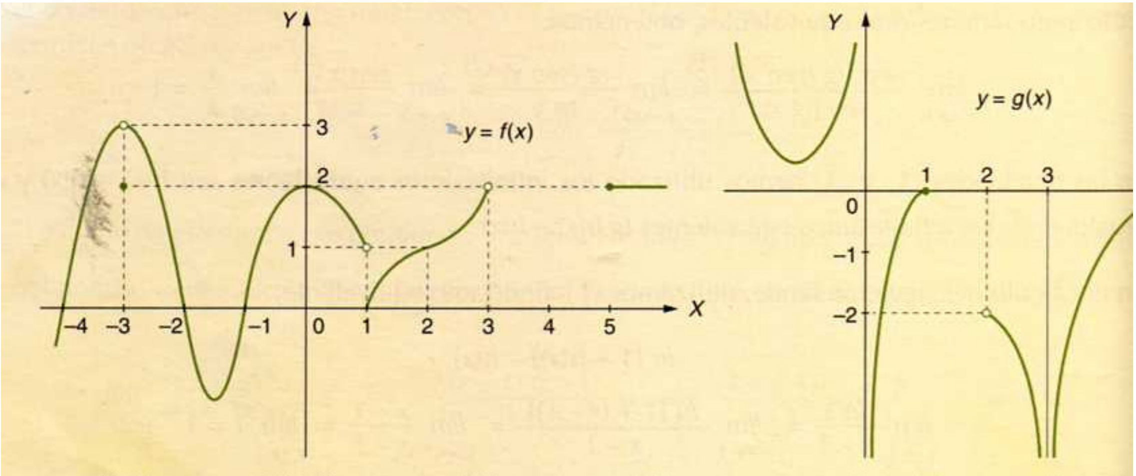
1. Definición de Continuidad

Veamos la definición de la continuidad:

Definición: Una función f(x) es continua en un punto x_0 si en dicho punto se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$
2. La función definida en x_0, es decir $x_0\in$Dom(f(x))
3. Los dos valores anteriores coinciden: $\lim_{x\to x_0} f(x)$=f(x_0).

Ejemplo:



1) Dom(f(x))=(-∞,3)∪[5,∞)

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=-3 → $\lim_{x\to -3} f(x)$=3≠f(3)=2

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

c) x=5 → $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe pues no existe el límite por la izquierda

2) Dom(g(x))=(-∞,0)∪(0,1]∪(2,3)∪(3,∞)

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=0 → $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe pues no existe el límite por la derecha

c) x=3 → $\lim_{x\to 3} g(x) = -\infty$ pero 3∉Dom(g(x))

Definición: Una función f(x) es continua en un intervalo (a,b) si en todos los puntos del intervalo es continua. Esto ocurre cuando al dibujar la gráfica "no levantamos el boli de la hoja para dibujarla"

En el ejemplo anterior f(x) continua en $(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,3)\cup(5,\infty)$. La función g(x) en $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$.

2. Tipos de discontinuidades

***Definición**:* Una función f(x) es discontinua en un punto x_0 si no es continua en dicho punto.

Existen dos tipos de discontinuidades:

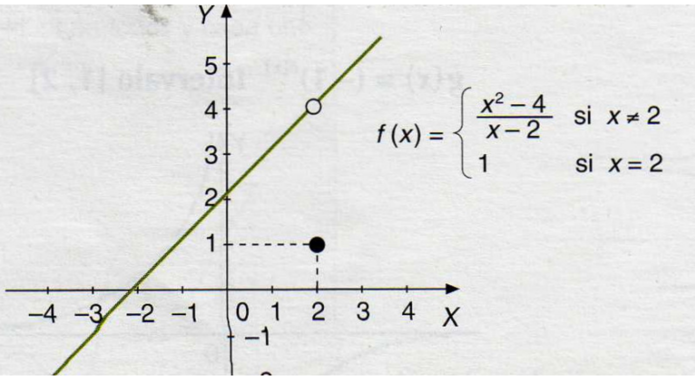
a) Discontinuidad evitable
b) Discontinuidad no evitable

<u>Discontinuidad evitable</u>: Una función f(x) presenta una discontinuidad evitable en el punto x_0 si se cumple las siguientes condiciones:

1. El límite de la función en x_0 existe,
2. El límite no coincide con $f(x_0)$ o bien la función no está definida en x_0 (es decir $x_0 \notin Dom(f(x))$

Ejemplos:

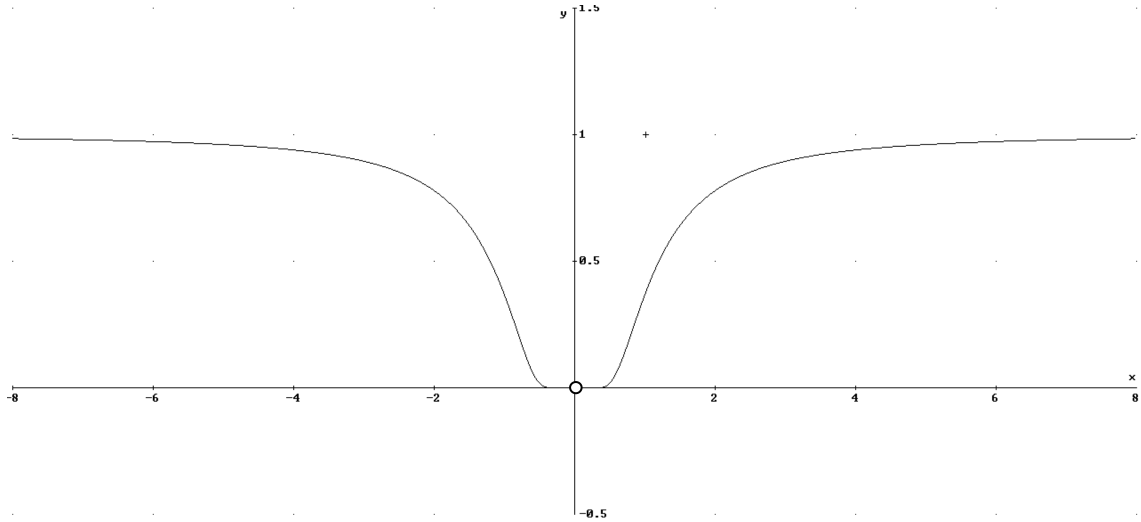
1)



$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 1$. Esta discontinuidad se evita redefiniendo la función en x=2, haciendo que en este punto la función tome el mismo valor que el límite es decir f(2)=4

Así la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & si\ \ x \neq 2 \\ 4 & si\ \ x = 2 \end{cases}$ = x+2 si es continua pues $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$

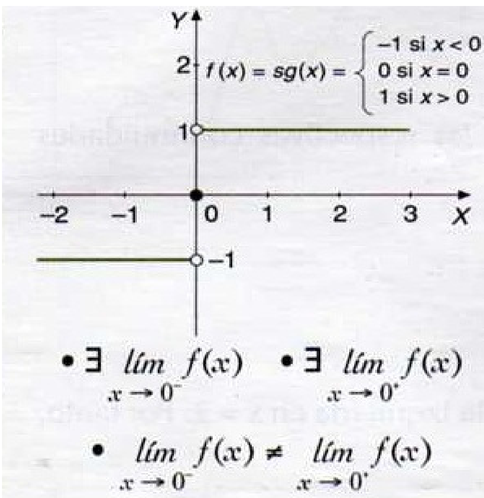
2) g(x)=$e^{-\frac{1}{x^2}}$



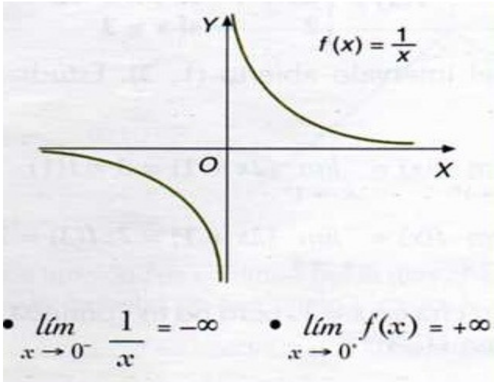
$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ pero $0 \notin$ Don(g(x)). Esta discontinuidad se evitaría si redefinimos la función tal que en x=0 esta valga lo mismo que el límite: g(x)=$\begin{cases} e^{-1/x^2} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$

Discontinuidad no evitable: Es aquella en la que el límite en el punto o no existe o es infinito. Pueden ser a su vez de 2 tipos:

1) *Salto finito en x_0*: los límites laterales no coinciden $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$



2) *Salto infinito en x_0:* cuando los dos límites laterales en x_0 o al menos uno de ellos es $+\infty$ o $-\infty$.



3. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas.

Las funciones elementales, por lo general, son continuas en todos los puntos del dominio. Las discontinuidades más importantes aparecen en funciones definidas a trozos (discontinuidades evitables o de salto finito), y en funciones con denominador en el valor donde se anula éste (discontinuidad de salto infinito).

Operaciones de funciones continuas: Sean f(x) y g(x) funciones continuas en x_0

1) Las funciones suma y resta $(f \pm g)(x)$ son continua en x_0
2) La función producto $(f \cdot g)(x)$ es continua en x_0
3) La función división $(f/g)(x)$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$
4) Si g(x) es continua en x_0 y f(x) es continua en $g(x_0)$ entonces la función compuesta $(f \circ g)(x)$ es continua en x_0.