

5 ► REPRESENTACIÓN DE OTROS TIPOS DE FUNCIONES

Página 318

1  **Cabezas pensantes.** [La representación de las funciones permite trabajar esta técnica].

Representa:

$$\text{a) } y = \sqrt{x^2 + 2x} \quad \text{b) } y = \sqrt{x^2 - 9} \quad \text{c) } y = \ln(x^2 + 4) \quad \text{d) } y = \ln(x^2 - 1) \quad \text{e) } y = \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{f) } y = \frac{e^x}{x^2} \quad \text{g) } y = \frac{e^{-x}}{-x} \quad \text{h) } y = x^3 e^x \quad \text{i) } y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \quad \text{j) } y = \frac{1}{\ln x}$$

$$\text{a) } y = \sqrt{x^2 + 2x}$$

$$\bullet \text{ Dominio: } x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x+2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{Dominio} = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$$

• Simetrías:

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

• No tiene asíntotas verticales.

• Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

$y = -x - 1$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$y = x + 1$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

• Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x+1 = 0 \rightarrow x = -1$$

Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

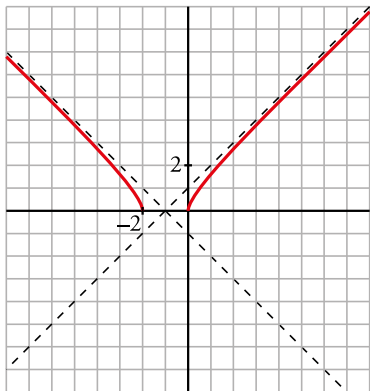
- Cortes con los ejes:

$$\text{— Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x} \rightarrow x^2 + 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Puntos: (0, 0) y (-2, 0)

$$\text{— Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto: (0, 0)}$$

- Gráfica:



$$b) y = \sqrt{x^2 - 9}$$

- Dominio: $x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

$$\text{Dominio} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

- Simetrías:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 9} = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- No tiene asíntotas verticales.

- Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

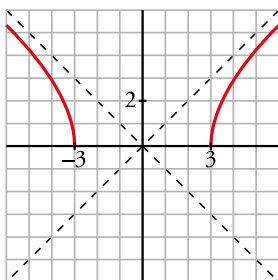
- Cortes con los ejes:

$$\text{— Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2-9} \rightarrow x^2-9=0 \begin{cases} x=-3 \\ x=3 \end{cases}$$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$

— No corta al eje Y , pues no existe $f(0)$.

- Gráfica:



c) $y = \ln(x^2 + 4)$

- Dominio:

Como $x^2 + 4 > 0$ para todo x , $\text{Dominio} = \mathbb{R}$.

- Simetrías:

$f(-x) = \ln(x^2 + 4) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y .

- No tiene asíntotas verticales.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

Tiene ramas parabólicas.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto: } (0, \ln 4)$$

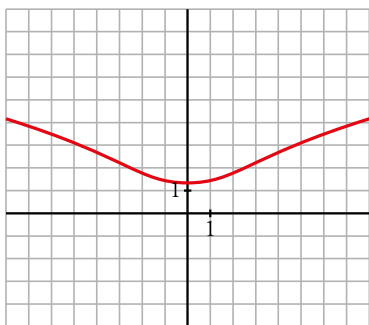
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 8 - 2x^2 = 0 \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

Puntos: $(-2, \ln 8)$ y $(2, \ln 8)$

- Gráfica:



d) $y = \ln(x^2 - 1)$

- Dominio: $x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Simetrías: $f(-x) = \ln(x^2 - 1) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y .
- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = -1 \text{ y } x = 1 \text{ son asíntotas verticales.}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

Tiene ramas parabólicas.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

No tiene puntos singulares, pues la función no está definida en $x = 0$.

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

No tiene puntos de inflexión.

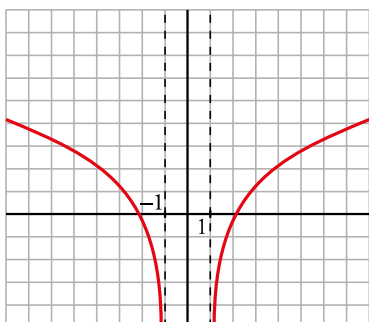
- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{— Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1$$

$$x^2 = 2 \left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{ Puntos: } (-\sqrt{2}, 0) \text{ y } (\sqrt{2}, 0)$$

— No corta al eje Y , pues no existe $f(0)$.

- Gráfica:



e) $y = \frac{\ln x}{x}$

- Dominio: Su dominio de definición es el intervalo $(0, +\infty)$.
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \rightarrow \text{Tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

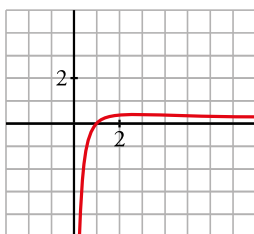
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty.$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow x = e \rightarrow f(e) = \frac{1}{e}. \text{ Tiene un punto singular: } \left(e, \frac{1}{e}\right)$$

- Gráfica:



f) $y = \frac{e^x}{x^2}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- No es simétrica.
- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Además, $f(x) > 0$ para todo x del dominio.

$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

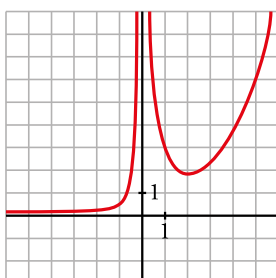
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \text{ Rama parabólica.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x (x - 2)}{x^4} = \frac{e^x (x - 2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Punto } \left(2, \frac{e^2}{4}\right)$$

- Gráfica:



g) $y = \frac{e^{-x}}{-x}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- No es simétrica.
- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty. \text{ Rama parabólica.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. f(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ positivo.}$$

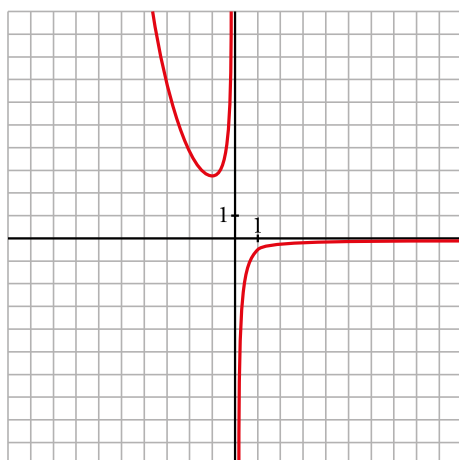
$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (-x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(-x)^2} = \frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \text{Punto: } (-1, -e)$$

- Gráfica:



h) $y = x^3 e^x$

- Su dominio de definición es $\mathbb{R}$.
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \cdot e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^x = +\infty$$

La función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot e^x = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = (3x^2 + x^3) e^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (3x^2 + x^3) e^x = 0 \rightarrow x = -3, x = 0$$

$$f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 6x) e^x$$

$$f''(-3) = (-27 + 54 - 18) e^{-3} = 9e^{-3} \rightarrow x = -3 \text{ es un mínimo relativo.}$$

$$f(-3) = -27e^{-3} \approx -1,34$$

$f''(0) = 0 \rightarrow x = 0$ es un punto de inflexión ya que la derivada segunda cambia de signo al pasar por él.

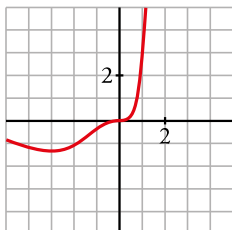
$$f(0) = 0$$

Los otros dos puntos de inflexión son: $x_1 = -3 + \sqrt{3}$ y $x_2 = -3 - \sqrt{3}$.

$$f(x_1) = -0,57$$

$$f(x_2) = -0,93$$

- Gráfica:



i) $y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$

- El período de $\cos x$ es 2π y el de $\cos 2x$ es π . Por tanto, la función es periódica de período 2π . La estudiamos solo en este intervalo.
- Es derivable en todo $\mathbb{R}$ (es suma de funciones derivables).
- Puntos singulares:

$$f'(x) = -\sin 2x - \sin x = -2\sin x \cdot \cos x - \sin x = -\sin x (2\cos x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -\sin x (2\cos x + 1) = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto: } \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ x = \pi \rightarrow \text{Punto: } \left(\pi, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \text{Punto: } \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{3}{4}\right) \\ x = \frac{4\pi}{3} \rightarrow \text{Punto: } \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

- Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2} \rightarrow$ Punto: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \cos 2x + 2\cos x = 0$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} \begin{cases} \cos x = 0,366 \\ \cos x = -1,366 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$\cos x = 0,366 \begin{cases} x = 1,2 \\ x = 5,09 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} x = 1,2 \\ x = 5,09 \end{matrix}} \right\} \text{Puntos: } (1,2; 0); (5,09; 0)$$

- Puntos de inflexión:

$$f'''(x) = -2\cos 2x - \cos x$$

$$f'''(x) = 0 \rightarrow -2\cos 2x - \cos x = 0$$

$$-2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 2\sin^2 x - \cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 2(1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

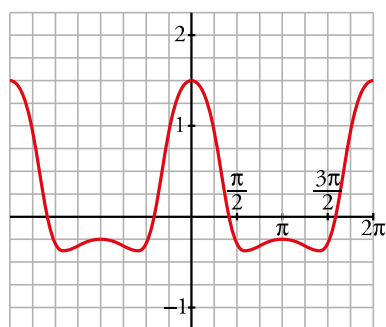
$$-2\cos^2 x + 2 - 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$-4\cos^2 x - \cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{-8} \begin{cases} \cos x = -0,843 \rightarrow x_1 = 2,57, x_2 = 3,71 \\ \cos x = 0,593 \rightarrow x_3 = 0,94, x_4 = 5,35 \end{cases}$$

Puntos: $(2,57; -0,63); (3,71; -0,63); (0,94; 0,44); (5,35; 0,45)$

- Gráfica:



j) $y = \frac{1}{\ln x}$

- Su dominio de definición es $(0, +\infty) - \{1\}$ para que se pueda evaluar el logaritmo y no se produzca una división entre 0.
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0, \text{ ya que } \ln x \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow 0^+.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \rightarrow \text{La recta } x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{-1/x}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x \ln^2 x} \rightarrow \text{No tiene puntos singulares ya que la derivada no se anula nunca.}$$

La función decrece en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$ ya que $x \cdot \ln^2 x$ siempre es positivo en ambos.

$$f''(x) = \frac{\ln x + 2}{x^2 \cdot \ln^3 x} \rightarrow f''(x) = 0 \text{ si } \ln x + 2 = 0 \rightarrow x = e^{-2}$$

La función tiene un punto de inflexión en $\left(e^{-2}, -\frac{1}{2}\right)$.

- Gráfica:

