Página 307

4 Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

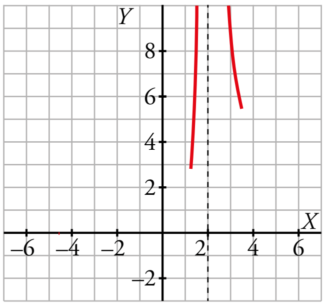
a) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2 x}$ **b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$ **c)** $y = \dfrac{3}{\sqrt{4-x}}$ **d)** $y = \log(x^2 - 4)$

e) $y = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ **f)** $y = \dfrac{2x+6}{x^2+7x+12}$ **g)** $y = \dfrac{2}{x-3} + \ln(x+2)$ **h)** $y = 3 - tg\left(\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

a) El denominador se anula cuando $x = 2$ y cuando $x = 0$.

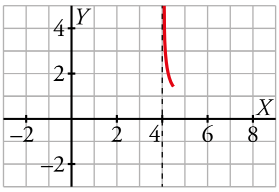
$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x} = +\infty$, ya que en las cercanías del punto 2 los dos términos de la fracción son positivos. Por tanto, en $x = 2$ hay una asíntota vertical.

Por otro lado, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = 0$ y en $x = 0$ no hay una asíntota vertical.



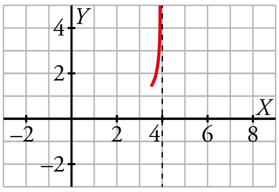
b) El denominador se anula cuando $x = 4$ y el dominio de la función es el intervalo $(4, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-4}} = +\infty$ y en $x = 4$ tenemos una asíntota vertical.



c) El denominador se anula cuando $x = 4$ y el dominio de la función es el intervalo $(-\infty, 4)$.

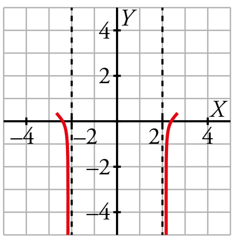
$\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{3}{\sqrt{4-x}} = +\infty$ y en $x = 4$ tenemos una asíntota vertical.



d) El dominio de definición es $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ ya que $x^2 - 4 > 0$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} \log(x^2 - 4) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} \log(x^2 - 4) = -\infty$ porque en ambos casos $x^2 - 4 \to 0^+$.

Luego tiene dos asíntotas verticales: una en $x = -2$ y otra en $x = 2$.



e) El denominador se anula cuando $x = 1$, $x = -1$.

El dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

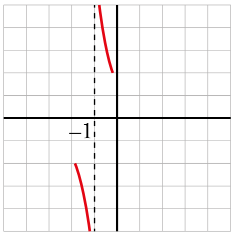
Observamos que el numerador también se anula en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

En $x = 1$, hay una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = +\infty$$

Por tanto, en $x = -1$ hay una asíntota vertical.



f) El denominador se anula cuando $x = -4$, $x = -3$.

El dominio de la función es $(-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, +\infty)$.

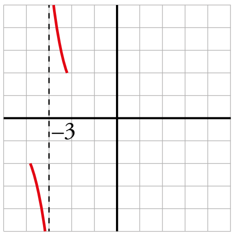
El numerador se anula cuando $x = -3$.

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x+6}{x^2+7x+12} = \lim_{x \to -3} \frac{2(x+3)}{(x+4)(x+3)} = \lim_{x \to -3} \frac{2}{x+4} = 2$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = -3$.

$$\lim_{x \to -4^-} \frac{2x+6}{x^2+7x+12} = -\infty \qquad \lim_{x \to -4^+} \frac{2x+6}{x^2+7x+12} = +\infty$$

Hay una asíntota vertical en $x = -4$.



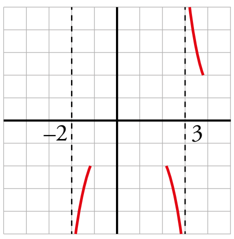
g) $x - 3$ se anula cuando $x = 3$ mientras que $ln\,(x + 2)$ existe solo si $x > -2$.

El dominio de la función es $(-2, 3) \cup (3, +\infty)$.

$$\lim_{x \to -2^+} \left[\frac{2}{x-3} + ln(x+2)\right] = -\infty$$

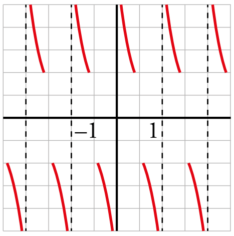
$$\lim_{x \to 3^-} \left[\frac{2}{x-3} + ln(x+2)\right] = -\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} \left[\frac{2}{x-3} + ln(x+2)\right] = +\infty$$

Hay dos asíntotas verticales en $x = -2$ y en $x = 3$.



h) $\lim\limits_{x \to k^-} tg\left(\dfrac{(2x+1)\pi}{2}\right) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to k^+} tg\left(\dfrac{(2x+1)\pi}{2}\right) = +\infty$

La función del enunciado tiene asíntotas verticales en $x = k$, con k entero.



Página 309

5 Halla las ramas en el infinito de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

e) $y = ln\,(x^2 + 1)$

f) $y = 2^{x-1}$

g) $y = x\,sen\,x$

h) $y = x - cos\,x$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - 20x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^5 - 20x^3) = -\infty$

Tiene sendas ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido por ser una función polinómica.

b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$

En el infinito, la función dada es equivalente a $x^2 + 1$, luego tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido y $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to \pm\infty$.

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = x + 4 + \dfrac{12x - 16}{(x-2)^2}$

La función tiene una asíntota oblicua cuando $x \to \pm\infty$ y es la recta $y = x + 4$.

d) En el infinito, la función es equivalente a $\sqrt{x^2} = |x|$, luego $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to \pm\infty$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,(x^2 + 1) = +\infty$

$y = ln\,(x^2 + 1)$ es equivalente en el infinito a $y = ln\,(x^2) = 2ln\,|x|$.

Luego $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,(x^2 + 1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\;ln|x|}{x} = 0$.

Lo mismo ocurre cuando $x \to -\infty$ y, por tanto, tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más lento cuando $x \to \pm\infty$.

f) Esta función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \to +\infty$ por ser una función exponencial. Por el mismo motivo, la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\,sen\,x)$ no existe.

Análogamente ocurre cuando $x \to -\infty$ y, por tanto, esta función no tiene ni asíntotas ni ramas parabólicas.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \cos x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\cos x}{x}\right) = 1$ porque la función $\cos x$ está acotada entre –1 y 1.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \cos x - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ no existe.

En consecuencia, no tiene asíntotas ni ramas parabólicas.

6 **¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen estas funciones?**

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{3x}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ **d)** $y = \dfrac{x^4}{x+1}$

e) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ **f)** $y = \sqrt[3]{x^2+3}$ **g)** $y = x + \sqrt{x}$ **h)** $y = tg\, x$

a) Tiene una asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$. Es la recta $y = 0$.

b) $y = \dfrac{3x}{x+1} = 3 - \dfrac{3}{x+1}$ tiene una asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$. Es la recta $y = 3$.

c) $y = \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$. Por tanto, la recta $y = x - 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \to \pm\infty$.

d) $y = \dfrac{x^4}{x+1} = x^3 - x^2 + x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido por ser equivalente en el infinito a una función polinómica.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$. La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2/e^x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x} = -\infty$. La función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \to -\infty$.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+3}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x^2+3}{x^3}} = 0$

Se da la misma situación cuando $x \to -\infty$ por ser una función par. Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más lento.

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más lento cuando $x \to +\infty$.

Como su dominio de definición es el intervalo $[0, +\infty)$, no podemos estudiarla cuando $x \to -\infty$.

h) La función $y = tg\, x$ es periódica y no acotada. No tiene asíntotas ni ramas parabólicas en el infinito.