Los diez problemas de Apolonio

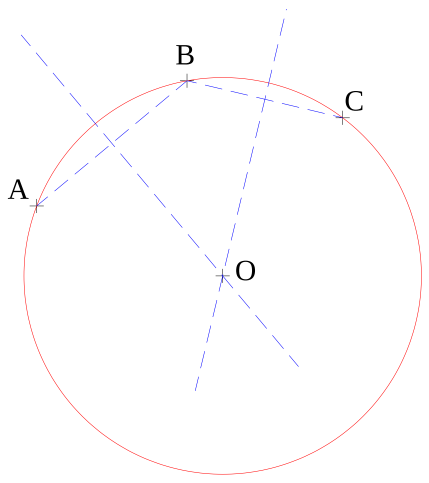
Apolonio de Perga (262-190 a.C.), que es ampliamente conocido por su tratado sobre las cónicas, no lo es tanto por su tratado sobre Tangencias. En éste, Apolonio describe el problema que hoy se conoce como Problema de Apolonio y que tiene este enunciado:

Dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto, una recta o una circunferencia, dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados.

Este problema da lugar a diez casos posibles. Los más sencillos (tres puntos y tres rectas) ya aparecen tratados en los Elementos de Euclides. Apolonio trató estos dos casos junto a estos otros seis (dos puntos y una recta; dos rectas y un punto; dos puntos y una circunferencia; dos circunferencias y un punto, dos circunferencias y una recta; un punto, una recta y una circunferencia) en el *Libro I de las Tangencias*, y los dos casos restantes (dos rectas y una circunferencia, y tres circunferencias) en el *Libro II de las Tangencias*. Aunque desgraciadamente estos libros se han perdido, a través de Pappus de Alejandría (s. IV d.C.) se sabe que Apolonio resolvió los nueve primeros, y hoy en día se cree que fue Isaac Newton el primer matemático que resolvió por medio de la regla y el compás el problema de encontrar la circunferencia tangente a otras tres circunferencias.

1. Circunferencia que pasa por tres puntos dados (PPP).

Si la circunferencia tiene que pasar por los tres puntos A,B y C dados, su centro debe coincidir con el circuncentro del triángulo ABC. Basta, por tanto, trazar las mediatrices de dos de los segmentos determinados por los tres puntos. La intersección de las mismas determinará el centro O de la circunferencia buscada.

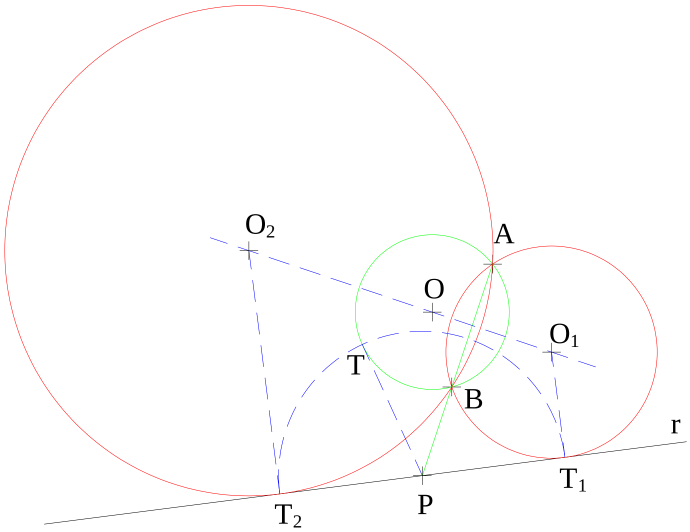


2. Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta (PPR).

Sabemos que toda circunferencia que pase por dos puntos tiene su centro en la mediatriz del segmento definido por los mismos, por lo que trazaremos la mediatriz del segmento AB. La recta AB debe ser, además, el eje radical de las circunferencias solución y de cualquier otra que pase por los puntos A y B, por lo que trazaremos una circunferencia auxiliar con centro en un punto O cualquiera de la mediatriz que pase por los puntos A y B dados.

La intersección P de la recta AB con r, por ser del eje radical, debe tener la misma potencia respecto de la circunferencia de centro O y de las circunferencias solución, y las tangentes trazadas desde P a dichas circunferencias deben medir lo mismo.

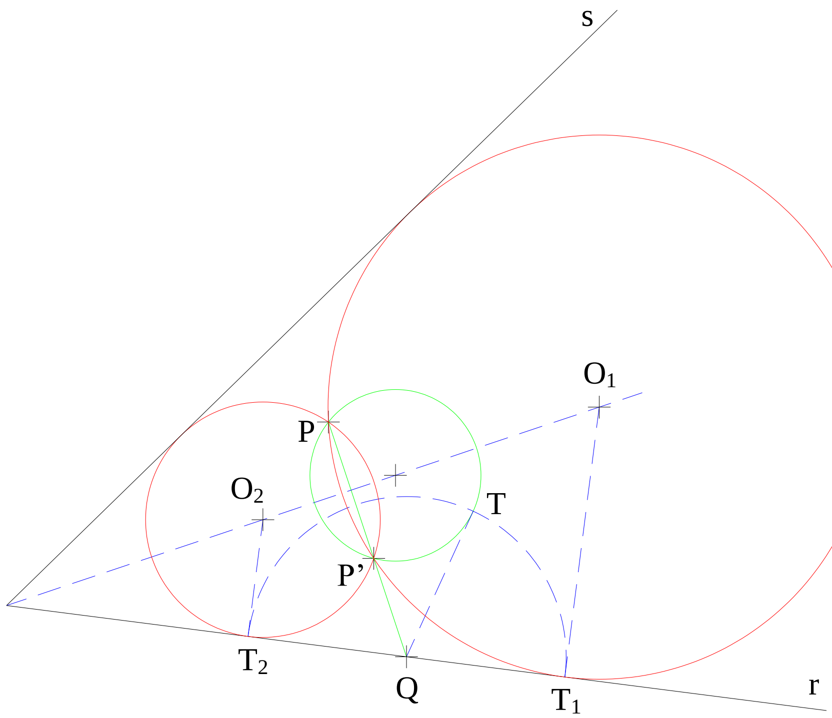
Trazamos, por tanto, la tangente PT a la circunferencia O, y con centro en P trasladamos la longitud del segmento PT sobre la recta, obteniendo los puntos de tangencia T_1 y T_2 de las circunferencias solución con la recta r. Para hallar sus centros, basta con trazar por los puntos de tangencia perpendiculares a r, que cortarán a la mediatriz de AB en los centros O1 y O2 de las soluciones.



3. Circunferencias tangentes a dos rectas dadas y que pasen por un punto (RRP).

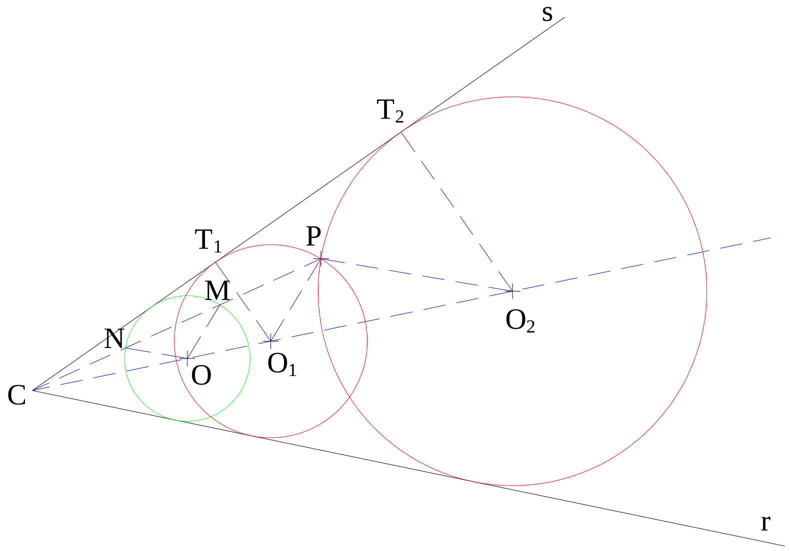
Primer procedimiento:

Se considera el punto *P* y las rectas *r* y *s* . Por una parte, es evidente que el centro de la circunferencia solución tiene que ser un punto de la bisectriz y, por otra, la circunferencia solución también debe de contener al punto *P’* (simétrico de *P* respecto de la bisectriz). Esta observación permite reducir este problema al anterior y, por tanto, se llega a la solución siguiendo los mismos pasos.



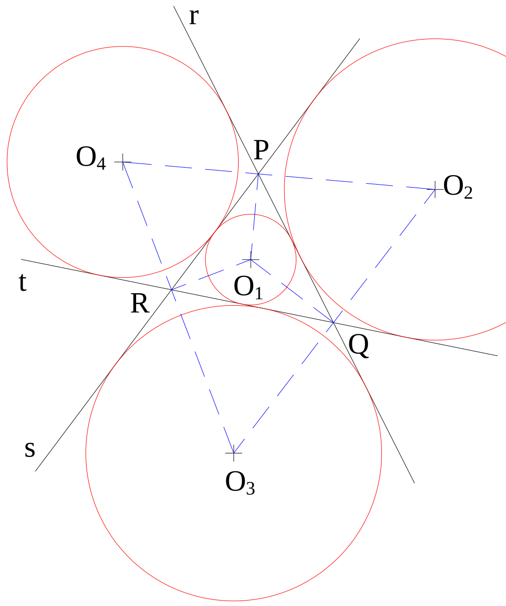
Segundo procedimiento:

Podemos establecer una homotecia directa entre todas las circunferencias tangentes a las dos rectas. El centro de homotecia será la intersección C de r y s.
Trazamos una circunferencia auxiliar cualquiera tangente a r y s, y unimos el punto P con el centro de homotecia C. La recta PC corta a la circunferencia auxiliar en los puntos M y N. Los radios OM y ON deben tener radios homotéticos en las circunferencias solución y, para hallarlos, basta con trazar paralelas a dichos radios por P, que cortarán a la bisectriz de r y s en O1 y O2, centros de las dos soluciones.



4. Circunferencias tangentes a tres rectas dadas (RRR).

Las rectas r, s y t se cortan formando un triángulo PQR. Como es sabido, las tres bisectrices de los ángulos interiores de cualquier triángulo se cortan en el incentro, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, y, por tanto, sólo hay que dibujar las tres bisectrices para determinar el centro, O_1. El radio se determina con los puntos de tangencia, y éstos se hallan trazando las perpendiculares por O_1 a cada uno de los lados. También sabemos que las bisectices exteriores de dos ángulos y la interior del otro determinan los exincentros O_2, O_3 y O_4 de las tres circunferencias exinscritas. Como en el caso anterior, los radios se determinan trazando perpendiculares a las rectas tangentes desde estos centros.

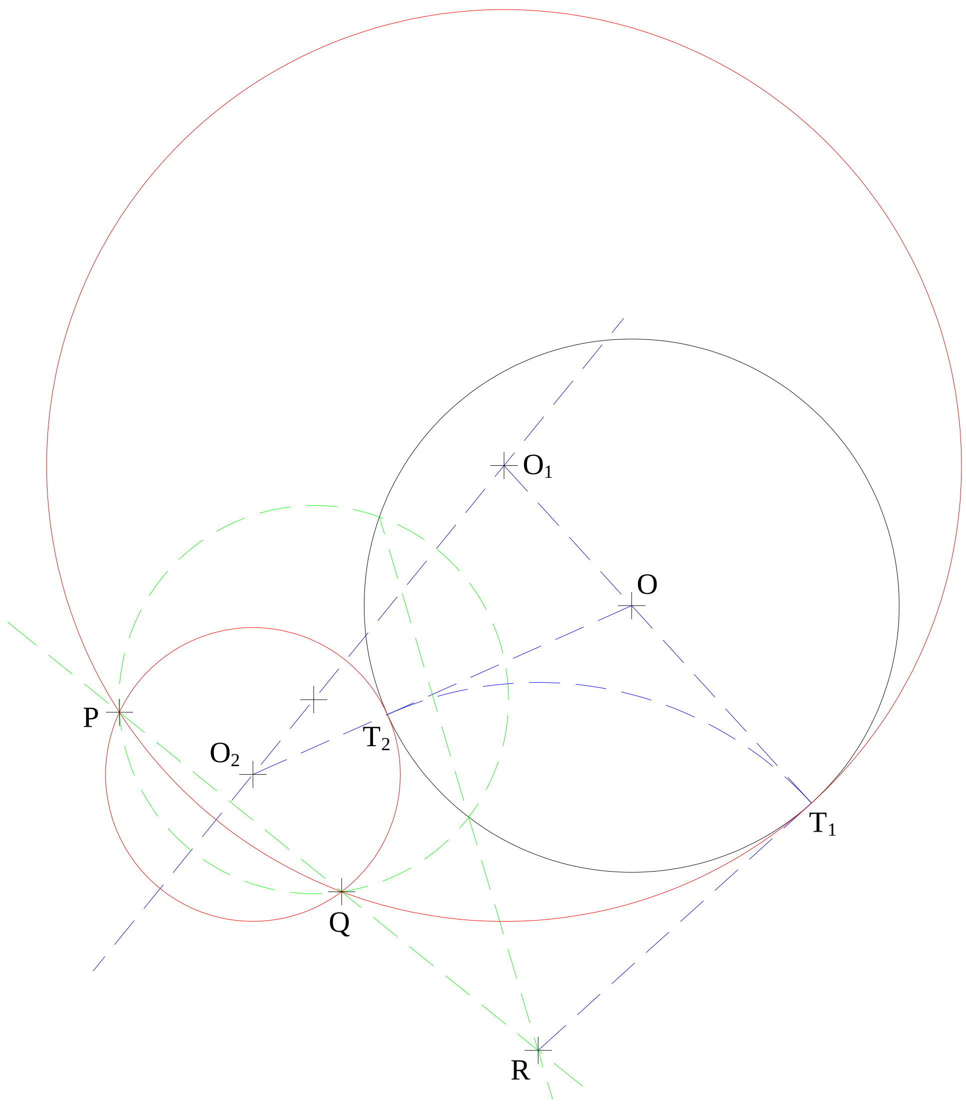


5. Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a otra circunferencia (PPC).

Considerando que los puntos son P y Q, y que el centro de la circunferencia dada es O, surgen dos casos según que los puntos sean interiores o exteriores a la circunferencia dada, casos que se construyen de forma similar.

Se traza la mediatriz del segmento PQ y la recta PQ. Los centros de las circunferencias solución tienen que estar en la mediatriz y la recta PQ será el eje radical de las dos circunferencias solución. Se traza una circunferencia auxiliar que pase por P y Q, y que corte a la circunferencia dada. El eje radical de estas dos circunferencias, junto con el eje radical de las circunferencias solución determinan el centro radical, R, de las tres circunferencias y, por tanto, las tangentes trazadas desde R a la circunferencia dada determinan los puntos de tangencia T_1 y T_2. Los centros solución, O_1 y O_2, son las intersecciones de la mediatriz a PQ con las rectas OT_1 y OT, respectivamente.

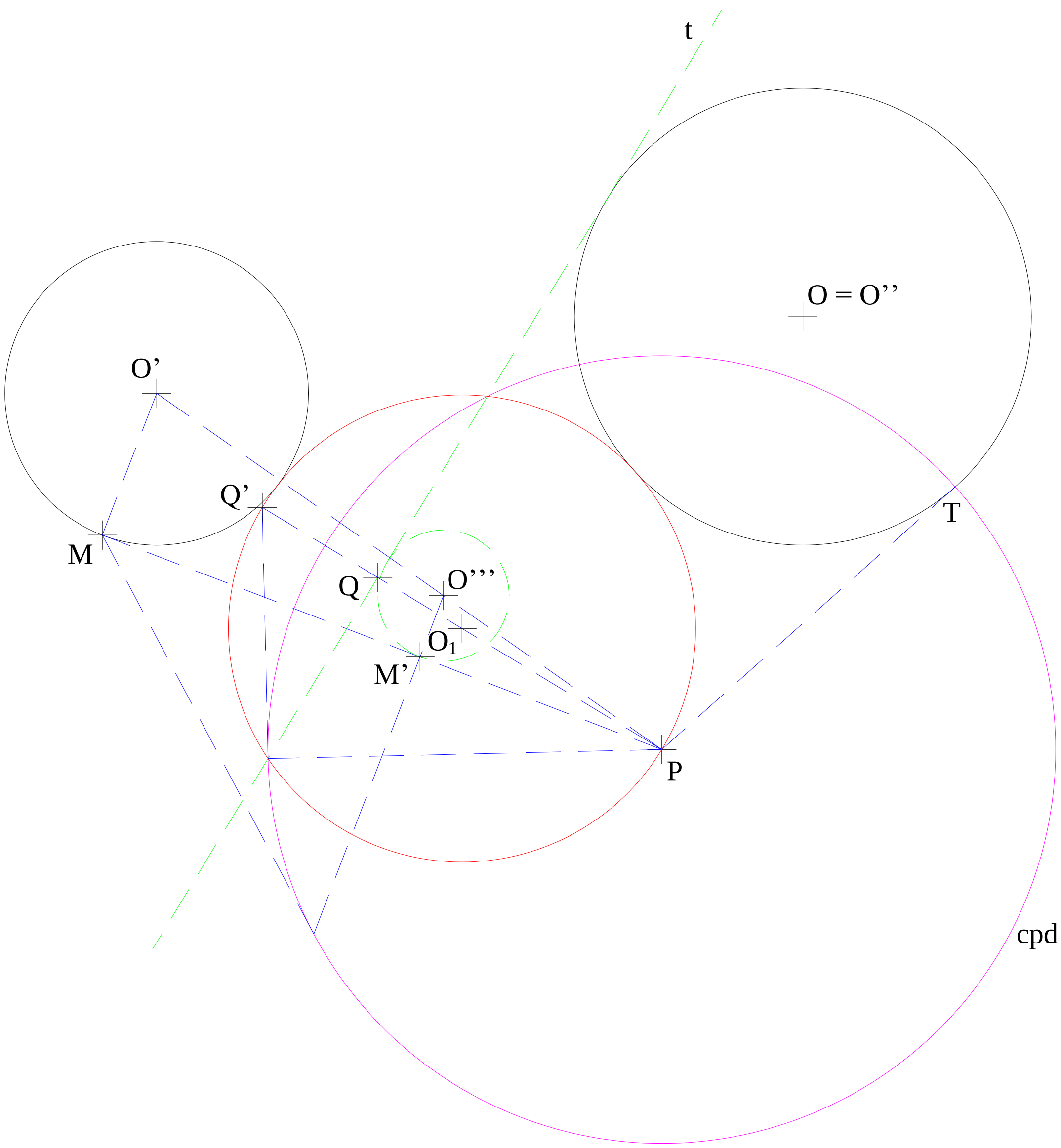
Cuando los puntos son interiores a una de las circunferencias dadas la construcción es similar.



6. Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos circunferencias (PCC).

Se dan las circunferencias O y O' y el punto P. Tomando P como centro de inversión, la circunferencia O se transforma en sí misma si la potencia de inversión es $K = PT^2$, siendo T el punto de tangencia de la tangente trazada desde P a la circunferencia O. Hallamos a continuación la inversa de O', que será otra circunferencia de centro O'''.

Si trazamos una tangente común t, a las circunferencias de centros O'' y O''', la figura inversa de esta recta será una de las circunferencias solución, de centro O_1. Para hallar las restantes soluciones del problema no tenemos más que trazar las otras tres tangentes comunes a las circunferencias O'' y O''' y hallar sus inversas. En la figura sólo se ha trazado una de las cuatro soluciones posibles.

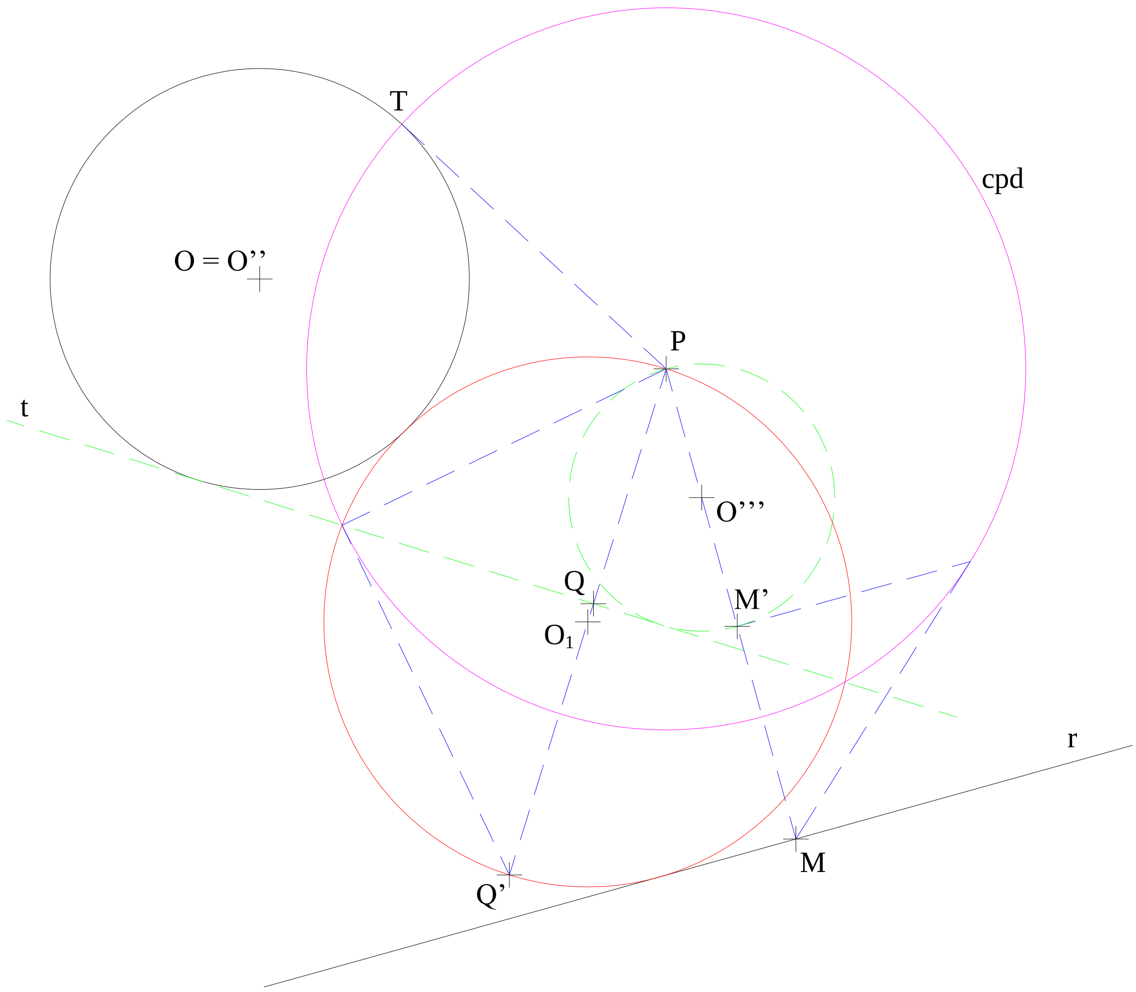


7. Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a una recta y a una circunferencia (PRC).

El procedimiento para resolver este caso es igual que el del problema anterior. Tomamos una inversión de centro el punto dado P y potencia de inversión $K = PT^2$, transformando así O en inversa de sí misma.

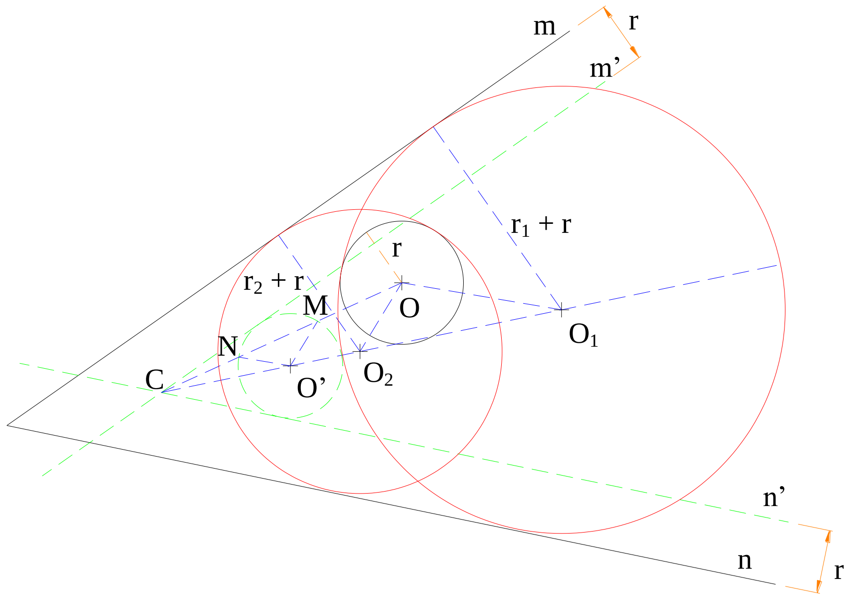
A continuación hallamos la inversa de la recta r, que será una circunferencia de centro O''', y trazamos una tangente común t a las circunferencias O'' y O'''. La inversa de esta tangente será una de las circunferencias solución de centro O_1.

Para hallar el resto de soluciones, basta trazar las restantes tres tangentes comunes a O'' y O''', y las inversas de esas tangentes serán las otras tres soluciones del problema.



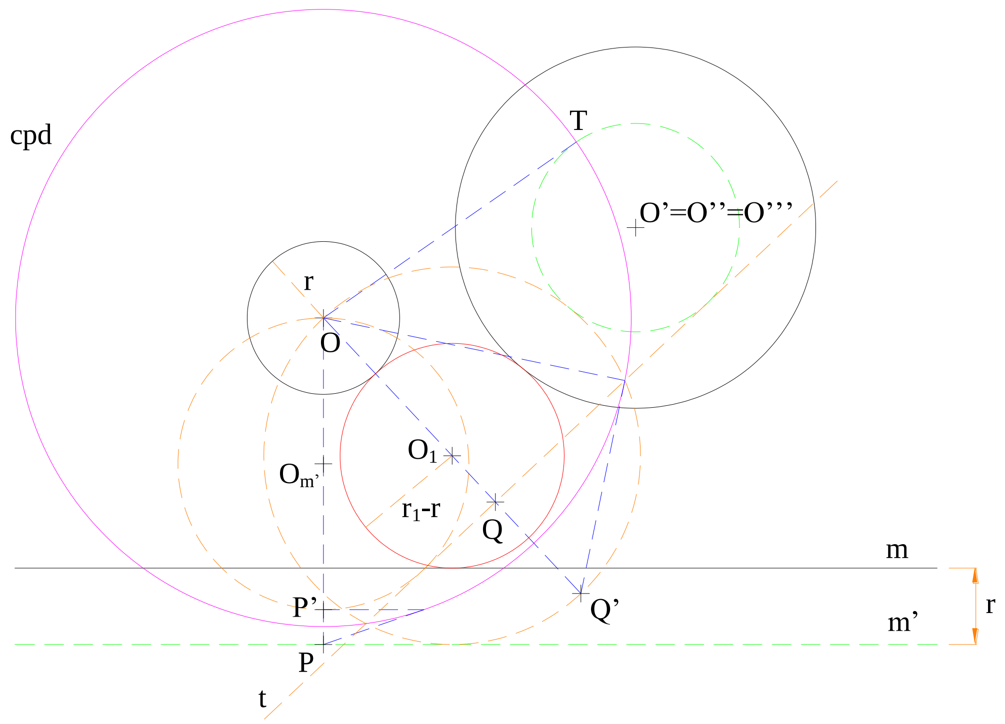
8. Circunferencias tangentes a dos rectas y a una circunferencia (RRC).

Si trazamos paralelas a las rectas a una distancia igual al radio de la circunferencia y le restamos a esta su propio radio, reducimos este problema al caso visto en el punto 3, dos rectas y un punto. Los procedimientos para resolverlo son los mismos y sólo tendríamos que sumar o restar a las circunferencias obtenidas el radio de la dada. En la figura se ha resuelto el caso por homotecia, y sólo se han trazado dos de las soluciones.



9. Circunferencias tangentes a una recta y a dos circunferencias (RCC).

Si restamos a las circunferencias dadas el radio r de la menor y, además, trazamos una paralela a la recta dada a una distancia igual a r, el problema queda reducido al caso tratado en el apartado 7, punto, recta y circunferencia. El procedimiento para resolverlo es el mismo y sólo tendríamos que sumar o restar, a las circunferencias obtenidas, el radio r. En la figura sólo se ha trazado una de las posibles soluciones.



10. Circunferencias tangentes a tres circunferencias (CCC).

Si le restamos a las tres circunferencias dadas el radio r_1 de la menor, el problema queda reducido al caso tratado en el apartado 6, punto, circunferencia, circunferencia. El procedimiento para resolverlo es el mismo y sólo deberemos sumar o restar el radio r_1 a las circunferencias que obtengamos y tendremos las soluciones del problema. En la figura sólo se ha trazado una de estas soluciones.