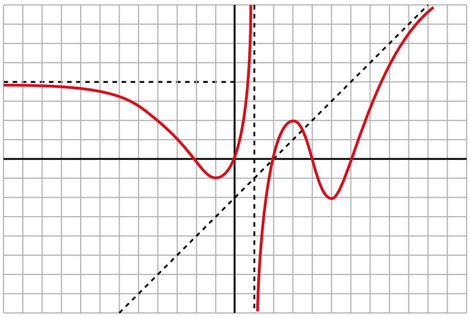
EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 324

1. Descripción de una gráfica

- **Describir la siguiente gráfica dando los elementos necesarios para que un compañero la pueda representar a partir de la descripción.**



- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$. Es derivable en su dominio puesto que no presenta puntos angulosos.
- La recta $y = 4$ es la asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ ya que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$. Se acerca por debajo de la asíntota.

  La recta $x = 1$ es la asíntota vertical de la función. La posición respecto de la asíntota es:

  $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to 1^+} = -\infty$$

  La recta $y = x - 2$ es la asíntota oblicua de la función cuando $x \to +\infty$. La curva corta a la asíntota oblicua en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = \frac{7}{2}$. Después se acerca por debajo de la asíntota.
- Los puntos $(-1, -1)$ y $(5, -2)$ son mínimos relativos de la función.

  Solo tiene un máximo relativo, que se encuentra en el punto $(3, 2)$.
- Finalmente, la función corta a los ejes coordenados en los puntos: $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ y $(6, 0)$.

2. Representación de una función logarítmica con valor absoluto

- **Representar la siguiente función:**

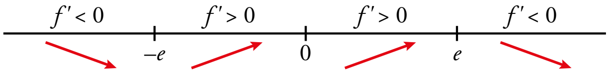
$$\boldsymbol{y = \frac{ln|x|}{x}}$$

- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$.

  La función tiene simetría impar, ya que $f(-x) = \frac{ln|-x|}{-x} = -f(x)$. Basta estudiarla para valores positivos de x.
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{ln|x|}{x} = -\infty \to$ La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

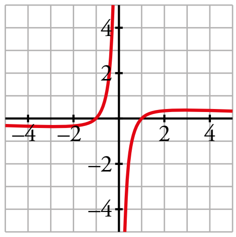
  $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln|x|}{x} = 0 \to$ La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal de la función cuando $x \to \pm\infty$.

- $f'(x) = \left(\dfrac{ln|x|}{x}\right)' = \begin{cases} \dfrac{1 - ln\, x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1 - ln\,(-x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \to y' = 0 \to x = \pm e$



$x = e,\ y = \dfrac{1}{e} \to \left(e, \dfrac{1}{e}\right)$ es un máximo relativo y,

por simetría, $\left(-e, -\dfrac{1}{e}\right)$ es un mínimo relativo.



3. Función polinómica con parámetros

- **Calcular los parámetros *a*, *b*, *c* y *d* para que la curva de f tenga dos extremos relativos en (1, 0) y (0, 1).**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Representar la función.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 1 \to d = 1$

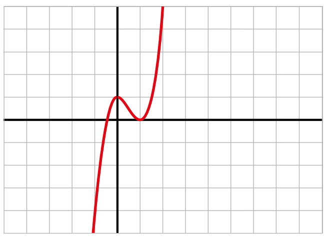
$f(1) = 0 \to a + b + c + d = 0$

$f'(0) = 0 \to c = 0$

$f'(1) = 0 \to 3a + 2b + c = 0$

El sistema formado por estas cuatro ecuaciones tiene solución: $a = 2$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 1$

La función es $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.



4. Función racional con parámetros

- **Calcular el valor del parámetro *k* para que la función:**

$$f(x) = \frac{4x^2 + x + 1}{x + k}$$

tenga $y = 4x + 5$ como asíntota oblicua.

Representar la función.

El cociente de la división $(4x^2 + x + 1) : (x + k)$ es $4x + 1 - 4k$.

Por tanto, imponemos $1 - 4k = 5$ y concluimos que $k = -1$.