EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 296

1. Tangente perpendicular a una recta

- **Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 2 = 0$.**

La recta $y = -x + 2$ tiene pendiente –1. Cualquier recta perpendicular a ella tendrá pendiente $-\frac{1}{-1} = 1$. Por tanto, debemos calcular los puntos de la curva en los que la pendiente vale 1.

$$f'(x) = 12x^2 - 2$$

$$f'(x) = 1 \rightarrow 12x^2 - 2 = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2},\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2} + 1\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = x + 2$$

$$x = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} + 1\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = x$$

2. Intervalos de concavidad y convexidad

- **Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función:**

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

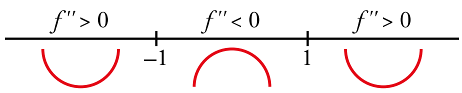
El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 1 = 0$ no tiene solución $\rightarrow$ No tiene puntos de inflexión y la tabla de los signos de la segunda derivada es:



(el signo de la segunda derivada solo depende del denominador)

La función es cóncava en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$. Es convexa en $(-1, 1)$.

3. Máximo y mínimo absoluto

- **Calcular el máximo y el mínimo absolutos, en el intervalo [–1, 2] de la función:**

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$$

$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$ está definida en $\mathbb{R}$ ya que el argumento del logaritmo siempre es positivo. Es una función continua y derivable en [–1, 2]. Por ser continua en un intervalo cerrado y acotado, alcanza sus extremos absolutos. Estos pueden ser los extremos del intervalo o los extremos relativos si están en el interior.

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - 1$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{2x+1}{x^2+x+1} = 1 \;\rightarrow\; 2x + 1 = x^2 + x + 1 \;\rightarrow\; x = 1,\; x = 0$$

Evaluamos:

$x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = ln\,((-1)^2 + (-1) + 1) - (-1) = 1$

$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = ln\, 1 = 0$

$x = 1 \;\rightarrow\; f(1) = ln\, 3 - 1 \approx 0{,}0986$

$x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = ln\, 7 - 2 \approx -0{,}054$

Alcanza el máximo absoluto en $(1, 1)$ y el mínimo absoluto en $(2, ln\, 7 - 2)$.

4. Teorema del valor medio

5. Extremos relativos

- **Sea $f(x) = x^2\, e^{-ax}$ con $a \neq 0$.**

  a) Calcular el valor de a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

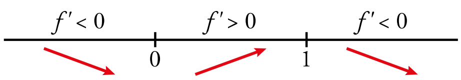
  b) Clasificar los extremos relativos cuando $a = 2$.

a) $f'(x) = 2xe^{-ax} - ax^2e^{-ax}$

$f'(2) = 0 \;\rightarrow\; 4e^{-2a} - 4ae^{-2a} = 0 \;\rightarrow\; e^{-2a}(4 - 4a) = 0 \;\rightarrow\; 4 - 4a = 0 \;\rightarrow\; a = 1$ (ya que la exponencial nunca se anula)

b) Para $a = 2$ la derivada es $f'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}$.

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 1,\; x = 0$



$x = 0,\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$ es un mínimo relativo.

$x = 1,\; f(1) = e^{-2} \;\rightarrow\; (1, e^{-2})$ es un máximo relativo.