EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 240

1. Cálculo de límites

- **Calcular los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (1+4x^3)^{2/x^3}$ ***c)*** $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right)^{25} = \left(\dfrac{(-\infty)}{(+\infty)}\right)^{25}$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right)^{25} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{-8x^3}}{2x}\right)^{25} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x}{2x}\right)^{25} = (-1)^{25} = -1$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (1+4x^3)^{2/x^3} = (1)^{(\infty)}$

Aplicamos la regla:

$$\lim_{x \to 0} (1+4x^3-1) \cdot \frac{2}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{8x^3}{x^3} = 8$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} (1+4x^3)^{2/x^3} = e^8$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\,x} = (+\infty)^{(0)}$ Indeterminación.

Tomamos logaritmos:

$$ln \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x} = \lim_{x \to 0^+} tg\,x\, ln\,\frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} [tg\,x[-ln\,(x^2)]] = \lim_{x \to 0^+} (-2tg\,x\,ln\,x) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2\,ln\,x}{\frac{1}{tg\,x}} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)} \overset{\mathbf{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-2}{x}}{-\frac{1}{sen^2\,x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2sen^2\,x}{x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{\mathbf{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{4sen\,x\,cos\,x}{1} = 0$$

Luego $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\,x} = e^0 = 1$

2. Límite finito

- **Calcular el valor de *a* para que el siguiente límite sea finito y obtener ese límite:**

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{a}{2x}\right)$$

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{e^x-1} - \dfrac{a}{2x}\right) = (\infty) - (\infty)$ Indeterminación

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{a}{2x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{2x - ae^x + a}{(e^x-1)\,2x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{\mathbf{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2-ae^x}{e^x\,2x + (e^x-1)\,2} = \lim_{x \to 0} \frac{2-ae^x}{e^x\,2x + 2e^x - 2}$$

Como el denominador tiende a 0, para poder seguir resolviendo el límite, el numerador también debe tender a 0 y, por tanto, $a = 2$.

Continuamos con $a = 2$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2e^x}{e^x\, 2x + 2e^x - 1} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-2e^x}{e^x\, 2x + e^x\, 2 + 2e^x} = -\frac{1}{2}$$

3. Continuidad en un punto

- **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x^2 - 2)/x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua?

b) Hallar el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de la función.

a) Veamos la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{x^2 - 2}{x}} = e^{(+\infty)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$$

No existe ningún valor de k ya que los límites laterales en el punto $x = 0$ no existen.

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x^2 - 2}{x}} = e^{(-\infty)} = 0$$

4. Teorema de Bolzano

- **Demostrar que la ecuación: $sen\, x^2 = x - 1$ tiene una solución positiva.**

Razonar la respuesta, exponiendo el teorema o resultado que justifique la solución.

$F(x) = sen\, x^2 - x + 1$ es continua por ser suma y resta de funciones continuas.

$F(0) = sen\, 0 - 0 + 1 = 1$

$F(\pi) = sen\, \pi^2 - \pi + 1 = -2{,}57$

Por el teorema de Bolzano sabemos que existe $c \in (0, \pi)$ tal que $F(c) = 0$.

Hemos visto que c es solución de la ecuación del enunciado. Además, es positiva ya que pertenece a un intervalo donde todos los valores son positivos.