EJERCICIOS BLOQUE: ANÁLISIS_CIUGA_2025-2020

UD1.

LÍMITES Y CONTINUIDAD
A1.- LÍMITES

A2.- CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

A3.- TEOREMAS CONTINUIDAD: T. BOLZANO, T. VALORES INTERMEDIOS (DARBOUX), T. WEIERSTRASS

DERIVADAS. APLICACIONES
A4.- DERIVADA

A5.- CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

A6.- DERIVADAS: RECTA TANGENTE Y NORMAL

A7.- DERIVADAS: OPTIMIZACIÓN

A8.- TEOREMAS DERIVABILIDAD: T. DE ROLLE, T. DEL VALOR MEDIO

A9.- LIMITES, INDETERMINACIONES POR L´HÔPITAL

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES
A10.- ESTUDIO DE FUNCIONES: DOMINIO, PUNTOS DE CORTE, MONOTONÍA, MÁXIMOS, MÍNIMOS, CURVATURA, PUNTOS DE INFLEXIÓN, ASÍNTOTAS...

A11.- ESTUDIO DE FUNCIONES CON PARÁMETROS

A12.- ESTUDIO DE FUNCIONES CON VALORES ABSOLUTOS

A13.- ESTUDIO DE FUNCIONES CON log, ln, e^x...

UD2.

B1. INTEGRAL INDEFINIDA

B2. INTEGRAL DEFINIDA

GAL_25_ORD **EJERCICIO 1** UD1_A2 UD1_A5 **EJERCICIO 2** UD2_B2	**PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.** **3.1.** Dada la función $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & \text{si} \quad x \le 1, \\ x^2 - m & \text{si} \quad x > 1, \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones: **3.1.1.** ¿Qué condición deben cumplir k y m para que f sea continua en $x = 1$? **3.1.2.** ¿Para qué valores de k y m es f derivable en $x = 1$? **3.2.** Dibuje la región encerrada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{2x+1}$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 4$. Luego, calcule su área.
GAL_25_EXT **EJERCICIO 3** UD1_A8 UD2_B1 **EJERCICIO 4** UD1_A2 UD1_A5 UD1_A6	**PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos)** **Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.** **3.1.** Responda a las dos cuestiones siguientes: **3.1.1.** Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial. **3.1.2.** Calcule $\int e^x \cos 3x dx$. **3.2.** Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones: **3.2.1.** Estudie la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 0$. **3.2.2.** Estudie la derivabilidad de la función $f(x)$ en $x = 0$. **3.2.3.** Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x = -1$.
GAL_24_ORD **EJERCICIO 5** UD1_A8 UD1_A3 UD2_B1 **EJERCICIO 6** UD1_A9 UD1_A9	**PREGUNTA 3. Análise. (2 puntos)** a) Enuncie os teoremas de Rolle e de Bolzano. b) Calcule $\int x^3 e^{x^2}$. **PREGUNTA 4. Análise. (2 puntos)** Calcule os seguintes límites: a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$. b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$.
GAL_24_EXT **EJERCICIO 7** UD1_A2 UD1_A5 **EJERCICIO 8** UD2_B2	**PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & si \ x \le 0 \\ \frac{k - xe^x}{x} & si \ x > 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones: a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b? b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$? **PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)** Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.
GAL_23_ORD **EJERCICIO 9** UD1_A9 UD1_A10 **EJERCICIO 10** UD2_B2	**3. Análisis** a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0, 2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo. **4. Análisis:** Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \ge 1, y \le x$ e $y \ge f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota**: ln$x$ es el logaritmo neperiano de x.
GAL_23_EXT **EJERCICIO 11** UD2_A8 **EJERCICIO 12** UD2_B1 UD2_B1	**3. Análisis** a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial. b) Explique si $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema. **4. Análisis:** a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x dx$ y $\int (\ln x) / x dx$. b) Calcule $\int (\ln x) / x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x) / x dx = 3/2$.
GAL_22_ORD **EJERCICIO 13** UD1_A9 UD1_A10 **EJERCICIO 14** UD1_A6	**3. Análisis** a) Calcule los límites $\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$, donde *lnx* es el logaritmo neperiano de *x*. b) Dibuje la gráfica de una función *f* continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ en el intervalo (0, 1), $f'' < 0$ en el intervalo (2, 3) y *f* es constante en el intervalo (1, 2). **4. Análisis:** Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.
GAL_22_EXT **EJERCICIO 15** UD1_A6 UD1_A5 **EJERCICIO 16** UD2_B1	**3. Análisis** a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo. b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si \ x \le 1 \\ ax^2 + bx & si \ x > 1 \end{cases}$, sea derivable. **4. Análisis:** Calcule las siguientes integrales: a) $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$ b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) dx$ c) $\int x^2 \sin x dx$ d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$
GAL_21_ORD **EJERCICIO 17** UD1_A7 **EJERCICIO 18** UD2_B2	**PREGUNTA 3. Análisis (2 puntos)** De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área. **PREGUNTA 4. Análisis (2 puntos)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & si \quad x \le 0 \\ -x^2 - x - 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

GAL_21_EXT
EJERCICIO 19
UD1_A3
UD1_UD1_A3

3. Análisis
a) Enuncie el teorema de Bolzano.
b) Obtenga los valores de a, b y c que hacen que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpla $f(0)=1$ y tenga extremos relativos en $x=\pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

EJERCICIO 20
UD1_A8
UD1_B2

4. Análisis:
a) Enuncie el teorema de Rolle.
b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x)=x+6$ y $g(x)=\begin{cases}-2x & si \quad x<0 \\ x^2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

GAL_20_ORD
EJERCICIO 21
UD1_A9
UD1_A10

3. Análise:
a) Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$.
b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f.

EJERCICIO 22
UD1_A2
UD1_A5
UD2_B1

4. Análise:
a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x)=\begin{cases}e^{2x} & \text{se} \quad x\leq 0, \\ x^2+bx+c & \text{se} \quad x>0\end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x=0$.
b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

GAL_20_EXT
EJERCICIO 23
UD1_A2
UD1_A5

3. Análise:
Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x)=\begin{cases}\frac{a-\cos x}{x} & \text{se} \quad x<0, \\ bx & \text{se} \quad x\geq 0\end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

EJERCICIO 24
UD2_B2

UD2_B1

4. Análise:
a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+1 & \text{se} \quad x<0, \\ (x-1)^2 & \text{se} \quad x\geq 0.\end{cases}$
b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

RESOLUCIÓN

GAL_25_ORD
EJERCICIO 1
UD1_A2
UD1_A5

EJERCICIO 2
UD2_B2

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1. Dada la función $f(x)=\begin{cases}kx^2+2x & \text{si} \quad x\leq 1, \\ x^2-m & \text{si} \quad x>1,\end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.1.1. ¿Qué condición deben cumplir k y m para que f sea continua en $x=1$?
3.1.2. ¿Para qué valores de k y m es f derivable en $x=1$?

3.2. Dibuje la región encerrada por la gráfica de $f(x)=\sqrt{2x+1}$, el eje X y las rectas $x=0$, $x=4$. Luego, calcule su área.

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.
3.1. Dada la función $f(x)=\begin{cases}kx^2+2x & si \ x\leq 1 \\ x^2-m & si \ x>1\end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:
3.1.1. ¿Qué condición deben cumplir k y m para que f sea continua en $x=1$?
3.1.2. ¿Para qué valores de k y m es f derivable en $x=1$?

3.1.1. Para que f sea continua en $x=1$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=k\cdot 1^2+2\cdot 1=k+2 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} kx^2+2x=k+2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2-m=1-m \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow k+2=1-m\Rightarrow \boxed{m=-k-1}$$

Para que se cumpla lo pedido debe ser $m=-k-1$.

3.1.2. Para ser derivable debe ser continua, por lo que debe cumplirse $m=-k-1$.

La función queda $f(x)=\begin{cases}kx^2+2x & si \ x\leq 1 \\ x^2+k+1 & si \ x>1\end{cases}$.

Esta función es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$. Su derivada es $f'(x)=\begin{cases}2kx+2 & si \ x<1 \\ 2x & si \ x>1\end{cases}$.

Para que sea derivable en $x=1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} 2kx+2=2k+2 \\ f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} 2x=2 \\ f'(1^-)=f'(1^+)\end{array}\right\}\Rightarrow 2k+2=2\Rightarrow \boxed{k=0}$$

La función f derivable en $x=1$ para $k=0$ y $m=-k-1=0-1=-1$.

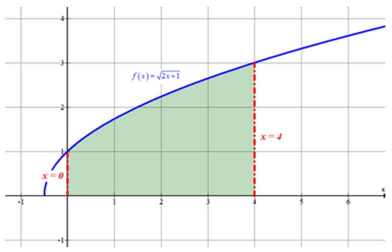
3.2. Dibuje la región encerrada por la gráfica de $f(x)=\sqrt{2x+1}$, el eje X y las rectas $x=0$, $x=4$. Luego, calcule su área.

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{2x+1} \\ Eje\ X\rightarrow y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{2x+1}=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\notin(0,4)$$

La gráfica no corta el eje X. Como la función es positiva el área de la región encerrada por la gráfica de $f(x)=\sqrt{2x+1}$, el eje X y las rectas $x=0$, $x=4$ es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 4.
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función y la región de la cual queremos hallar su área. Con el dibujo podemos aproximar el valor del área.

x	$f(x)=\sqrt{2x+1}$
0	1
1	$\sqrt{3}$
2	$\sqrt{5}$
3	$\sqrt{7}$
4	3



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada podemos decir que el área de la región coloreada tiene un valor entre 8 y 9 unidades cuadradas.

Hallamos el valor exacto del área usando el cálculo integral.

$$Área=\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^4\sqrt{2x+1}dx=\int_0^4(2x+1)^{1/2}\,dx=$$

$$=\left[\frac{1}{1+1/2}\cdot\frac{1}{2}(2x+1)^{1+1/2}\right]_0^4=\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\right]_0^4=\left[\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}\right]_0^4=$$

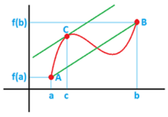
$$=\left[\frac{\sqrt{(2\cdot 4+1)^3}}{3}\right]-\left[\frac{\sqrt{(2\cdot 0+1)^3}}{3}\right]=\frac{\sqrt{9^3}}{3}-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{26}{3}\simeq 8.667\ u^2}$$

GAL_25_EXT **EJERCICIO 3** UD1_A8 UD2_B1 **EJERCICIO 4** UD1_A2 UD1_A5 UD1_A6	**PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos)** **Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.** **3.1.** Responda a las dos cuestiones siguientes: **3.1.1.** Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial. **3.1.2.** Calcule $\int e^x \cos 3x dx$. **3.2.** Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{si} \quad x<0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones: **3.2.1.** Estudie la continuidad de la función $f(x)$ en $x=0$. **3.2.2.** Estudie la derivabilidad de la función $f(x)$ en $x=0$. **3.2.3.** Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x=-1$.

3.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:
3.1.1. Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.
3.1.2. Calcule $\int e^x \cos 3x dx$.

3.1.1. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b) entonces existe al menos un valor $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



3.1.2. Calculamos la expresión de la integral indefinida pedida usando el método de integración por partes.

$$\int e^x \cos 3x dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{Integración por partes} \\ \int u dv = uv - \int v du \\ u = \cos 3x \to du = -3 sen 3x dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos 3x - \int -3 sen 3x \cdot e^x dx = \ldots$$

$$\boxed{\int sen 3x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{Integración por partes} \\ \int u dv = uv - \int v du \\ u = sen 3x \to du = 3\cos 3x dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x sen 3x - \int 3\cos 3x e^x dx}$$

$$\ldots = e^x \cos 3x + 3\left[e^x sen 3x - \int 3 \cos 3x e^x dx \right] = e^x \cos 3x + 3e^x sen 3x - 9\int e^x \cos 3x dx$$

Hemos visto que $\int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x sen 3x - 9\int \cos 3x e^x dx$.
Despejamos la integral en la igualdad y obtenemos su expresión.

$$\int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x sen 3x - 9\int e^x \cos 3x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos 3x dx + 9\int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x sen 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x sen 3x \Rightarrow \boxed{\int e^x \cos 3x dx = \frac{e^x(\cos 3x + 3 sen 3x)}{10}}$$

Hemos obtenido que $\int e^x \cos 3x dx = \dfrac{e^x(\cos 3x + 3 sen 3x)}{10}$.

3.2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & si \ x<0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} & si \ x \geq 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:
3.2.1. Estudie la continuidad de la función $f(x)$ en $x=0$.
3.2.2. Estudie la derivabilidad de la función $f(x)$ en $x=0$.
3.2.3. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x=-1$.

3.2.1. En el intervalo $(-\infty,0)$ la función tiene la expresión $f(x) = xe^{4x}$ que es continua en todo el intervalo pues es producto de funciones continuas.

En el intervalo $(0,+\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ cuyo denominador se anula para $x=-1$ que no pertenece al intervalo de definición y también tenemos que $x>0$ $\to$ $1+x>1>0$, por lo que la función logaritmo neperiano existe y es continua. La función es continua en $(0,+\infty)$.

Estudiamos la continuidad en $x=0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \dfrac{\ln(1+0)}{1+0} = \dfrac{0}{1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} xe^{4x} = 0 \cdot e^{4\cdot 0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

La función es continua en $x=0$.
La función es continua en todo su dominio $\mathbb{R}$.

3.2.2. En el intervalo $(-\infty,0)$ la función tiene la expresión $f(x) = xe^{4x}$ que es derivable en todo el intervalo siendo su derivada $f'(x) = e^{4x} + x\cdot 4e^{4x} = (1+4x)e^{4x}$.

En el intervalo $(0,+\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. La función es derivable, siendo su derivada $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ siendo su derivada $f'(x) = \begin{cases} (1+4x)e^{4x} & si \ x<0 \\ \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} & si \ x>0 \end{cases}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$.

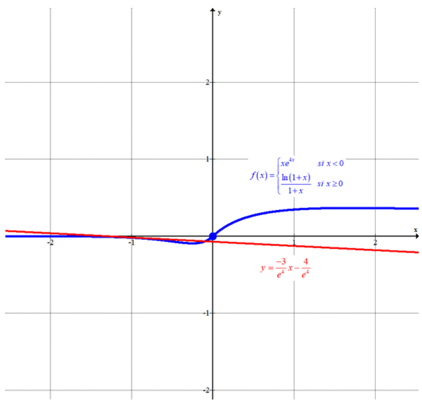
$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (1+4x)e^{4x} = (1+4\cdot 0)e^{4\cdot 0} = 1 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{1-\ln(1+0)}{(1+0)^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = 1$$

Coinciden las derivadas laterales y la función es derivable en $x=0$.
La función es derivable en todo su dominio $\mathbb{R}$.

3.2.3. Hallamos la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x=-1$. En el entorno de $x=-1$ la función tiene la expresión $f(x) = xe^{4x}$, siendo su derivada $f'(x) = (1+4x)e^{4x}$.

$$\left. \begin{array}{l} f = (-1)e^{4(-1)} = \dfrac{-1}{e^4} \\ f'(-1) = (1+4(-1))e^{4(-1)} = \dfrac{-3}{e^4} \\ y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \end{array} \right\} \Rightarrow y + \frac{1}{e^4} = \frac{-3}{e^4}(x+1) \Rightarrow y = \frac{-3x}{e^4} - \frac{3}{e^4} - \frac{1}{e^4} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-3x}{e^4} - \frac{4}{e^4}}$$

La recta tangente a la curva $f(x)$ en $x=-1$ tiene ecuación $y = \dfrac{-3}{e^4}x - \dfrac{4}{e^4}$.



GAL_24_ORD

EJERCICIO 5
UD1_A8
UD1_A3
UD2_B1
EJERCICIO 6
UD1_A9
UD1_A9

PREGUNTA 3. Análise. (2 puntos)
a) Enuncie os teoremas de Rolle e de Bolzano.
b) Calcule $\int x^3 e^{x^2}$.

PREGUNTA 4. Análise. (2 puntos)
Calcule os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$.   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$.

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)
a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.
b) Calcule $\int x^3 e^{x^2} dx$

a) Está en los libros de texto.

b) Utilizamos integración por partes.

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^2 2x e^{x^2} dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = 2xe^{x^2} dx \Rightarrow v = \int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right) = \frac{e^{x^2}}{2}\left(x^2 - 1\right) + C$$

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)
Calcule los siguientes límites:
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

a) Calculamos el valor del primer límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x} = \frac{\sin 0 - \ln(1+0)}{0 \cdot \sin 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\sin x + x\cos x} = \frac{\cos 0 - \frac{1}{1+0}}{\sin 0 + 0 \cdot \cos 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-\sin 0 + \frac{1}{(1+0)^2}}{\cos 0 + \cos 0 - 0 \cdot \sin 0} = \frac{0+1}{1+1-0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Calculamos el valor del segundo límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} = \frac{e^{\sin 0} - e^0}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot e^{\sin x} - e^x}{2x} = \frac{\cos 0 \cdot e^{\sin 0} - e^0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} - e^x}{2} = \frac{-\sin 0 \cdot e^{\sin 0} + \cos 0 \cdot \cos 0 \cdot e^{\sin 0} - e^0}{2} =$$

$$= \frac{1-1}{2} = \boxed{0}$$

GAL_24_EXT

EJERCICIO 7

UD1_A2

UD1_A5

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+bx-1 & si\ x\le 0 \\ \dfrac{k-xe^x}{x} & si\ x>0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x=0$ para cualquier valor de b?
b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x=0$?

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y=-2x$ y la parábola $y=ax^2+4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

EJERCICIO 8

UD2_B2

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+bx-1 & si\ x\le 0 \\ \dfrac{k-xe^x}{x} & si\ x>0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x=0$ para cualquier valor de b?
b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x=0$?

a) Para que la función sea continua en $x=0$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

- Existe $f(0)=0^2+b\cdot 0-1=-1$.
- Existe $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2+bx-1=-1$.
- Existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{k-xe^x}{x}=\dfrac{k-0}{0}=\ldots$, para que exista el límite debe ser $k=0$, en caso contrario el límite vale ∞ y la función no sería continua.

  $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{-xe^x}{x}=\lim_{x\to 0^+}-e^x=-e^0=-1$
- Los tres valores son iguales. Se cumple para $k=0$.

El valor de k que hace que f sea continua en $x=0$ para cualquier valor de b es $k=0$.

b) Para que la función sea derivable en $x=0$ debe ser continua, por lo que $k=0$.

La función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+bx-1 & si\ x\le 0 \\ \dfrac{-xe^x}{x}=-e^x & si\ x>0 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x=0$ deben coincidir las derivadas laterales.
Obtenemos la derivada de la función en $\mathbb{R}-\{0\}$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+b & si\ x<0 \\ -e^x & si\ x>0 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales en $x=0$ y hacemos que tengan el mismo valor.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-} 2x+b=b \\ f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} -e^x=-e^0=-1 \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

Los valores que hacen que f derivable en $x=0$ son $k=0$ y $b=-1$.

ABAU 2024 Extraordinaria Matemáticas II en Galicia — Juan Antonio Martínez García

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y=-2x$ y la parábola $y=ax^2+4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

Hallamos los puntos de corte de recta y parábola.

$$\left.\begin{array}{l} y=-2x \\ y=ax^2+4x \end{array}\right\}\Rightarrow -2x=ax^2+4x\Rightarrow ax^2+6x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(ax+6)=0\Rightarrow\begin{cases} \boxed{x=0} \\ ax+6=0\to ax=-6\to\{a>0\}\to\boxed{x=\dfrac{-6}{a}<0} \end{cases}$$

Hallamos el área de la región encerrada por la recta $y=-2x$ y la parábola $y=ax^2+4x$ que calculamos como el valor absoluto de la integral definida entre $x=\dfrac{-6}{a}$ y $x=0$ de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{-6/a}^{0} ax^2+4x-(-2x)\,dx=\int_{-6/a}^{0} ax^2+6x\,dx=\left[\frac{ax^3}{3}+3x^2\right]_{-6/a}^{0}=$$

$$=\left[\frac{a\cdot 0^3}{3}+3\cdot 0^2\right]-\left[\frac{a\left(\frac{-6}{a}\right)^3}{3}+3\left(\frac{-6}{a}\right)^2\right]=-\left[\frac{-a\frac{6^3}{a^3}}{3}+3\frac{36}{a^2}\right]=$$

$$=-\left[\frac{-\frac{216}{a^2}}{3}+\frac{108}{a^2}\right]=\frac{216}{3a^2}-\frac{108}{a^2}=\frac{72}{a^2}-\frac{108}{a^2}=\boxed{\frac{-36}{a^2}}$$

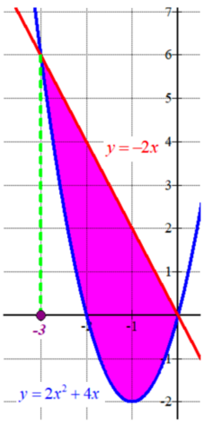
El área del recinto tiene un valor de $\dfrac{36}{a^2}$ unidades cuadradas.

Igualamos el área a 9 y despejamos a.

$$\frac{36}{a^2}=9\Rightarrow 36=9a^2\Rightarrow a^2=\frac{36}{9}=4\Rightarrow a=\sqrt{4}=\pm 2\Rightarrow\{a>0\}\Rightarrow\boxed{a=2}$$

El valor buscado es $a=2$.
La parábola queda $y=2x^2+4x$ y los puntos de corte de ambas gráficas son $x=0$ y $x=-3$.
Dibujamos las gráficas y la región para comprobar la bondad de la solución.

ABAU 2024 Extraordinaria Matemáticas II en Galicia — Juan Antonio Martínez García



GAL_23_ORD	
EJERCICIO 9 UD1_A9 UD1_A10	**3. Análisis** a) Si $f(x)=ae^x+b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0)=0$ y $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$ b) Estudie si la función $f(x)=x+\sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0,2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.
EJERCICIO 10 UD2_B2	**4. Análisis:** Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x\ge 1, y\le x$ e $y\ge f(x)$, con $f(x)=x\ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota**: ln$x$ es el logaritmo neperiano de x.

3. Análisis

a) Si $f(x)=ae^x+b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0)=0$ y $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

b) Estudie si la función $f(x)=x+\sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0,2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

a) Aplicamos la primera condición: $f(0)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(x)=ae^x+b \end{array}\right\} \Rightarrow 0=ae^0+b \Rightarrow \boxed{0=a+b}$$

Aplicamos la segunda condición: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

Calculamos primero el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^x+b}{x}=\frac{a+b}{0}=\dots$$

Como sabemos que $a + b = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^x+b}{x}=\frac{a+b}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ae^x}{1}=ae^0=a$$

Como debe cumplirse que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$, entonces debe ser $a = 3$.

Sustituimos este valor en la igualdad $a + b = 0$ y tenemos que $b = -3$.

Los valores buscados son $a = 3$ y $b = -3$.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=1+\cos x \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\cos x=0 \Rightarrow \cos x=-1 \Rightarrow x=\pi\in(0,2\pi)$$

Calculamos la segunda derivada y sustituimos el valor obtenido para comprobar si es mínimo, máximo o punto de inflexión.

$$f''(x)=-senx \Rightarrow f''(\pi)=-sen\pi=0$$

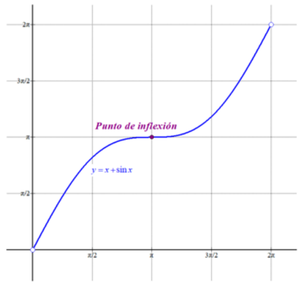
Como es 0 comprobamos el valor de la tercera derivada en $x = \pi$.

$$f'''(x)=-\cos x \Rightarrow f'''(\pi)=-\cos\pi=-1\neq 0$$

La función no tiene máximos ni mínimos relativos en el intervalo (0, 2π). Los máximos o mínimos podrían estar en los extremos del intervalo de definición de la función, pero este intervalo es (0, 2π) que no incluye a los extremos. No tiene máximos ni mínimos.
Tiene un punto de inflexión en $x = \pi$.

Para dibujar su gráfica en el intervalo (0, 2π) obtenemos una tabla de valores.

x	$y=x+\sin x$
0	0
$\pi/2$	$1+\frac{\pi}{2}$
π	π
$3\pi/2$	$\frac{3\pi}{2}-1$
2π	2π



4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x\ge 1, y\le x$ e $y\ge f(x)$, con $f(x)=x\ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota**: ln$x$ es el logaritmo neperiano de x.

La región de la cual queremos hallar el valor de su área debe cumplir: $x\ge 1, y\le x$ e $y\ge x\ln x$
Buscamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x\ln x \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow x\ln x=x \Rightarrow -x+x\ln x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(-1+\ln x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ -1+\ln x=0 \to \ln x=1 \to \boxed{x=e\simeq 2.71} \end{cases}$$

La región del plano de la que piden calcular su área está comprendida entre $x = 1$ y $x = e$.

Tomamos $x = 2$ y comprobamos que función toma el mayor valor.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2\ln 2\simeq 1.38 \\ y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)<x\, en\, el\, intervalo(1,e)$$

Calculamos el área como la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 1 y e.

$$Área=\int_1^e x-x\ln x dx=\dots$$

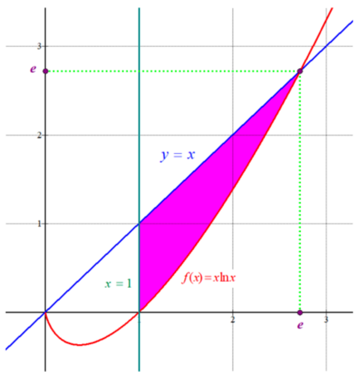
$$\int x-x\ln x dx=\int xdx-\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}-\int x\ln x dx=\left\{\begin{array}{l} Integración\ por\ partes \\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx\to v=\int xdx=\frac{x^2}{2} \end{array}\right\}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx\right)=\frac{x^2}{2}-\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x}{2}dx\right)=\frac{x^2}{2}-\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int xdx\right)=\frac{x^2}{2}-\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}+K$$

$$\dots=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\left[\frac{e^2}{2}-\frac{e^2\ln e}{2}+\frac{e^2}{4}\right]-\left[\frac{1^2}{2}-\frac{1^2\ln 1}{2}+\frac{1^2}{4}\right]=\boxed{\frac{e^2}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{e^2-3}{4}\simeq 1.097u^2}$$

El valor del área es aproximadamente de 1.097 unidades cuadradas.



GAL_23_EXT

EJERCICIO 11
UD1_A8

3. Análisis

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

EJERCICIO 12
UD2_B1
UD2_B1

4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int(\sin x)^5\cos x dx$ y $\int(\ln x)/x dx$.

b) Calcule $\int(\ln x)/x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B(\ln x)/x dx=3/2$.

3. Análisis

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

a) Enunciado del Teorema de Rolle:

Si *f(x)* es una función que es **continua** en [a, b], **derivable** en (a, b) y cumple que *f(a) = f(b)*, entonces existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Enunciado del Teorema del valor medio.

Si *f(x)* es una función real $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Si se cumple que *f(x)* es continua en [a, b] y *f(x)* es derivable en (a, b), entonces se tiene que existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

b) Esta función existe y es continua en el intervalo [0, 1], pues el radicando es positivo.

Es derivable en (0, 1).

La derivada de la función es $f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\sqrt{1-1^2}=0 \\ f(0)=\sqrt{1-0^2}=1 \\ f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ c\in(0,1)/f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{0-1}{1-0}=-1\Rightarrow -c=-\sqrt{1-c^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{1-c^2}\Rightarrow c^2=1-c^2\Rightarrow 2c^2=1\Rightarrow c^2=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\{c\in(0,1)\}\Rightarrow \boxed{c=+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

El valor buscado es $c=+\frac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1)$

ABAU 2023 Extraordinaria Matemáticas II en Galicia Juan Antonio Martínez García

4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int(\sin x)^5\cos x dx$ y $\int(\ln x)/x dx$.

b) Calcule $\int(\ln x)/x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B(\ln x)/x dx=3/2$.

a) La primera integral

$$\int(\sin x)^5\cos x dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sin x=t\to\cos x dx=dt\end{array}\right\}=\int t^5 dt=\frac{t^6}{6}=\boxed{\frac{(\sin x)^6}{6}+K}$$

La segunda integral

$$\int\frac{\ln x}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \ln x=t\to\frac{1}{x}dx=dt\\ dx=xdt\end{array}\right\}=\int\frac{t}{x}xdt=\int tdt=\frac{t^2}{2}=\boxed{\frac{(\ln x)^2}{2}+K}$$

b) Usamos el método de integración por partes para obtener la expresión de la integral.

$$\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Por partes}\\ \ln x=u\to\frac{1}{x}dx=du\\ dv=\frac{1}{x}dx\to v=\int\frac{1}{x}dx=\ln x\end{array}\right\}=(\ln x)(\ln x)-\int\ln x\frac{1}{x}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{\ln x}{x}dx=(\ln x)^2-\int\ln x\frac{1}{x}dx\Rightarrow 2\int\frac{\ln x}{x}dx=(\ln x)^2\Rightarrow\int\frac{\ln x}{x}dx=\boxed{\frac{(\ln x)^2}{2}+K}$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_e^B(\ln x)/x dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_e^B=\left[\frac{(\ln B)^2}{2}\right]-\left[\frac{(\ln e)^2}{2}\right]=\frac{(\ln B)^2}{2}-\frac{1}{2}$$

Igualamos la expresión obtenida a 3/2 y determinamos el valor de B.

$$\int_e^B(\ln x)/x dx=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{(\ln B)^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{(\ln B)^2}{2}=\frac{4}{2}=2\Rightarrow(\ln B)^2=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln B=\sqrt{4}=\pm2\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\ln B=2\to\boxed{B=e^2}\\ \ln B=-2\to\boxed{B=e^{-2}}\end{array}\right.$$

Los valores buscados son $B=e^2$ y $B=e^{-2}$.

GAL_22_ORD

EJERCICIO 13

UD1_A9
UD1_A10

3. Análisis

a) Calcule los límites $\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$, donde *lnx* es el logaritmo neperiano de *x*.

b) Dibuje la gráfica de una función *f* continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: *f(0) = 0, f(3) = 0, f '' > 0* en el intervalo (0, 1), *f '' < 0* en el intervalo (2, 3) y *f* es constante en el intervalo (1, 2).

EJERCICIO 14

UD1_A6

4. Análisis:

Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

3. Análisis

a) Calcule los límites $\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$, donde *lnx* es el logaritmo neperiano de *x*.

b) Dibuje la gráfica de una función *f* continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: *f(0) = 0, f(3) = 0, f '' > 0* en el intervalo (0, 1), *f '' < 0* en el intervalo (2, 3) y *f* es constante en el intervalo (1, 2).

a) El primer límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \frac{0 \cos 0}{\sin 0} = \frac{0}{0} = \textit{Indeterminación}(L'H\hat{o}pital) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + x(-\sin x)}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = \frac{\cos 0 - 0 \sin 0}{\cos 0} = \frac{1-0}{1} = \boxed{1}$$

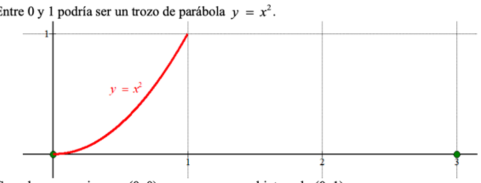
El segundo límite

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \ln 0^+ = 0(-\infty) = \textit{Indeterminación} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} =$$

$$= \textit{Indeterminación}(L'H\hat{o}pital) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} -x = \boxed{0}$$

b) La función está definida en el intervalo $[0,3]$. Pasa por el punto (0, 0) y (3, 0) siendo siempre continua y no negativa. Es convexa (∪) entre 0 y 1, constante entre 1 y2, y cóncava (∩) entre 2 y 3.

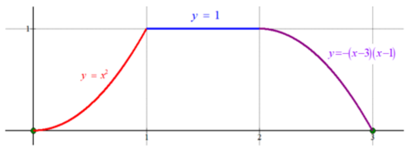
Entre 0 y 1 podría ser un trozo de parábola $y = x^2$.



Cumple que empieza en (0, 0) y es convexa en el intervalo (0, 1).
Ahora debemos poner un trozo de función entre 1 y 2 constante. Debe ser $y = 1$.

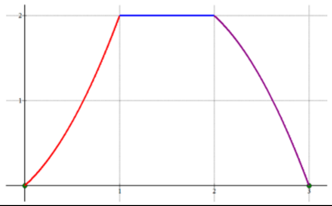
La función dibujada cumple que empieza en (0, 0), es convexa en el intervalo (0, 1), constante en el intervalo $(1,\ 2)$, continua y no negativa.

Nos falta el tramo entre 2 y 3 que debe de ser continua y cóncava. Ponemos un trozo de parábola que como debe pasar por los puntos (2, 1) y (3, 0) tomamos la expresión $y = -(x-3)(x-1)$. Con el signo – inicial es cóncava y con cada factor del producto consigo que pase por los puntos deseados.



Esta función cumple todo lo pedido. No nos piden tener la expresión de la función, por lo que basta con interpretar la información ofrecida y hacer el dibujo de arriba.

Se pueden dibujar muchas funciones que cumplen lo pedido.
Aquí pongo otra más.



4. Análisis:

Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

Si $f''(x) = 2x - e^{-x}$ entonces su integral es la derivada primera.

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int 2x - e^{-x}dx = x^2 + e^{-x} + A$$

Si volvemos a integrar la función derivada obtenemos la función *f(x)*, que dependerá de dos parámetros que determinamos con el resto de información proporcionada en el ejercicio.

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int x^2 + e^{-x} + Adx = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + Ax + B$$

La función es $f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + Ax + B$. Determinamos el valor de A y B.

Como la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$ se debe cumplir que tangente y función coincidan en x = 0.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \to y = 3 \cdot 0 - 1 = -1 \\ f(0) = \frac{0^3}{3} - e^{-0} + A \cdot 0 + B \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = -1 = \frac{0^3}{3} - e^{-0} + A \cdot 0 + B \Rightarrow -1 = -1 + B \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

También se debe cumplir que la derivada de *f(x)* en x = 0 tenga el mismo valor que la pendiente de la recta (*m = 3*).

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - 1 \to m = f'(0) = 3 \\ f'(x) = x^2 + e^{-x} + A \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0) = 3 = 0^2 + e^{-0} + A \Rightarrow 3 = 1 + A \Rightarrow \boxed{A = 2}$$

La función buscada es $f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 2x$

GAL_22_EXT

EJERCICIO 15

UD1_A6
UD1_A5

EJERCICIO 16

UD2_B1

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa $x=2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases}1 & si\ \ x\le 1\\ ax^2+bx & si\ \ x>1\end{cases}$, sea derivable.

4. Análisis:

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ b) $\int(\sin x)\sin(\cos x)dx$ c) $\int x^2\sin x dx$ d) $\int\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa $x=2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases}1 & si\ \ x\le 1\\ ax^2+bx & si\ \ x>1\end{cases}$, sea derivable.

a) Hallamos la tangente a $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa $x=2$.

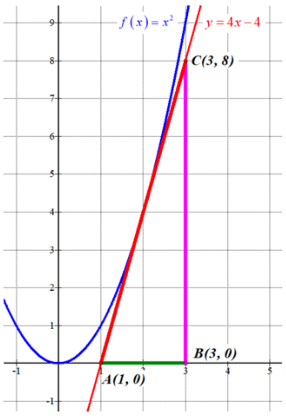
$$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x \Rightarrow f'(2)=4$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2^2=4\\ f'(2)=4\\ y-f(2)=f'(2)(x-2)\end{array}\right\}\Rightarrow y-4=4(x-2)\Rightarrow y-4=4x-8\Rightarrow \boxed{y=4x-4}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la situación planteada.

x	$f(x)=x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9

x	$y=4x-4$
1	0
2	4
3	8



Las coordenadas de los vértices del triángulo son A(1, 0), B(3, 0) y C(3, 8).

b) Para ser derivable primero debe ser continua.
Continua en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}1=1\\ \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}ax^2+bx=a+b\\ f(1)=1\\ \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a+b=1}$$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$ y su derivada es $f'(x)=\begin{cases}0 & si\ \ x<1\\ 2ax+b & si\ \ x>1\end{cases}$

Para que sea derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim_{x\to1^-} f'(x)=\lim_{x\to1^-}0=0\\ f'(1^+)=\lim_{x\to1^+} f'(x)=\lim_{x\to1^+}2ax+b=2a+b\\ f'(1^-)=f'(1^+)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{2a+b=0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1\\ 2a+b=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=1-a\\ 2a+b=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2a+1-a=0\Rightarrow \boxed{a=-1}\Rightarrow \boxed{b=1-(-1)=2}$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = 2$.

4. Análisis:

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ b) $\int(\sin x)\sin(\cos x)dx$ c) $\int x^2\sin x dx$ d) $\int\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$

a)

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ x^2+1=t\to 2xdx=dt\\ dx=\frac{dt}{2x}\end{array}\right\}=\int \cancel{2x}\sqrt{t}\frac{dt}{\cancel{2x}}=\int\sqrt{t}dt=\int t^{1/2}dt=\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}=$$

$$=\frac{t^{3/2}}{3/2}=\frac{2}{3}\sqrt{t^3}=\left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ t=x^2+1\end{array}\right\}=\boxed{\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+K}$$

b)

$$\int(\sin x)\sin(\cos x)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \cos x=t\Rightarrow -sinxdx=dt\\ dx=\frac{dt}{-sinx}\end{array}\right\}=\int\left(\cancel{\sin x}\right)\sin(t)\frac{dt}{-\cancel{sinx}}=$$

$$=-\int\sin(t)dt=\cos t=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el}\\ \text{cambio de variable}\\ t=\cos x\end{array}\right\}=\boxed{\cos(\cos x)+K}$$

c)

$$\int x^2\sin xdx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x^2\to du=2xdx\\ dv=\sin xdx\to v=\int\sin xdx=-\cos x\end{array}\right\}=x^2(-\cos x)-\int(-\cos x)2xdx=$$

$$=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx=\ldots$$

$$\boxed{\int x\cos xdx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\to du=dx\\ dv=\cos xdx\to v=\int\cos xdx=senx\end{array}\right\}=xsenx-\int senxdx=xsenx-(-\cos x)}$$

$$\ldots=-x^2\cos x+2(xsenx+\cos x)=\boxed{-x^2\cos x+2xsenx+2\cos x+K}$$

d)

$$\int\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx=\ldots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$1=A(x-2)+B(x-1)\Rightarrow\begin{cases}x=2\to 1=B\\ x=1\to 1=-A\to A=-1\end{cases}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

$$\ldots=\int\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}dx=\int\frac{-1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x-2}dx=\boxed{-\ln|x-1|+\ln|x-2|+K}$$

GAL_21_ORD

EJERCICIO 17
UD1_A7

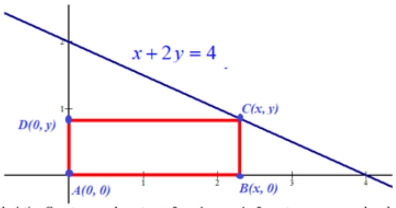
PREGUNTA 3. Análisis (2 puntos)
De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x+2y=4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

EJERCICIO 18
UD2_B2

PREGUNTA 4. Análisis (2 puntos)
Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si \quad x\le 0 \\ -x^2-x-1 & si \quad x>0 \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y=4x-7$ e $y=1$.

3. Análisis
De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x+2y=4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

La situación planteada es la del dibujo:



Como el vértice C pertenece a la recta $x+2y=4 \Rightarrow x=4-2y$ entonces sus coordenadas son *C(4-2y, y)*.
El área del rectángulo rojo es:

$$\text{Área} = \text{base}\cdot\text{altura} = x\cdot y = (4-2y)y = 4y-2y^2$$
$$A(y)=4y-2y^2$$

Derivamos e igualamos a cero para encontrar el posible máximo.

$$A(y)=4y-2y^2 \Rightarrow A'(y)=4-4y$$
$$A'(y)=0 \Rightarrow 4-4y=0 \Rightarrow -4y=-4 \Rightarrow y=\frac{-4}{-4}=1$$

Hallamos la segunda derivada y vemos si es máximo o mínimo.

$$A'(y)=4-4y \Rightarrow A''(y)=-4$$
$$A''(1)=-4<0$$

La función área presenta un máximo en $y = 1$.
El área es máxima cuando $y = 1$. Sustituyendo tenemos que $x=4-2=2$.

El vértice C que hace máxima el área del rectángulo es *C(2, 1)*.
El resto de vértices son *A(0, 0)*, *B(2, 0)* y *D(0, 1)*

4. Análisis:
Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si \quad x\le 0 \\ -x^2-x-1 & si \quad x>0 \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfic de f y las rectas $y=4x-7$ e $y=1$.

Dibujamos la región de la que nos piden calcular su área.

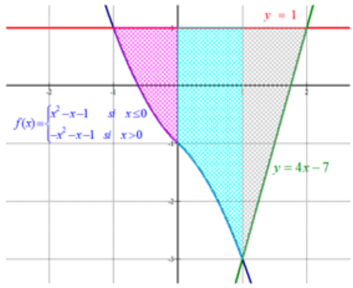
$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si \quad x\le 0 \\ -x^2-x-1 & si \quad x>0 \end{cases} \qquad y=4x-7 \qquad y=1$$

x	$y=x^2-x-1$
−2	5
−1	1
0	−1

x	$y=-x^2-x-1$
0	−1 No se incluye
1	−3
2	−7

x	$y=4x-7$
1	−3
2	1

x	$y=1$
−1	1
2	1



La función *f(x)* y la recta $y=1$ se cortan en $x = -1$.
La función *f(x)* cambia de definición en $x = 0$.
La función *f(x)* y la recta $y=4x-7$ se cortan en $x = 1$.
La recta $y=4x-7$ y la recta horizontal $y=1$ se cortan en $x = 2$.

La región la dividimos en 3 partes (rosa, azul claro y gris en el dibujo) cuya área calculamos por separado y luego sumamos sus valores.

$$\text{Área rosa} = \int_{-1}^{0} 1-(x^2-x-1)\,dx = \int_{-1}^{0} 1-x^2+x+1dx = \int_{-1}^{0} -x^2+x+2dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0} =$$
$$=\left[-\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}+2\cdot 0\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)\right]-=0-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=\boxed{\frac{7}{6}u^2}$$

$$\text{Área azul} = \int_{0}^{1} 1-(-x^2-x-1)\,dx = \int_{0}^{1} 1+x^2+x+1dx = \int_{0}^{1} x^2+x+2dx =$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{0}^{1} = \left[\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+2\right]-\left[\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}+2\cdot 0\right]=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2=\boxed{\frac{17}{6}u^2}$$

$$\text{Área gris} = \int_{1}^{2} 1-(4x-7)\,dx = \int_{1}^{2} 1-4x+7\,dx = \int_{1}^{2} -4x+8dx = \left[-2x^2+8x\right]_{1}^{2} =$$
$$=\left[-2\cdot 2^2+8\cdot 2\right]-\left[-2\cdot 1^2+8\cdot 1\right]=-8+16+2-8=\boxed{2\,u^2}$$

El área total es $\frac{7}{6}+\frac{17}{6}+2=\boxed{6\,u^2}$

GAL_21_EXT

EJERCICIO 19
UD1_A3
UD1_UD1_A3

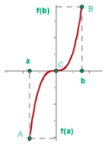
EJERCICIO 20
UD1_A8
UD2_B2

3. Análisis
a) Enuncie el teorema de Bolzano.
b) Obtenga los valores de a, b y c que hacen que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpla $f(0)=1$ y tenga extremos relativos en $x=\pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

4. Análisis:
a) Enuncie el teorema de Rolle.
b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x)=x+6$ y $g(x)=\begin{cases}-2x & si \quad x<0\\ x^2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

3. Análisis
a) Enuncie el teorema de Bolzano.
b) Obtenga los valores de a, b y c que hacen que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpla $f(0)=1$ y tenga extremos relativos en $x=\pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

a) **Teorema de Bolzano.** Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y que toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un valor $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.



b) Debe cumplirse que $f(0)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2-3x+c \\ f(0)=1\end{array}\right\} \Rightarrow 1=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2-3\cdot 0+c \Rightarrow \boxed{c=1}$$

Debe cumplirse que $f'(1)=0$ y $f'(-1)=0$.

$$f(x)=ax^3+bx^2-3x+c \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx-3$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3ax^2+2bx-3 \\ f'(1)=0\end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot 1^2+2b\cdot 1-3 \Rightarrow \boxed{0=3a+2b-3}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3ax^2+2bx-3 \\ f'(-1)=0\end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot(-1)^2+2b\cdot(-1)-3 \Rightarrow \boxed{0=3a-2b-3}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$(+)\left.\begin{array}{l} 3a+2b-3=0 \\ 3a-2b-3=0\end{array}\right\}$$
$$6a \qquad -6=0 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow 3+2b-3=0 \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

Los valores buscados son $a=1$, $b=0$ y $c=1$.

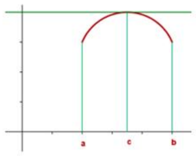
Averiguamos si $x=\pm 1$ son máximos o mínimos sustituyendo estos valores en la derivada segunda.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3ax^2+2bx-3 \\ a=1 \\ b=0\end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f''(x)=6x$$

$x=+1 \Rightarrow f''(1)=6>0$. En $x=1$ hay un mínimo relativo.
$x=-1 \Rightarrow f''(-1)=-6<0$. En $x=-1$ hay un máximo relativo.

4. Análisis:
a) Enuncie el teorema de Rolle.
b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x)=x+6$ y $g(x)=\begin{cases}-2x & si \quad x<0\\ x^2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) **Teorema de Rolle**: Sea $f(x)$ una función **continua** en [a, b] y **derivable** en (a, b) y que, además, cumple que $f(a)=f(b)$. Entonces existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.



b) Averiguamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x+6 \\ g(x)=\begin{cases}-2x & si \quad x<0\\ x^2 & si \quad x\geq 0\end{cases} \\ f(x)=g(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (x<0)\rightarrow x+6=-2x \Rightarrow 3x=-6 \Rightarrow x=-2 \; Válido(x<0) \\ (x\geq 0)\rightarrow x^2=x+6 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2+24}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x=\dfrac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+5}{2}=3 & Válido(x\geq 0) \\ \dfrac{1-5}{2}=-2 & No\ válido(x\geq 0)\end{cases}\end{cases}$$

Por el cambio de definición de la función la región la podemos dividir en dos partes, una entre $x=-2$ y $x=0$ y la otra entre $x=0$ y $x=3$.

En el intervalo (–2, 0) la función $g(x)$ es $g(x)=-2x$ y el área de la región es:

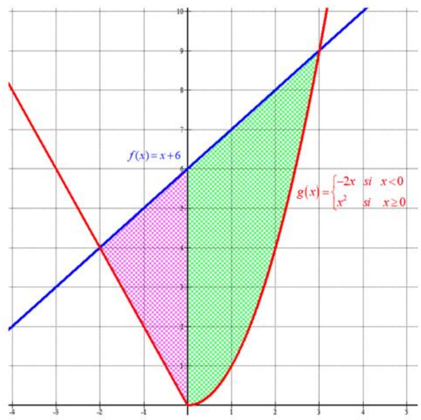
$$\int_{-2}^{0} f(x)-g(x)dx=\int_{-2}^{0} x+6-(-2x)dx=\int_{-2}^{0} 3x+6dx=\left[3\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{0}=$$
$$=\left[3\frac{0^2}{2}+0\right]-\left[3\frac{(-2)^2}{2}+6(-2)\right]=6$$

En el intervalo (0, 3) la función $g(x)$ es $g(x)=x^2$ y el área de la región es:

$$\int_{0}^{3} f(x)-g(x)dx=\int_{0}^{3} x+6-x^2dx=\left[\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3}=$$
$$=\left[\frac{3^2}{2}+18-\frac{3^3}{3}\right]-\left[\frac{0^2}{2}+0-\frac{0^3}{3}\right]=4.5+18-9=13.5$$

El área total es $6+13.5=19.5$ u^2.

No lo piden, pero dibujamos la función para comprobar el resultado.



GAL_20_ORD

EJERCICIO 21
UD1_A9
UD1_A10

3. Análise:

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1+2x-e^{2x}}$.

b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f.

EJERCICIO 22
UD1_A2
UD1_A5
UD2_B1

4. Análise:

a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x \leq 0, \\ x^2+bx+c & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x = 0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1)dx$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

3. Análise:

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1+2x-e^{2x}}$.

b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f.

Solución:

3.a)

indeterminación $\frac{0}{0}$, L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1+2x-e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x \sin x}{2-2e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin x}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}.$$

Falando con rigor, o límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\cos x \sin x}{2-2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x+\cos^2 x}{2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$, e, analogamente, o límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\cos x \sin x}{2-2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$.

3.b)

$$f(x) = x(\ln x - 1), \mathrm{Dom}(f) = (0, \infty).$$
$$f'(x) = \ln x - 1 + x\frac{1}{x} = \ln x.$$

Vese que f' ten signo negativo en $(0,1)$ e positivo en $(1, \infty)$:

SIGNO DE f'.

Segundo esta análise, f é estritamente decrecente en $(0,1)$ e estritamente crecente en $(1, \infty)$. Dado que ademais é continua en $(0, \infty)$, conclúese que ten un mínimo absoluto (logo relativo) en $x = 1$ e que non ten outros extremos.

CONVOCATORIA ORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

4. Análise:

a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x \leq 0, \\ x^2+bx+c & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x = 0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1)dx$.

Solución:

4.a)

- Continuidade: nótese que $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{2x} = 1$, e, para calquera valor de $b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2+bx+c = c$. Por conseguinte, f é continua en $x = 0$ se, e soamente se, $(b, c) \in \mathbb{R} \times \{1\}$.
- Derivabilidade: posto que f ten que ser continua para poder ser derivable, é obrigado que $c = 1$, e así
$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x \leq 0, \\ x^2+bx+1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & \text{se} \quad x < 0, \\ 2x+b & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$
Como f é continua, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2e^{2x} = 2$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+b) = b$, a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $b = 2$ e $c = 1$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):

Do mesmo xeito que na solución anterior, chégase a $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x \leq 0, \\ x^2+bx+1 & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$ xa que c ten que valer 1. Agora, como $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} \overset{*}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} 2e^{2x} = 2$ (o asterisco * indica o uso da regra de L'Hôpital) e $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+bx+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+b) = b$, conclúese que a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $b = 2$ e $c = 1$.

4.b) Aplicando a fórmula de integración por partes con

$$u = \ln x - 1, \quad du = \frac{1}{x}dx,$$
$$dv = xdx, \quad v = \frac{1}{2}x^2,$$

obtense

$$\int x(\ln x - 1)dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x - 1) - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x - 1) - \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + C,$$

e polo tanto

$$\int_1^2 x(\ln x - 1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)\right]_1^2 = 2\left(\ln 2 - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\ln 2 - 3 + \frac{3}{4} = \ln 4 - \frac{9}{4} \approx -0.8637.$$

GAL_20_EXT

EJERCICIO 23
UD1_A2
UD1_A5

3. Análise:

Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{se} \quad x<0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

EJERCICIO 24
UD2_B2

UD2_B1

4. Análise:

a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x+1 & \text{se} \quad x<0, \\ (x-1)^2 & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
2020

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

3. Análise:

Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{se} \quad x<0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

Solución:

A función f é derivable, e por tanto continua, en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ para valores calquera de a e b; só hai que facer entón o estudo no punto $x=0$. Debido a que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{a-\cos x}{x}$ non é finito cando $a \neq 1$, f non pode ser continua neses casos. Fixemos pois $a=1$ e consideremos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x<0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

- Continuidade: nótese que $f(0)=0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0$ (onde se usou a regra de L'Hôpital), e, para calquera valor de $b\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} bx = 0$. Por conseguinte, f é continua en $x=0$ se, e soamente se, $(a,b)\in\{1\}\times\mathbb{R}$.
- Derivabilidade: séguese a asumir que $a=1$, co cal f é continua (se non é continua, non pode ser derivable). Temos polo tanto que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sin x - 1 + \cos x}{x^2} & \text{se} \quad x<0, \\ b & \text{se} \quad x>0. \end{cases}$$

Como f é continua, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sin x-1+\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x + x\cos x - \sin x}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou a regra de L'Hôpital) e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} b = b$, a función f é derivable en $x=0$ se, e soamente se, $a=1$ e $b=\frac{1}{2}$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):

Sabemos que $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x<0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$ xa que a ten que valer 1. Agora, como $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou dúas veces a regra de L'Hôpital) e $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{bx}{x} = b$, conclúese que a función f é derivable en $x=0$ se, e soamente se, $a=1$ e $b=\frac{1}{2}$.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
2020

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

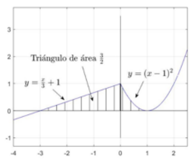
4. Análise:

a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x+1 & \text{se} \quad x<0, \\ (x-1)^2 & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Solución:

4.a)



Tendo en conta que $y=\frac{x}{3}+1$ é a recta que pasa por $(-3,0)$ e por $(0,1)$ e que $y=(x-1)^2$ é a parábola de vértice $(1,0)$ que pasa polos puntos $(0,1)$ e $(2,1)$, chégase ao debuxo da esquerda, onde está raiada a rexión cuxa área se pide.

Agora é claro que esa área virá dada por

$$A = \frac{3}{2} + \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{3}{2} + \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{2}+\frac{1}{3} = \frac{9+2}{6} = \frac{11}{6}\ \mathrm{u}^2 = 1.8\bar{3}\ \mathrm{u}^2,$$

onde u indica "unidade de lonxitude".

4.b) Mediante o cambio de variable

$$z = x^2-1, \quad dz = 2x\,dx,$$

obtense

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{z}\,dz = \frac{1}{2}\frac{z^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{z^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$$