

Nombre y apellidos: _____

NORMAS: As respostas deberán estar debidamente xustificadas. Se só se achega a solución, sen ningún tipo de explicación, a puntuación nese apartado será de cero puntos. Permítese o uso de calculadoras científicas non programables e que non teñan capacidade gráfica. En cada un dos exercicios, poderán descontarse ata 0.2 puntos pola falta de rigor matemático na resposta. Na avaliación dos exercicios, valoraranse, ademais: a. A utilización da linguaxe, notación e símbolos matemáticos adecuados. b. A utilización de argumentos, xustificacións e razoamentos coherentes. c. De ser o caso, a interpretación correcta da solución.

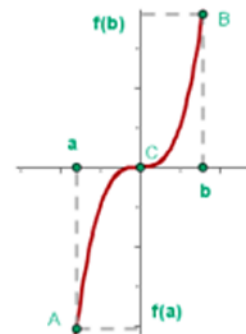
1. CA.2.1. /CA.2.2. (2 puntos)

- a) (0,5 puntos) Enuncie o Teorema de Bolzano (acompañe o teorema dun debuxo explicativo)
 b) (1,5 puntos: hipótese 1=0,5; hipótese 2= 0,5; a=0,25, b=0,25) Sexa a función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{asen}(x) + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2\operatorname{sen}(2x) + b & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Calcule os valores de **a** e **b** para que se verifiquen as hipóteses do Teorema de Bolzano en $[0, 2\pi]$

- a) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y signo de $f(a) \neq \text{signo de } f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



- b) Cada una de las funciones que definen f son continuas en $\mathbb{R}$. La función es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup (\pi, 2\pi]$.

Averiguamos los valores de a para que la función sea continua en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{asen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4 = a + 4 \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) = \frac{1}{2}(-8 + \cos \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(-8) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{asen}(x) + 4 = a + 4 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 4 = -4 \Rightarrow \boxed{a = -8}$$

Averiguamos los valores de b para que la función sea continua en $x = \pi$.

$$\left. \begin{aligned} f(\pi) &= 2\operatorname{sen}(2\pi) + b = b \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} -8\operatorname{sen}(x) + 4 = -8\operatorname{sen}(\pi) + 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} 2\operatorname{sen}(2x) + b = b \\ f(\pi) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

La función queda
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -8\operatorname{sen}(x) + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2\operatorname{sen}(2x) + 4 & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Se cumple una de las hipótesis del teorema de Bolzano. Comprobamos si la función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[0, 2\pi]$.

$$f(0) = \frac{1}{2}(-8 + \cos 0) = \frac{1}{2}(-8 + 1) = \frac{-7}{2} < 0$$

$$f(2\pi) = 2\operatorname{sen}(2 \cdot 2\pi) + 4 = 4 > 0$$

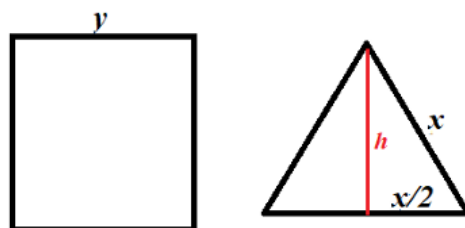
Se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano para $f(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

2. CA.2.3./ CA.2.4./ CA.4.2. (2 puntos)

(2 puntos: condición=0,5; función a optimizar=0,5; l. triángulo=0,5 (0,25 xustif.); lado cadrado=0,5 (0,25 xustif.))

A suma dos perímetros dun cadrado e dun triángulo equilátero é igual a 100 metros. Cales deben ser as medidas dos lados do cadrado e do triángulo para que a suma das súas áreas sexa mínima?

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



El triángulo equilátero tiene de lado “x” y el cuadrado tiene de lado “y”.

La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

$$4y + 3x = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 3x}{4} = 25 - \frac{3}{4}x$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos “h” y “x/2”.

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Obtenemos la expresión de la suma de las áreas de cuadrado y triángulo.

$$A(x, y) = y^2 + \frac{hx}{2} \Rightarrow \left\{ h = \frac{\sqrt{3}}{2} x \right\} \Rightarrow A(x, y) = y^2 + \frac{x \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} = y^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ y = 25 - \frac{3}{4}x \right\} \Rightarrow A(x) = \left(25 - \frac{3}{4}x \right)^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} =$$

$$= 625 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{150}{4}x + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16}$$

Derivamos la función área y vemos cuando se anula.

$$A(x) = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16} \Rightarrow A'(x) = \frac{2(9 + 4\sqrt{3})x - 600}{16}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(9 + 4\sqrt{3})x - 600}{16} = 0 \Rightarrow 2(9 + 4\sqrt{3})x - 600 = 0 \Rightarrow x = \frac{600}{18 + 8\sqrt{3}} \approx 18.83$$

A continuación confirmamos que se trata de un mínimo absoluto.

Opción 1:

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de $x = 18.83$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$A'(10) = \frac{2(9 + 4\sqrt{3})10 - 600}{16} \approx -17 < 0. \text{ La función decrece antes de } x = 18.83.$$

- Después de $x = 18.83$ tomamos $x = 20$ y la derivada vale

$$A'(20) = \frac{2(9 + 4\sqrt{3})20 - 600}{16} \approx 2.32 > 0. \text{ La función crece después de } x = 18.83.$$

Como la función decrece antes y crece después podemos afirmar que en $x = 18.83$ la función tiene un mínimo.

Opción 2:

Calculamos la segunda derivada y comprobamos si el valor para $x = 18.83$ es mayor que cero en cuyo caso tendremos un mínimo relativo.

$$A''(x) = \frac{2(9 + 4\sqrt{3})}{16} > 0$$

Podemos por tanto confirmar que en $x = 18.83$ la función tiene un mínimo relativo.

Además, como $0 < x < 33.33$ el valor de la función en los extremos del intervalo y en el mínimo relativo es:

$$A(0) = 625 \text{ m}^2; A(18.83) = 271.85 \text{ m}^2; A(33.33) = 481.03 \text{ m}^2$$

Confirmamos así que el valor mínimo es en $x = 18.83$

Para este valor del lado del triángulo determinamos el valor del lado del cuadrado.

$$y = 25 - \frac{3}{4} \left(\frac{600}{18 + 8\sqrt{3}} \right) \approx 10.87$$

El cuadrado debe tener 10.87 metros de lado y el triángulo equilátero debe tener 18.83 metros de lado para conseguir una suma de áreas del cuadrado y triángulo mínima.

3. CA.2.1./ CA. 4.1. (2 puntos)

(2 puntos: a)=1; b) estudo intervalos=0,5; estudo max./min. = 0,5)

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.

b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f .

3.a)

indeterminación $\frac{0}{0}$, L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}.$$

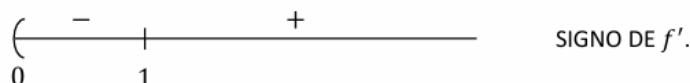
Falando con rigor, o límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$, e, análogamente, o límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$.

3.b)

$$f(x) = x(\ln x - 1), \text{Dom}(f) = (0, \infty).$$

$$f'(x) = \ln x - 1 + x \frac{1}{x} = \ln x.$$

Vese que f' ten signo negativo en $(0,1)$ e positivo en $(1, \infty)$:



Segundo esta análise, f é estritamente decrecente en $(0,1)$ e estritamente crecente en $(1, \infty)$. Dado que ademais é continua en $(0, \infty)$, conclúese que ten un mínimo absoluto (logo relativo) en $x = 1$ e que non ten outros extremos.

Por lo tanto:

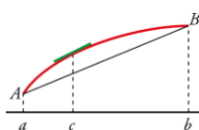
- Intervalo de decrecemento: $(0, 1)$
- Intervalo de crecemento: $(1, +\infty)$
- Mínimo relativo: $(1, -1)$
- Máximo relativo: no hay

4. CA.2.1. / CA.2.2. (2 puntos)

a) (0,5 puntos) Enuncie o Teorema do valor medio do cálculo diferencial (acompañe o teorema dun debuxo explicativo)

b) (1,5 puntos: hipótese 1=0,25; hipótese 2= 0,25; c=1) Explique se $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do calculo diferencial. En caso de que o este, calcule un valor c para o que se cumpra a tese deste teorema.

a)



f é continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) .

Entonces, existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

b) * Explicación: Como nos indican que $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, o que nos queren dicir é que x toma valores do intervalo $[0,1]$ (é dicir, están limitando o seu dominio a ese intervalo) e a función $f(x)$ devolve un número real.

Esta función existe y es continua en el intervalo $[0, 1]$, pues el radicando es positivo.

Es derivable en $(0, 1)$.

La derivada de la función es $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1-1^2} = 0 \\ f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1 \\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ c \in (0,1) / f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{0-1}{1-0} = -1 \Rightarrow -c = -\sqrt{1-c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{1-c^2} \Rightarrow c^2 = 1-c^2 \Rightarrow 2c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \{c \in (0,1)\} \Rightarrow \boxed{c = +\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

El valor buscado es $c = +\frac{\sqrt{2}}{2} \in (0,1)$

5. **CA.4.1./ CA.4.5. (2 puntos)** Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

- a) (0,75 puntos) Estude e escriba o seu dominio de definición
 b) (1,25 puntos: A.V.=0,25; A.H.=0,25; A.O.=0,25; R.P.=0,25; determinación A.=0,5) Estude a existencia de asíntotas e ramas parabólicas. Determine as asíntotas en caso de existir.

a) Vemos cuando se anula el denominador.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = x \\ \frac{1-3}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Estos valores están excluidos del dominio.

Vemos cuando existe la raíz. Para ello debe ser el radicando positivo ($x^2 - x - 2 > 0$)

En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la el radicando vale $(-2)^2 - (-2) - 2 = 4 > 0$.

La función existe en $(-\infty, -1)$.

En el intervalo $(-1, 2)$ tomamos $x = 0$ y la el radicando vale $0^2 - 0 - 2 = -2 < 0$. La

función **no** existe en $(-1, 2)$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la el radicando vale $3^2 - 3 - 2 = 3 > 0$. La función existe en $(2, +\infty)$.

El dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

b)

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{\sqrt{2^2 - 2 - 2}} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \frac{2(-1)-1}{\sqrt{(-1)^2 - (-1) - 2}} = \frac{-3}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}}} = 2$$

$y = 2$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Otra opción para el cálculo de b:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Como } x < 0 \\ \text{introduzco en la raíz} \\ -x \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x-1}{-x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{-x} - \frac{1}{-x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} =$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}}} = \frac{2}{-\sqrt{1}} = -2$$

$y = -2$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Otra opción para el cálculo de b:

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(-x)-1}{\sqrt{(-x)^2+x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues tiene una asíntota horizontal

La función no tiene ramas parabólicas, pues los límites en el infinito son finitos.