4+x^2} dx \rightarrow (4+x^2 = t)$$

Solución:

$$a) \text{ Si } 1-x^2 = t \Rightarrow -2x dx = dt \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dt.$$

Por tanto:

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-x^2} (x dx) = -\frac{1}{2} \int t^{1/2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + c$$

Observación: $\int x\sqrt{1-x^2} dx$ puede hacerse directamente (es inmediata), pues:

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int (-2x(1-x^2)^{1/2}) dx = -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} + c$$

$$b) \text{ Si } \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt.$$

Como

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin x \cdot \sin^2 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = -\int (1 - \cos^2 x) (-\sin x dx) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \sin^3 x dx = -\int (1 - t^2) dt = -t + \frac{t^3}{3} + c = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c \end{aligned}$$

$$c) \text{ Si } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$$

Luego:

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln x)} = \int \frac{1}{(4-\ln x)} \left(\frac{1}{x} dx \right) = \int \frac{1}{4-t} dt = -\ln(4-t) + c = -\ln(4-\ln x) + c$$

$$d) \text{ Si } 4+x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$$

Por tanto:

$$\int x\sqrt[3]{4+x^2} dx = \int (4+x^2)^{1/3} (x dx) = \int t^{1/3} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{8} (4+x^2)^{4/3} + c$$

Observación: También se puede hacer ajustando constantes, pues:

$$\begin{aligned}\int x \sqrt[3]{4+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int 2x(4+x^2)^{1/3} dx = \left(\int f'(x) \cdot (f(x))^n \right) = \frac{1}{2} \frac{(4+x^2)^{1/3+1}}{1/3+1} + c = \\ &= \frac{3}{8} \sqrt[3]{(4+x^2)^4} + c\end{aligned}$$

19. Halla la integral indefinida $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ mediante el cambio de variable $\sqrt{x} = t$.

Solución:

Si $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} dt = 2t dt$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{1}{1+t} 2t dt = \int \frac{2t}{1+t} dt = \int \frac{2(1+t)-2}{1+t} dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = 2t - 2 \ln(1+t) + c = \\ &= (\text{deshaciendo el cambio}) = 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + c\end{aligned}$$

20. Propuestos en UNED. Calcula:

a) $\int \frac{2^x}{2^{2x}+2} dx$ b) $\int x^2 \tan^2 x^3 dx$

Solución:

a) $\int \frac{2^x}{2^{2x}+2} dx \rightarrow$ puede hacerse el cambio $2^x = t \Rightarrow 2^x \ln 2 dx = dt \Rightarrow 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} dt$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{2^x}{2^{2x}+2} dx &= \frac{1}{\ln 2} \int \frac{1}{t^2+2} dt = (\text{Ver problema 2. a)}) = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{2^x}{\sqrt{2}} + c.\end{aligned}$$

b) $\int x^2 \tan^2 x^3 dx \rightarrow$ puede hacerse el cambio $x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt$.

Por tanto,

$$\int x^2 \tan^2 x^3 dx = \frac{1}{3} \int \tan^2 t dt = \frac{1}{3} \int (1 + \tan^2 t - 1) dt = \frac{1}{3} (\tan t - t) + c = \frac{1}{3} (\tan x^3 - x^3) + c$$

21. Calcula $\int x^7 e^{x^4} dx$ $\rightarrow$ Sugerencia: cambio $t = x^4$)

Solución:

Si $t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3 dx$.

Sustituyendo:

$$\int x^7 e^{x^4} dx = \int x^4 e^{x^4} \cdot (x^3 dx) = \int t e^t \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int t e^t dt$$

Esta integral se hace por partes:

$$u = t \Rightarrow du = dt; \quad dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$$

Luego:

$$\frac{1}{4} \int te^t dt = \frac{1}{4} \left(te^t - \int e^t dt \right) = \frac{1}{4} (te^t - e^t + c)$$

Deshaciendo el cambio: $\int x^7 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} \int te^t dt = \frac{1}{4} (x^4 e^{x^4} - e^{x^4}) + c$

Observación: se termina antes si se hace directamente por partes, tomando:

$$u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx$$

$$dv = x^3 e^{x^4} dx \Rightarrow v = \frac{1}{4} e^{x^4}$$

Por tanto:

$$\int x^7 e^{x^4} dx = x^4 \frac{1}{4} e^{x^4} - \int x^3 e^{x^4} dx = x^4 \frac{1}{4} e^{x^4} - \frac{1}{4} e^{x^4} + c$$

22. Haciendo el cambio de variable $e^x = t$, halla:

a) $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

b) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$

Solución:

a) Si $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$.

Por tanto:

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int \frac{1}{(1+t)^2} dt = \int (1+t)^{-2} dt = -(1+t)^{-1} + c = \frac{-1}{1+t} + c.$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \frac{-1}{1+e^x} + c$$

b) Si $e^x = t$ se tiene: $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx = \int \frac{1}{t^2 + 3t + 2} dt$

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2 + 3t + 2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2) + B(t+1)}{(t+1)(t+2)} \Rightarrow 1 = A(t+2) + B(t+1) \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\int \frac{1}{t^2 + 3t + 2} dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \ln(t+1) - \ln(t+2) = \ln \frac{t+1}{t+2} \Rightarrow$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx = \ln \frac{e^x + 1}{e^x + 2} + c$$

23. (Propuesto en Selectividad, Aragón, junio 14). Usando el cambio de variable $t = \ln(x)$,

determina el valor de la integral: $\int \frac{1 + 3 \ln(x) + (\ln(x))^3}{x(1 - (\ln(x))^2)} dx$

Solución:

a) Si $t = \ln(x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$; luego:

$$\int \frac{1 + 3 \ln(x) + (\ln(x))^3}{x(1 - (\ln(x))^2)} dx = \int \frac{1 + 3 \ln(x) + (\ln(x))^3}{(1 - (\ln(x))^2)} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1 + 3t + t^3}{1 - t^2} dt$$

La última integral se hace por descomposición en fracciones simples. Dividiendo:

$$\frac{1 + 3t + t^3}{1 - t^2} = -t + \frac{4t + 1}{1 - t^2} \rightarrow \frac{4t + 1}{1 - t^2} = \frac{A}{1 - t} + \frac{B}{1 + t} = \frac{A(1 + t) + B(1 - t)}{1 - t^2} \Rightarrow A = \frac{5}{2}; B = -\frac{3}{2}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{1 + 3t + t^3}{1 - t^2} dt = \int \left(-t + \frac{5/2}{1 - t} - \frac{3/2}{1 + t} \right) dt = -\frac{t^2}{2} - \frac{5}{2} \ln(1 - t) - \frac{3}{2} \ln(1 + t) + c$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{1 + 3 \ln(x) + (\ln(x))^3}{x(1 - (\ln(x))^2)} dx = -\frac{(\ln(x))^2}{2} - \frac{5}{2} \ln(1 - \ln(x)) - \frac{3}{2} \ln(1 + \ln(x)) + c.$$

Otras integrales

24. Calcula las siguientes integrales.

$$\text{a) } \int \frac{2}{1+x^2} dx \quad \text{b) } \int \frac{2x}{1+x^2} dx \quad \text{c) } \int \frac{2}{1-x^2} dx \quad \text{d) } \int \frac{2}{(1+x)^2} dx \quad \text{e) } \int \frac{2x}{(1+x)^2} dx$$

Solución:

Obsérvese que las cinco integrales tienen cierto parecido. No obstante, sus resultados son muy diferentes.

a) Es inmediata: $\int \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \cdot \int \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan x + c.$

b) También es inmediata: $\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) + c.$

c) Hay que hacerla por descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{2}{1-x^2} dx = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \ln(1+x) + \ln(1-x) + c$$

d) Es inmediata: $\int \frac{2}{(1+x)^2} dx = 2 \int (1+x)^{-2} dx = 2 \cdot \frac{(1+x)^{-1}}{-1} + c = -\frac{2}{1+x} + c.$

e) Hay que hacerla por descomposición en fracciones.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(1+x)^2} dx &= \int \frac{2x+2-2}{(1+x)^2} dx = \int \frac{2(1+x)}{(1+x)^2} dx + \int \frac{-2}{(1+x)^2} dx = \int \frac{2}{(1+x)} dx - 2 \int (1+x)^{-2} dx = \\ &= 2 \ln(1+x) + \frac{2}{1+x} + c \end{aligned}$$

25. Propuestos en UNED. Resuelve:

a) $\int \frac{x^2-1}{4x^2+1} dx$ b) $\int \frac{5x-2}{x^2-4} dx$ c) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ d) $\int 2 \ln x dx$

Solución:

a) Para resolver $\int \frac{x^2-1}{4x^2+1} dx$ hay que transformar el integrando.

Dividiendo:

$$\frac{x^2-1}{4x^2+1} = \frac{1}{4} - \frac{5/4}{4x^2+1} \rightarrow \text{(La división debe hacerse aplicando el algoritmo tradicional).}$$

Luego: $\int \left(\frac{1}{4} - \frac{5/4}{4x^2+1} \right) dx = \int \frac{1}{4} dx - \frac{5}{8} \int \frac{2}{(2x)^2+1} dx = \frac{1}{4}x - \frac{5}{8} \arctan(2x) + c$

b) $\int \frac{5x-2}{x^2-4} dx \Rightarrow \frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow A=2; B=3$

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4} dx = \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{3}{x+2} dx = 2 \ln(x-2) + 3 \ln(x+2) + c$$

c) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx \rightarrow \text{Partes: } \left(\ln x = u; \quad \frac{1}{x^2} dx = dv \right) \Rightarrow \left(du = \frac{1}{x} dx; \quad v = -\frac{1}{x} \right)$

Luego: $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c$

d) $\int 2 \ln x dx \rightarrow \text{Partes: } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx; \quad dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego: $2 \int \ln x dx = 2 \left(x \ln x - \int dx \right) = 2(x \ln x - x) + c$

26. Resuelve:

a) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx$ b) $\int \cos^2 x dx$ c) $\int \frac{7x+2}{x^2-6x+10} dx$

Solución:

a) La $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx$ puede considerarse inmediata, de la forma $\int f' \cdot \cos f dx = \sin f$, con

$f = \sqrt{x}$. En este caso: $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx = \sin \sqrt{x} + c$

No obstante, puede ser más asequible hacer el cambio $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Obteniéndose:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx = \int \cos(\sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right) = \int \cos t dt = \sin t + c = \sin \sqrt{x} + c$$

b) La integral $\int \cos^2 x dx$ puede hacerse por partes.

Haciendo: $u = \cos x$ y $\cos x dx = dv \Rightarrow du = -\sin x dx; v = \sin x$

Luego:

$$\int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int dx - \int \cos^2 x \, dx \Rightarrow 2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + x$$

Despejando: $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \frac{x}{2} + k$

De otra forma: Haciendo el cambio trigonométrico $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, se tiene:

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + k$$

c) $\int \frac{7x+2}{x^2-6x+10} \, dx \rightarrow$ Puede escribirse en el numerador la derivada del denominador.

Así:

$$\frac{7x+2}{x^2-6x+10} = \frac{\frac{7}{2}(2x-6)+23}{x^2-6x+10} = \frac{7}{2} \cdot \frac{(2x-6)}{x^2-6x+10} + \frac{23}{x^2-6x+10} = \frac{7}{2} \cdot \frac{(2x-6)}{1+(x-3)^2} + \frac{23}{1+(x-3)^2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{7x+2}{x^2-6x+10} \, dx = \int \frac{7}{2} \cdot \frac{(2x-6)}{x^2-6x+10} \, dx + \int \frac{23}{1+(x-3)^2} \, dx =$$

$$= \frac{7}{2} \ln(x^2-6x+10) + 23 \arctan(x-3) + c$$

27. Integra:

a) $\int \frac{e^x + e^{2x}}{1 + e^x} \, dx$ b) $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} \, dx$ c) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} \, dx$ d) $\int \tan^2 x \, dx$ e) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$

Solución:

a) Sacando factor común en el numerador:

$$\int \frac{e^x + e^{2x}}{1 + e^x} \, dx = \int \frac{e^x(1 + e^x)}{1 + e^x} \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c$$

b) Haciendo el cambio $e^x = t \Rightarrow e^x \, dx = dt \Rightarrow$

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} \, dx = \int \frac{e^x \cdot e^x}{1 + e^x} \, dx = \int \frac{t}{1+t} \, dt = \int \left(1 - \frac{t}{1+t} \right) \, dt = t - \ln(1+t) + c = e^x - \ln(1 + e^x) + c$$

c) Es inmediata, aunque puede hacerse el cambio $\cos x = t \Rightarrow -\sin x \, dx = dt$.

Por tanto: $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} \, dx = \int \frac{-1}{t^4} \, dt = -\int t^{-4} \, dt = -\frac{t^{-3}}{-3} + c = \frac{1}{3t^3} + c = \frac{1}{3 \cos^3 x} + c$

d) Sumando y restando 1 al integrando se tiene:

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \, dx - \int dx = \tan x - x + c$$

e) Haciendo $x^2 = t \Rightarrow 2x \, dx = dt$; de donde:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t + c = \arcsin x^2 + c$$

28. (Propuesto en Selectividad, Aragón, junio 13 y septiembre 14)

a) Determina la función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x) = 2xe^{5x}$ y que verifica que $f(0) = 2$.

b) La derivada de una función $f(x)$ es: $(x-1)^3(x-3)$. Determina la función $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$.

Solución:

a) La función $f(x)$ es una primitiva de $f'(x) = 2xe^{5x}$: $f(x) = \int 2xe^{5x} dx$.

Esta integral se hace por partes, tomando:

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx; \quad dv = e^{5x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{5}e^{5x}$$

Luego:

$$f(x) = \int 2xe^{5x} dx = 2x \cdot \frac{1}{5}e^{5x} - \int 2 \cdot \frac{1}{5}e^{5x} dx = \frac{2}{5} \left(xe^{5x} - \int e^{5x} dx \right) = \frac{2}{5} \left(xe^{5x} - \frac{1}{5}e^{5x} \right) + c$$

$$\text{Como } f(0) = 2, \text{ entonces: } f(0) = \frac{2}{5} \left(0 - \frac{1}{5}e^0 \right) + c = 2 \Rightarrow c = 2 + \frac{2}{25} = \frac{52}{25}.$$

$$\text{Por tanto, } f(x) = \frac{2}{5} \left(xe^{5x} - \frac{1}{5}e^{5x} \right) + \frac{52}{25}.$$

b) La función pedida debe ser una primitiva de $(x-1)^3(x-3)$; esto es:

$$f(x) = \int (x-1)^3(x-3) dx$$

Operando:

$$(x-1)^3(x-3) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$$

Luego:

$$f(x) = \int (x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{6}{4}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + c$$

$$\text{Como } f(0) = 1 \Rightarrow c = 1; \text{ y, por tanto: } f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + 1.$$