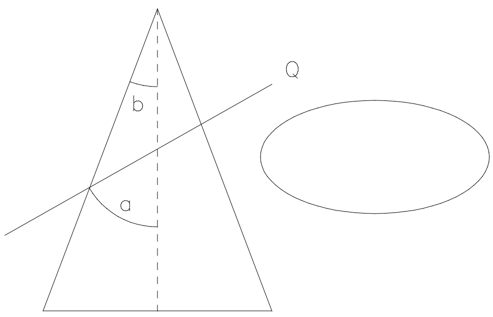
CURVAS CÓNICAS. CURVAS TÉCNICAS.

CURVAS, DEFINICIÓN.

Se entiende por línea una sucesión de puntos o trayectoria de un punto en movimiento. Se considera línea recta cuando esta trayectoria tiene una dirección única y línea curva cuando ninguna porción de ella es recta. Se dice que una línea tiene doble curvatura cuando no puede trazarse sobre un plano, como le sucede a la hélice.

Las Curvas se clasifican en Cónicas, fruto de la sección entre un plano y un cono, y Técnicas, estas últimas abarcan desde el Ovalo y Ovoide, Espirales, Evolventes y Hélices, a Curvas Cíclicas.

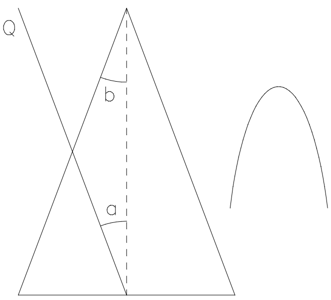
CURVAS CÓNICAS.



Elípse. a>b

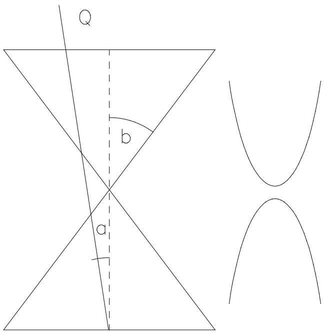
Son las secciones producidas por un plano secante en una superficie cónica de revolución (Cono), según la posición relativa del plano y el cono, se obtienen tres curvas cónicas diferentes, Elipse, Parábola o Hipérbola.

Obtenemos una **Elipse** cuando el ángulo ”a” que forma el plano secante Q con el eje del cono es mayor que el formado por las generatrices con el mismo eje “b”.



Parábola. a=b

Obtenemos una **Parábola** cuando el ángulo “a” que forma el plano secante con el eje es igual a “b” y una **Hipérbola** cuando “a” es menor que “b”.



Hipérbola a< b

Cuando el plano secante pasa por el vértice del cono, en la intersección se producen dos generatrices rectas y cuando es normal al eje, la sección es circular.

La Elipse es una curva cerrada y plana y se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos fijos denominados focos es constante.

La Parábola es una curva plana, abierta de una rama, definida como lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo denominado foco, y de una recta denominada directriz.

La Hipérbola es una curva plana, abierta y con dos ramas, definida como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos fijos denominados focos es constante.

TEOREMA DE DANDELIN.

El Teorema de Dandelin demuestra que el foco o los focos de una curva cónica se encuentran en los puntos de tangencia del plano secante con dos esferas inscritas en la superficie cónica y tangentes a su vez a dicho plano.

DIRECTRIZ DE UNA CURVA CÓNICA.

Las esferas mencionadas en el teorema de Dandelin y el cono donde están inscritas, conectan entre sí según dos circunferencias, una para cada esfera. Estas circunferencias pertenecen a dos planos respectivamente y que se denominan planos de contacto, siendo además normales al eje de la superficie cónica.

Las rectas intersección entre el plano secante que genera en el cono la curva cónica y los dos planos de contacto, se denominan rectas **Directrices** de la curva.

En la figura se detallan:

- Las dos esferas del teorema de Dandelin, O1 y O2.

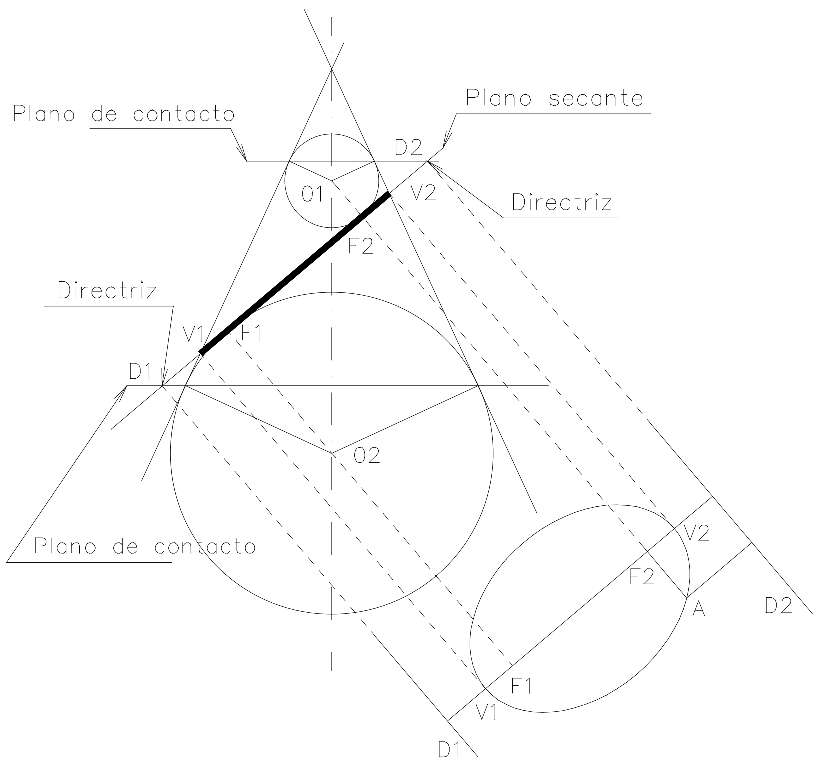
- Los planos de contacto que estas generan en combinación con la propia superficie cónica.

- Las rectas directrices D1 y D2, intersección de los planos de contacto y del plano secante que genera la curva cónica.

- Los focos F1 y F2 puntos de tangencia de las esferas con el plano secante.

- Los vértices de la curva V1 y V2.

En la representación del cono y sus elementos (SDO frontal, se abate la curva y se presenta en verdadera magnitud y forma.



La curva sección resultante en el dibujo es la Elipse pues el ángulo entre el plano secante y el eje es mayor que entre el eje y las generatrices del cono. La Elipse y la Hipérbola tienen dos rectas directrices y dos focos. La Parábola tiene un solo foco y una sola recta directriz pues corta solamente a una rama del cono por ser paralelo el plano secante a una de las generatrices de este.

EXCENTRICIDAD DE UNA CURVA CÓNICA.

La directriz de una curva cónica y su foco correspondiente están entre sí relacionados de tal forma que la razón de distancias de un punto cualquiera de la curva “A” al foco y recta directriz correspondiente, es una cantidad constante que se denomina **Excentricidad**.

NOTA: El foco es el punto de tangencia de una de las dos esferas de Dandelin con el plano secante, su directriz correspondiente es la intersección entre el plano secante y el plano de contacto perteneciente a la misma esfera que genera el foco.

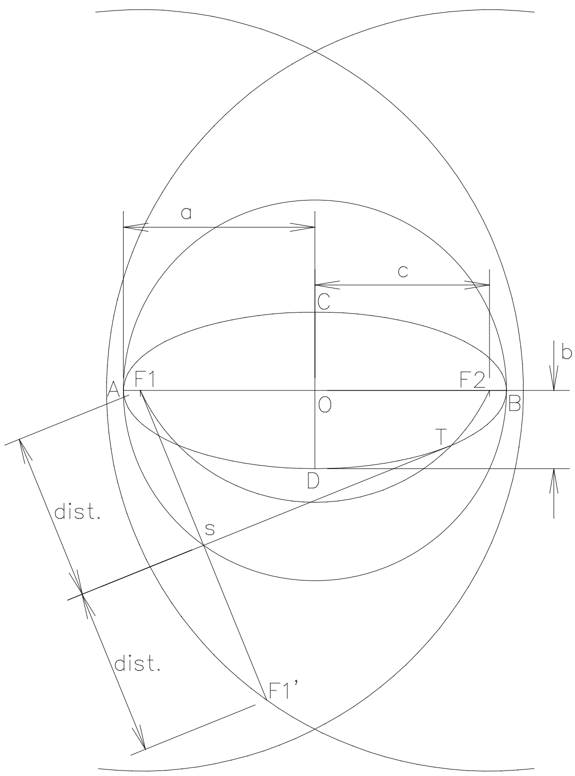
En la Elipse, la excentricidad (Σ) es siempre menor que la unidad $AF_2/AD_2 < 1$, igual a la unidad en la Parábola $AF/DF = 1$ y mayor en la Hipérbola $AF_2/AD_2 > 1$.

Conocida la excentricidad podemos determinar el tipo de curva de que se trata.

Cuando la sección Cónica es una circunferencia los focos coinciden con el centro de la circunferencia, las directrices están en el infinito pues los planos de contacto y el secante son paralelos. La excentricidad de la curva para un punto A se obtendría en este mediante el cociente de las distancias de dicho punto al centro (radio) y la distancia de A al infinito ($r/\infty = 0$), por lo que una circunferencia no tiene excentricidad.

ELIPSE.

Como hemos dicho antes, Elipse es una curva cerrada y plana, se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos fijos denominados focos es constante. Su excentricidad es siempre menor que la unidad.



La distancia entre focos se denomina **distancia focal**. La suma de distancias de un punto de la curva a los focos es constante e igual a la magnitud del **eje mayor o eje real** y se designa “2a”, los focos están situados sobre este eje y a igual distancia de su punto medio. El **eje menor o imaginario** se designa “2b” y es normal al real, ambos se cortan en el **centro de la elipse** y en sus respectivos puntos medios. La distancia focal se designa por “2c”. Las rectas que unen un punto de la curva con los dos focos se denominan **radios vectores** y se designan r y r’.

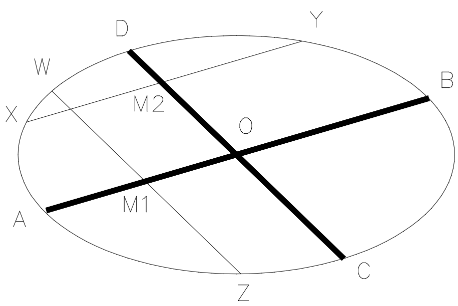
Existen otra serie de elementos “ocultos” decisivos en el trazado de elipses y tangentes a estas a saber:

La **Circunferencia Principal**, de diámetro igual al eje mayor y centro en el centro de la elipse.

Circunferencias Focales, de centro en los focos y radio de longitud igual al eje mayor de la elipse.

Si consideramos una recta “sT” tangente a la elipse, observaremos que los puntos simétricos de los focos, respecto de esta tangente (F_1’, simétrico de F_1), pertenecen a la circunferencia Focal de centro en el otro foco F_2.

Por otra parte, las proyecciones ortogonales de los focos sobre cualquier tangente trazada a la elipse, pertenecen a la Circunferencia Principal.

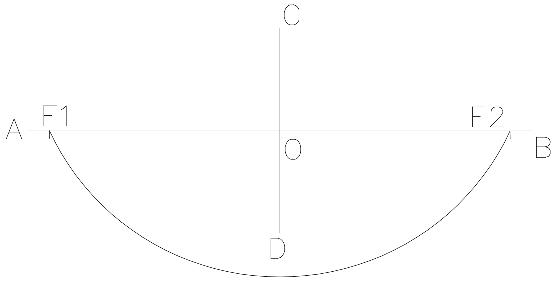


Se denomina Diámetro de la Elipse a cualquier cuerda que pase por su centro, son **Diámetros Conjugados** en la elipse aquellos en donde cada uno de ellos divide en dos partes iguales a las cuerdas de la elipse trazadas paralelas al otro. Se cortan en su punto medio.

Los ejes son los únicos diámetros conjugados normales entre sí.

DETERMINACIÓN DE LOS FOCOS, CONOCIENDO LOS EJES.

Trazamos los ejes perpendiculares entre sí por su punto medio y con centro en uno de los extremos del eje menor "C" dibujamos un arco de radio igual al semieje mayor que corta a este en F_2 y F_1, focos de la elipse. Los extremos de los ejes son puntos de la elipse por lo que los radios vectores que concurren en C deben de sumar la longitud del eje mayor, por ser C centro del arco de radio el semieje mayor se verifica efectivamente que $F_1C+F_2C=2a$

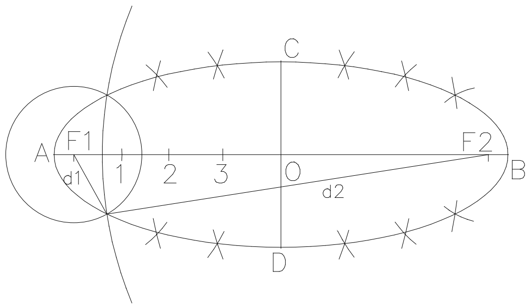


TRAZADO DE ELIPSES.

A continuación estudiaremos algunos de los métodos que se pueden utilizar para trazar elipses.

CONSTRUCCIÓN DE ELIPSES CONOCIENDO LOS EJES.

A. Método de construcción por puntos.



Dibujados los ejes y determinados los focos, situamos arbitrariamente puntos entre uno de los focos y el centro de la elipse sobre el eje mayor (1, 2, 3, etc.).

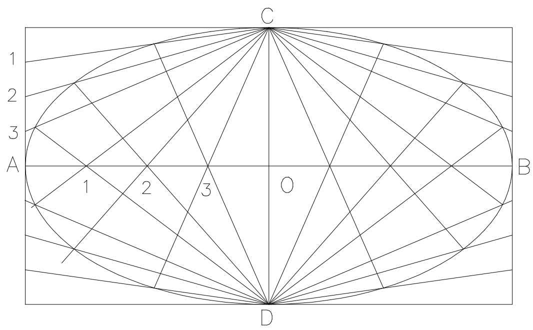
Con radios A1 y B1 trazamos cuatro arcos de circunferencia de centros F1 y F2. La circunferencia de centro F1 y radio A1 y la de centro F2 y radio B1 se cortan en dos puntos de la elipse. Obtenemos dos puntos más con arcos de igual radio pero centros alternativos (F2 para A1 y F1 para B1), simétricos de los anteriores respecto los ejes de la elipse.

Con radios A2 y B2 procedemos de igual modo y así sucesivamente con el resto de los puntos trazados entre el foco y el centro de la elipse. Uniendo A, B, C y D, extremos de los ejes que son también puntos de la elipse, con los puntos obtenidos mediante plantilla de curvas, obtenemos el trazado de la elipse.

B. Método de intersección de rectas.

Trazamos paralelas a los ejes por sus extremos y construimos un paralelogramo rectángulo de este modo.

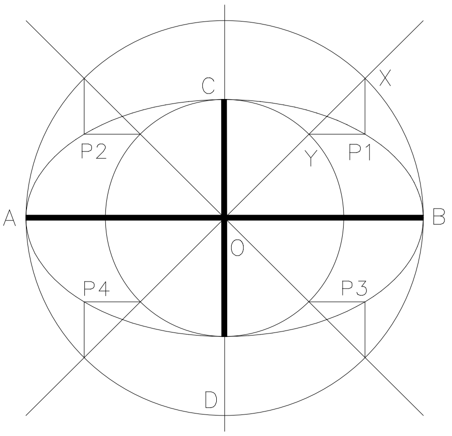
Dividimos el eje mayor en un número cualquiera de partes iguales (1, 2, 3,...) y los lados del paralelográmo paralelos al eje menor en ese mismo número de partes.



Unimos los extremos C y D del eje menor con todas las divisiones efectuadas sobre el eje mayor y con las divisiones efectuadas sobre los lados del rectángulo que estén entre ellos y el eje mayor. Las intersecciones entre rectas correspondientes (eje: D-3, eje $\cap$ C-1, lado) determinan puntos de la elipse que se delineará como en el ejercicio anterior.

C. Método de proyección de puntos.

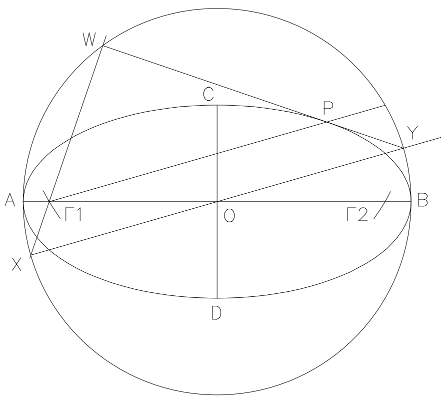
Dibujamos dos circunferencias de diámetros iguales a los ejes de la cónica y centro en O, trazamos varios diámetros comunes a ambas circunferencias, por los puntos de intersección de estos diámetros con la circunferencia mayor (ej.: x), trazamos normales al eje mayor y normales al eje menor donde estos diámetros corten a la circunferencia de radio menor (ej: y), las intersecciones correspondientes entre sí (X-P1 y Y- P1) de estas perpendiculares trazadas determinan puntos de la elipse (P1, P2, P3, P4).

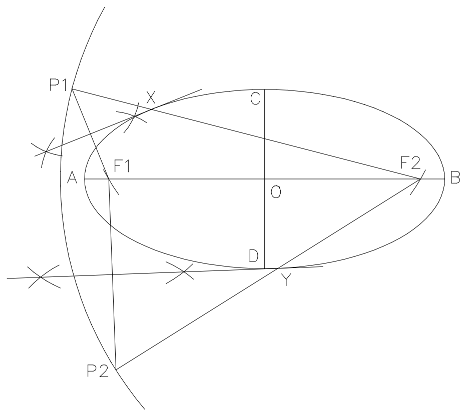


La construcción se basa en la afinidad existente entre la circunferencia de radio mayor y la elipse, donde el eje de afinidad coincide con el mayor de la elipse y la dirección de afinidad es normal a este.

D. Mediante Circunferencia Principal.

Trazamos la circunferencia principal y uno cualquiera de sus diámetros (XY), trazamos por uno de sus extremos una cuerda que pase por uno de los focos de la elipse (XW) y unimos el otro extremo del diámetro Y, con el extremo W de la cuerda. La intersección de una paralela trazada por F1 al diámetro XY, con el segmento WY, determina un punto P de la elipse, repitiendo la construcción con otros diámetros, obtenemos otros puntos de la curva.

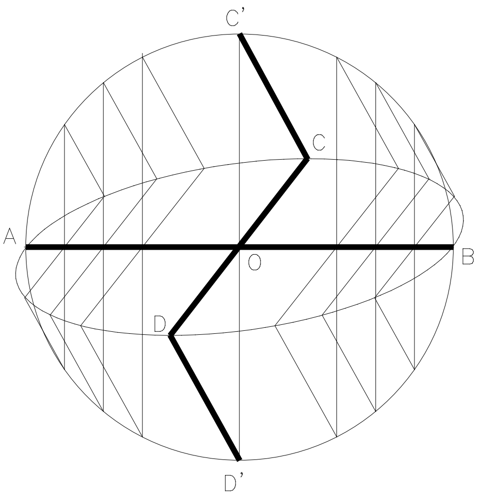




E. Mediante Circunferencia Focal.

2. TRAZADO DE ELIPSES CONOCIENDO LOS DIÁMETROS CONJUGADOS.

A. Construir la elipse conociendo dos diámetros conjugados.

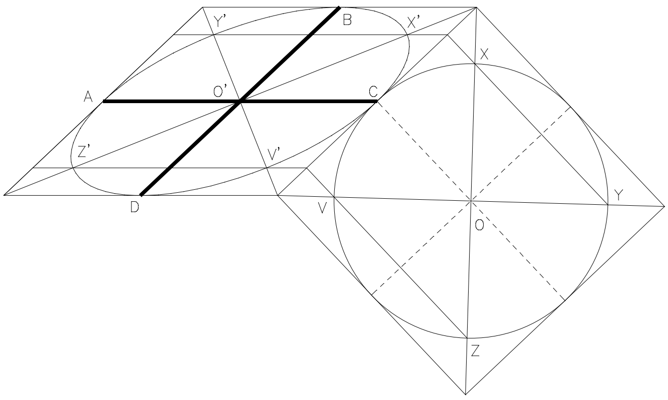


Trazamos la circunferencia de diámetro AB. Dividimos el diámetro en cualquier número de partes por donde trazamos cuerdas de la circunferencia normales a AB, y su diámetro perpendicular C'D'.

El ejercicio se resuelve por afinidad entre la circunferencia y la elipse, siendo la dirección de afinidad C-C' o D-D', segmentos de unión de los extremos del diámetro conjugado menor con los extremos del diámetro C'D' correspondientes.

Trazamos paralelas a la dirección de afinidad por los extremos de las cuerdas de la circunferencia, la intersección de estas rectas con las paralelas trazadas al eje menor por las intersecciones de las cuerdas y el eje mayor determinan puntos de la elipse.

B. Construir la elipse conociendo dos diámetros conjugados iguales.



Trazamos paralelas por los extremos de los diámetros conjugados dados y obtenemos así un paralelogramo rombo. Dibujamos un cuadrado de lado igual al del rombo a continuación de uno de los lados de este y trazamos su circunferencia circunscrita. Trazamos las diagonales en el rombo y en el cuadrado y trasladamos a las diagonales del rombo las intersecciones producidas por la circunferencia en las diagonales del cuadrado según paralelas a los correspondientes lados de ambos cuadriláteros. Los puntos así obtenidos son junto a A, B, C y D puntos de la elipse. Podemos obtener más puntos trazando más divisiones en la circunferencia.

3. TRAZADO DE LA ELIPSE CONOCIENDO SU EXCENTRICIDAD, LA DIRECTRIZ Y EL FOCO CORRESPONDIENTE A LA DIRECTRIZ DADA.

Sabemos que la excentricidad en cualquier curva cónica es igual a la razón de distancias existentes desde un punto de la curva a un foco y a la directriz correspondiente a este foco. En el caso de la elipse el valor de la excentricidad es siempre menor que la unidad. $\Sigma = AF_2/AD_2 < 1$. La directriz y el eje mayor de la elipse son por otro lado, normales entre sí.

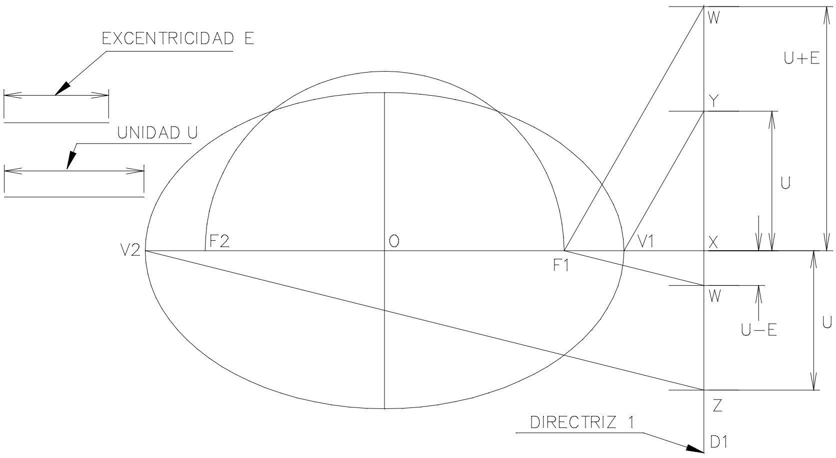
Conocida la directriz el foco y la excentricidad, trazamos una normal por F_1 a la directriz que contendrá al eje mayor y partir de X, intersección de ambas rectas, llevamos sobre la directriz en ambos sentidos un segmento igual a la unidad U obteniendo los puntos Y y Z. Sumando y restando a partir de estos puntos el valor E de la excentricidad dada obtenemos los puntos W a ambos sentidos del eje.

Unimos W y -W con F_1 y trazamos paralelas a estos segmentos por Y y Z, obteniendo sobre el eje mayor los vértices V_1 y V_2 de la elipse (extremos del eje mayor).

Por ser V1 y V2 puntos de la elipse, se debe cumplir $\Sigma = VF_1/VD_1$', es decir que el cociente entre la distancia de cualquiera de ellos, V1, por ejemplo al foco y directriz dados de base igual a la excentricidad dada.

> *Siendo F1X y V1X las distancias de F1 y V1 a la directriz respectivamente, podemos expresar por proporcionalidad entre los triángulos WXF_1 y YXV_1 que* $F_1X/V_1X = WX/YX$ *y puesto que WX y YX*

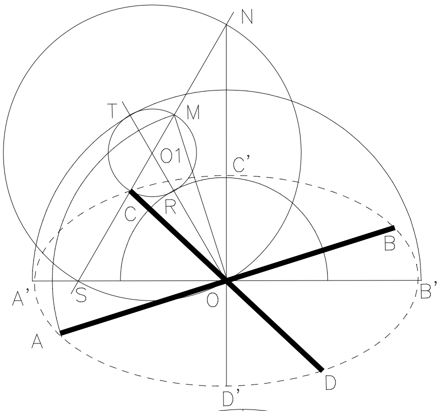
son la excentricidad Σ y unidad U tomadas respectivamente tenemos que efectivamente $\Sigma = F_1X / V_1X$.



DETERMINACIÓN DE LOS EJES DE LA ELIPSE.

A. Dados los diámetros conjugados de la elipse (AB y CD), determinar sus ejes.

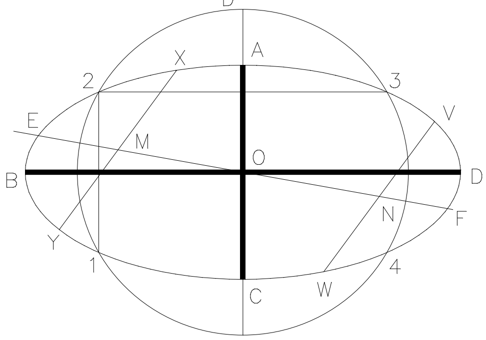
Trazamos por O una perpendicular a AB y trasladamos la magnitud OA a partir de O sobre esta recta obteniendo el punto M . Unimos M con C y trazamos una circunferencia O_1 de centro en el punto medio de MC y diámetro MC. Trazamos otra circunferencia concéntrica de la anterior y radio O_1O que corta en N y S a la prolongación de MC. Unimos N y S con O y obtenemos las direcciones de los ejes de la elipse, trazamos una recta OO_1 que corta en R y T a la circunferencia de centro O_1 y diámetro MC, las distancias OR y OT son iguales a las longitudes de los semiejes menor y mayor de la elipse respectivamente, trasladando estas magnitudes a partir de O obtenemos los vértices A', B', C' y D'.



B. Dada una elipse, determinar sus ejes.

Trazamos dos cuerdas paralelas YX y VW y unimos sus puntos medios M y N prolongándolos hasta obtener EF, diámetro de la elipse y cuyo punto medio O es el centro de la elipse.

Con centro en O trazamos una circunferencia que corte a la elipse, obtenemos 1, 2 y 3. Las mediatrices de 1-2 y 2-3 determinan las direcciones de los ejes buscados.



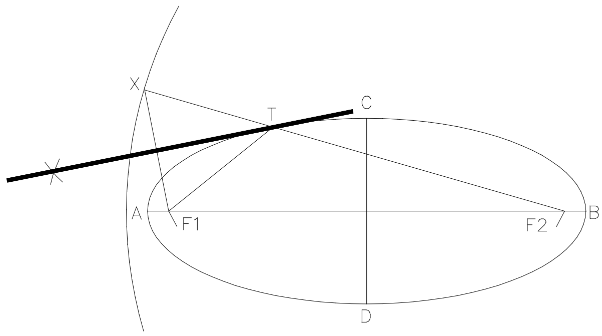
TRAZADO DE RECTAS TANGENTES A LA ELIPSE.

POR UN PUNTO DE LA ELIPSE.

A. Mediante Circunferencia Focal.

Dada la elipse y el punto T por donde tenemos que trazar la recta tangente.

Trazamos los radios vectores que contienen a T y prolongamos uno de ellos (F_2T), la bisectriz de F_1T y la prolongación de F_2T es la tangente buscada.

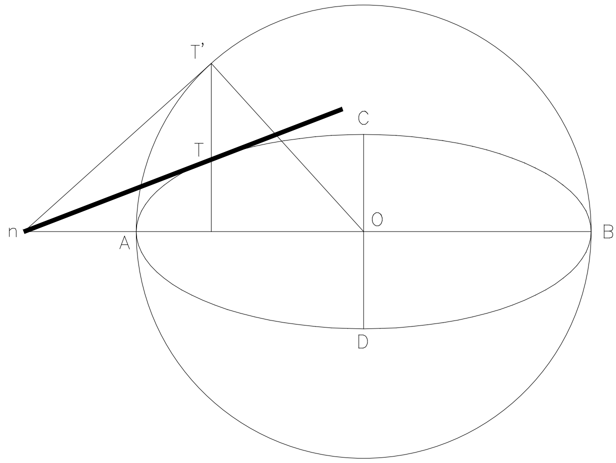


Por definición, la recta tangente a una elipse en un punto de ella es la bisectriz del ángulo suplementario al formado por los radios vectores en ese punto.

Según vimos, el foco F_1 es simétrico de X si consideramos como eje de simetría la propia recta tangente obtenida, siendo X un punto de la circunferencia focal de centro F2.

Según esto, podemos obtener X (intersección de F_2T y la circunferencia focal de centro F_2) y trazar la mediatriz de F_1 X que será la tangente buscada.

B. Mediante Circunferencia Principal.

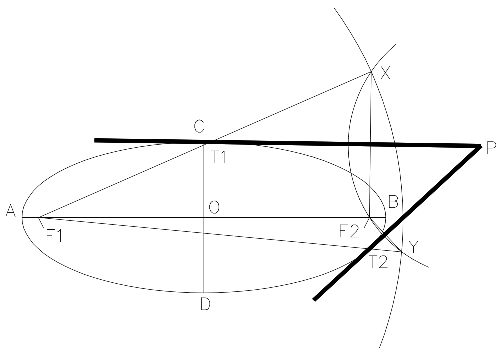


Por el punto T dado, trazamos una perpendicular al eje mayor que determina en su prolongación T' sobre la circunferencia principal. Trazamos una recta tangente a la circunferencia principal por T' que corta en n a la prolongación del eje mayor. La recta nT es la tangente buscada.

La construcción se basa en la afinidad entre la circunferencia y la elipse, T y T' son afines siendo el eje mayor el de afinidad, la dirección T'T y n un punto doble.

DESDE UN PUNTO EXTERIOR.

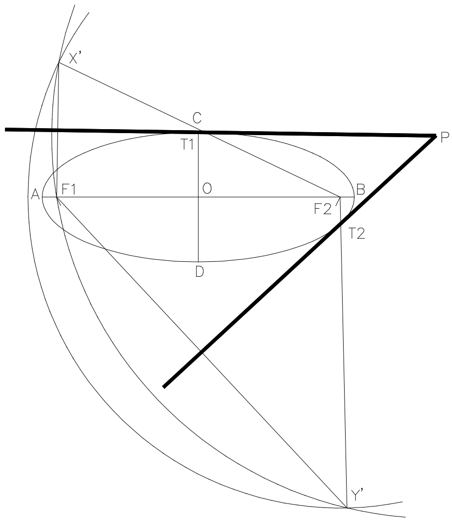
Mediante Circunferencia Focal.

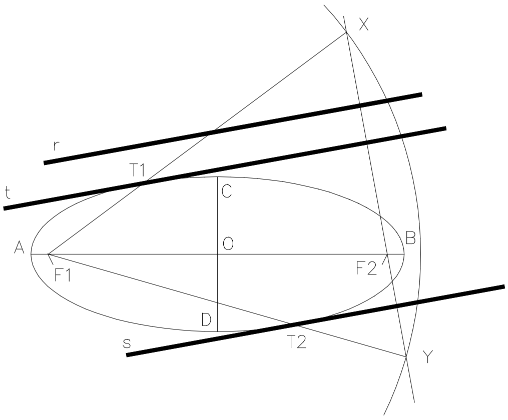


Trazamos una circunferencia de centro P, punto exterior dado y radio PF_1 o PF_2 (según trabajemos con la circunferencia focal de centro F_2 o F_1, respectivamente) que cortará a la circunferencia focal correspondiente en los puntos X e Y. Si trabajamos con la circunferencia focal de centro F_1 , las mediatrices de los segmentos XF_2 y XF_1 son las rectas tangentes de la elipse desde P buscadas. Los puntos de tangencia T_1 y T_2 de estas tangentes, con la elipse, están en la intersección de los segmentos F_1X y F_2X con la propia elipse. Trabajando con la circunferencia focal de centro F_2, obtenemos las mismas soluciones

TANGENTES A LA ELIPSE PARALELAS A UNA DIRECCIÓN DADA.

Dada la elipse y la dirección -r- trazamos la circunferencia focal en uno de los focos F_1 y por el otro una perpendicular a r, que corta en X e Y a la circunferencia focal. Uniendo X e Y con F_1 y F_2 obtenemos los puntos de tangencia T_1 y T_2 sobre la elipse por donde trazaremos paralelas a la dirección dada obteniendo de este modo las tangentes buscadas, que además son las mediatrices de los segmentos XF_2 e YF_2.

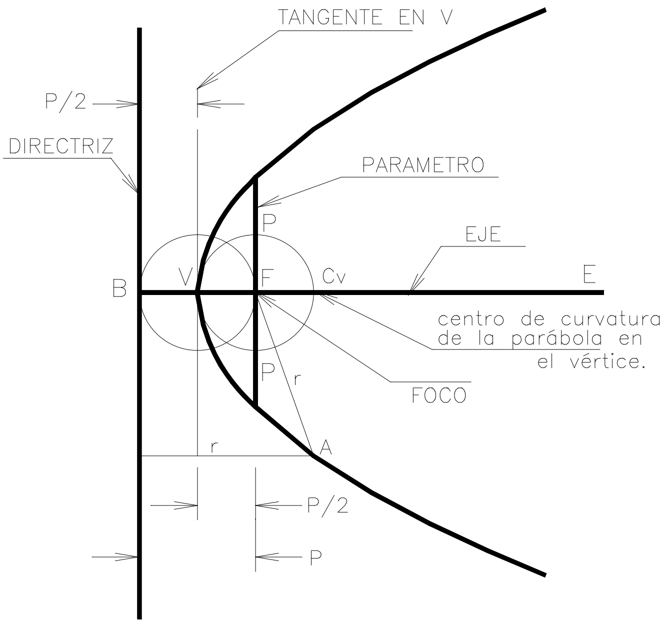




PARÁBOLA.

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES.

Es una curva cónica, abierta, plana y de una sola rama, lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo denominado foco y de una recta denominada directriz.



Elementos.

Además del **foco** F y la **directriz**, cuenta con un **eje** de simetría E, normal a la directriz y que contiene al foco.

Se denomina **vértice** V, al punto de intersección de la curva con el eje, la tangente en V a la curva es paralela a la directriz. Por ser V un punto de la curva, equidista del foco y la directriz.

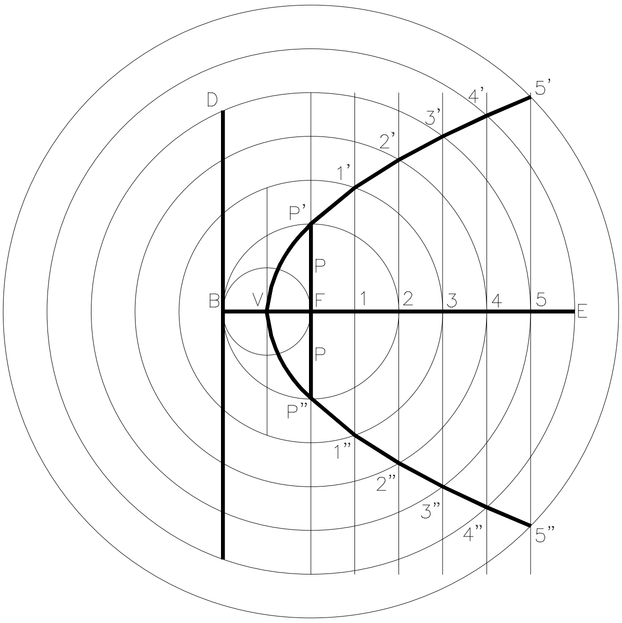
Se denomina **Parámetro** P a la longitud de la cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz. El semiparámetro mide lo mismo que longitud hay de F a la directriz.

Las circunferencias **focal** y **principal** tienen radio infinito por lo que se convierten en rectas, la primera de ellas coincidente con la directriz y la segunda coincidente con la recta tangente en V a la parábola.

El **centro de curvatura** en el vértice es el centro de la **circunferencia osculatriz** que pasa por ese punto, Cv está a igual distancia de F que F de V. Tomando varios puntos muy próximos de la curva, se denomina circunferencia osculatriz a la que pasa por ellos.

TRAZADO DE PARÁBOLAS

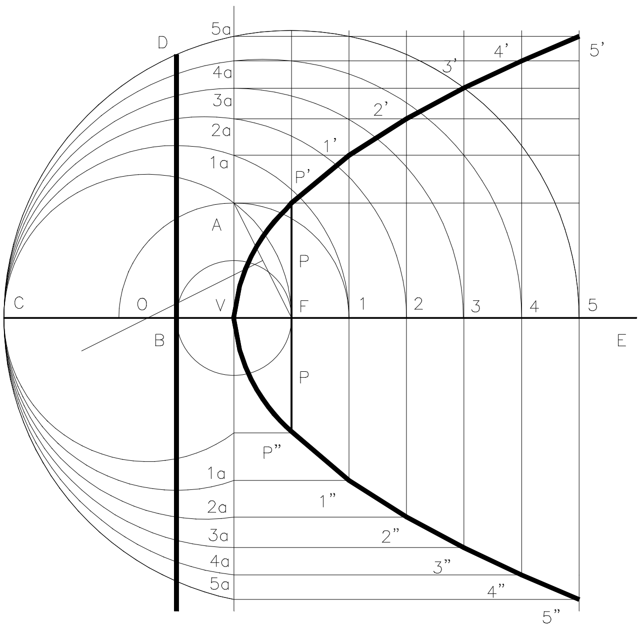
A. CONOCIENDO LA DIRECTRIZ Y EL FOCO.



1^er^ método.

Determinamos V, punto de la curva, en el punto medio del segmento FB. Graduamos el eje a partir de F y en sentido opuesto a V en cualquier número de partes iguales o no, por donde trazamos normales al eje. Con centro en F y radio 1B trazamos una circunferencia que corta en 1' y 1", puntos de la parábola, la normal correspondiente a 1. Procedemos de igual modo para los puntos restantes incluido el propio F y unimos los puntos así obtenidos a mano alzada.

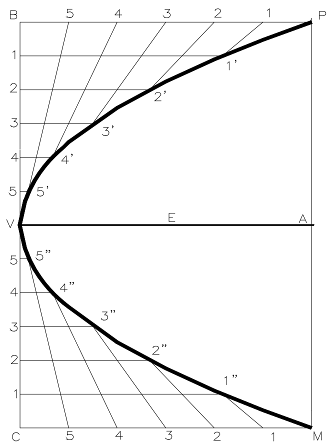
2º método.



Determinamos V y por V trazamos la tangente a la curva (paralela a la directriz), llevando sobre ella el semiparámetro en A. Trazamos la mediatriz del segmento AF y obtenemos el punto O sobre la prolongación del eje. Trazamos, con centro en O una circunferencia de radio OF que corta al eje y determina el punto C. Graduamos el eje en partes iguales (1, 2, 3...), por donde trazamos normales al eje. Dibujamos circunferencias de diámetros C1, C2, C3..., estas, cortan a la tangente trazada por V a la curva, en los puntos 1a, 2a, 3a.... desde donde trazamos paralelas al eje hasta cortar a las rectas normales al eje correspondientes en 1' y 1", 2' y 2" etc.. puntos de la parábola. Trazamos a mano alzada o con plantilla de curvas.

En cualquiera de los dos métodos descritos se verifica que cualquier punto de la curva equidista del foco y del eje.

B. CONOCIENDO EL VÉRTICE, EL EJE Y UN PUNTO DE LA CURVA.

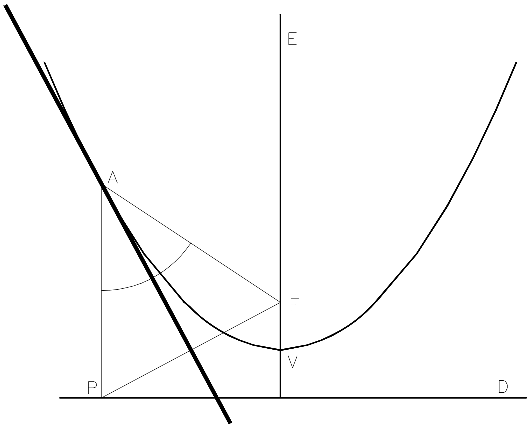


Conocido el eje E, el vértice V y un punto P de la curva, trazamos por P y V perpendiculares al eje y por P una paralela, obtenemos de este modo el paralelogramo VAPB, trazamos otro paralelogramo simétrico de este respecto al eje, CMVA. Dividimos en partes iguales los segmentos paralelos al eje y en el doble número de partes, también iguales, el segmento BC, las primeras divisiones las unimos con V y por el resto trazamos paralelas al eje. Donde se cortan las correspondientes (ver el dibujo) obtenemos puntos de la curva.

TRAZADO DE RECTAS TANGENTES A LA PARÁBOLA.

Por un punto de la curva.

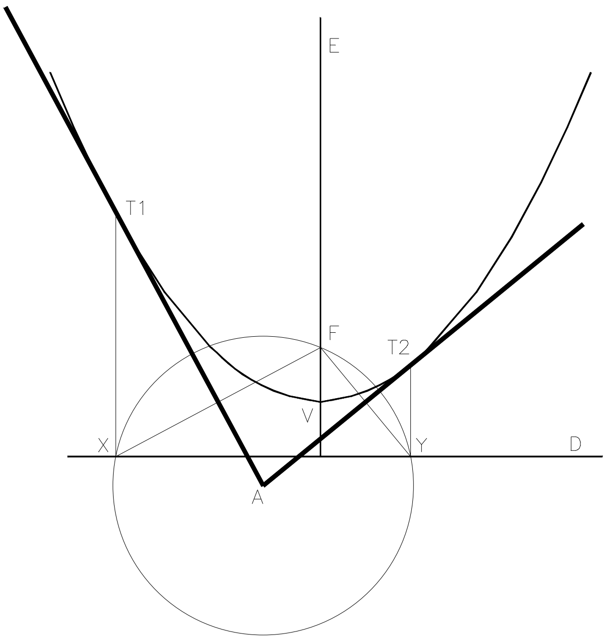
Uniendo A dado con el foco y con la directriz según una perpendicular, obtenemos el ángulo FAP, su bisectriz es la recta tangente buscada en A.



> *El punto P perteneciente a la directriz (circunferencia focal en la parábola, de radio infinito) es siempre simétrico de F respecto de la tangente trazada, como sucedía en la elipse (la circunferencia focal es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco respecto de las rectas tangentes trazadas a la curva). Conociendo F, A y la directriz podemos trazar la tangente, pues P está en el pié de la normal trazada a la directriz desde A (en la elipse P está en la intersección de la circunferencia focal con la prolongación del radio vector que contiene al punto A y al propio centro de la circunferencia focal).*

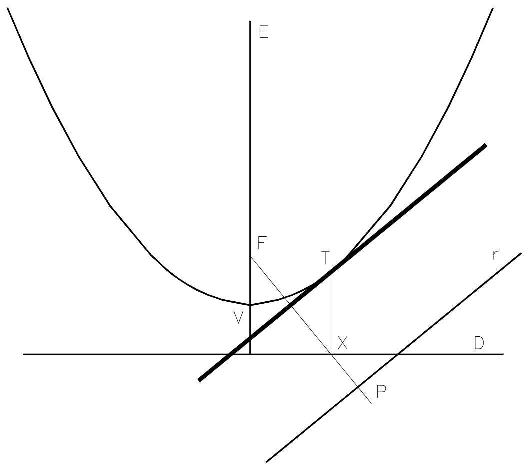
Desde un punto exterior.

Como en la elipse, trazamos una circunferencia de centro en A dado y radio AF que determina X e Y sobre la circunferencia focal (directriz en la parábola), trazamos perpendiculares a la directriz (buscando el centro de la circunferencia focal, en el infinito), y obtenemos en su intersección con la curva los puntos T1 y T2 de tangencia. Las mediatrices de XF e YF son las tangentes buscadas8 en cualquier caso, X e Y simétricos de F respecto de las tangentes trazadas).



Paralelas a una dirección dada

Dada la dirección r, trazamos por F una recta perpendicular a r que corta en X a la directriz (circunferencia focal), Unimos X con el centro de la circunferencia focal (en el infinito, luego trazamos por X una perpendicular a la directriz) que corta en T, punto de tangencia, a la curva. Por T trazamos una paralela a r obteniendo la recta tangente buscada, que además será mediatriz del segmento XF.



HIPÉRBOLA.

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES.

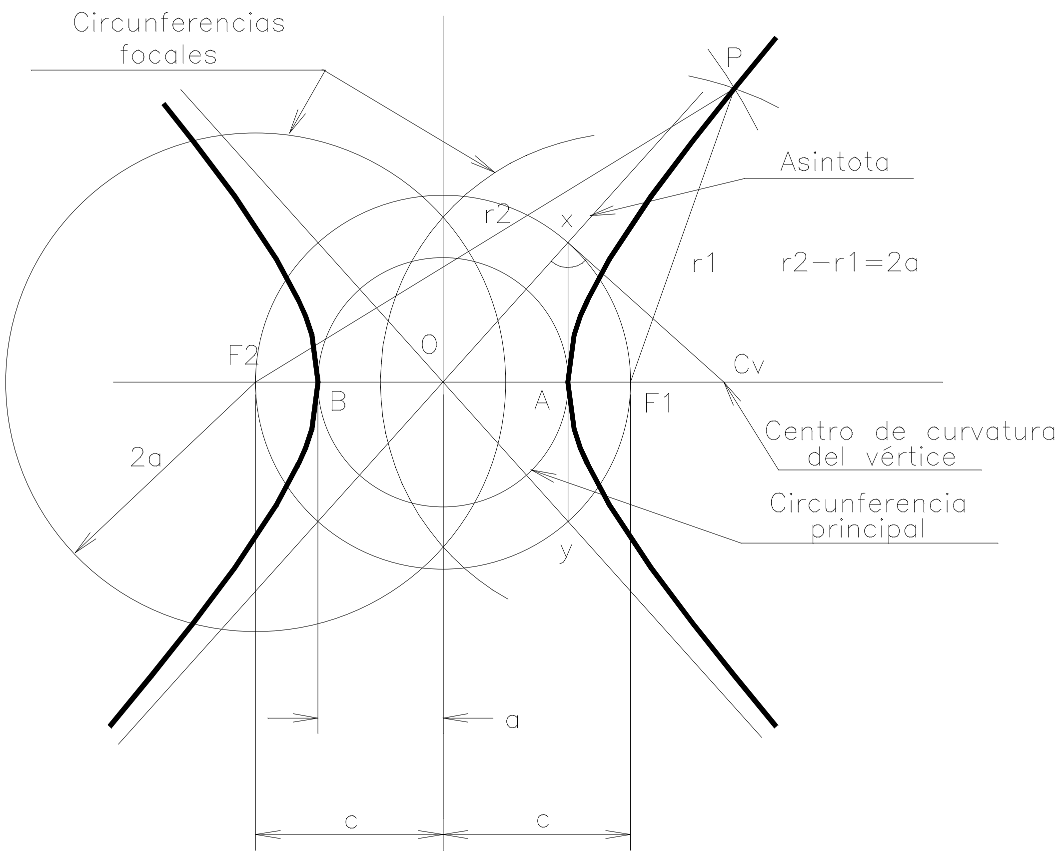
Es la hipérbola una curva cónica, abierta, plana y de dos ramas definida como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos fijos, denominados focos, es constante.

ELEMENTOS:

Como la elipse, tiene dos **ejes** de simetría perpendiculares entre sí, uno de ellos denominado **eje mayor** o real (AB), de magnitud 2a, siendo -a- la distancia desde un vértice al centro de la curva o intersección de los dos ejes. El otro eje se denomina eje menor.

Los **vértices** son los puntos de intersección de la curva con el eje mayor.

Se denomina **distancia focal** a la distancia comprendida entre los dos **focos** (F_1-F_2), su valor es 2c, siendo c la distancia de un foco al centro de la hipérbola. Los focos están sobre el eje mayor.



Se denominan **radios vectores** (r_1 y r_2) a los segmentos F_1P y F_2P, siendo P un punto de la curva. Su diferencia es constante para cualquier punto de la curva e igual a la magnitud del eje mayor ($r_1 - r_2$ = cte =2a).

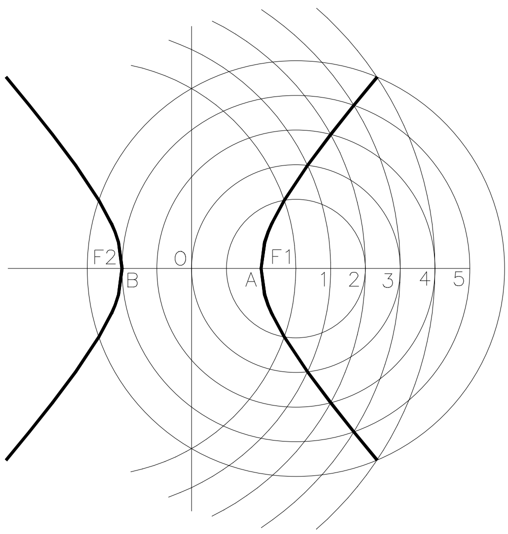
Como en la elipse, **circunferencias focales** son aquellas que con centro en los focos, tienen de radio la magnitud del eje mayor 2a y **circunferencia principal** la que tiene su centro coincidente con el centro O de la hipérbola y 2a de diámetro.

Se denominan **asíntotas** las rectas tangentes a la curva en el infinito, pasan por el centro O y cuando forman 45º con los ejes, la hipérbola se denomina **equilátera**. Son dos las asíntotas y tangentes cada una de ellas a las dos ramas simultáneamente.

El **centro de curvatura en el vértice**, está en la intersección del eje mayor y las normales trazadas a las asíntotas por los puntos de intersección (x e y) de estas con una circunferencia de centro O y diámetro F1F2.

TRAZADO DE HIPÉRBOLAS

Conociendo los vértices y los focos.

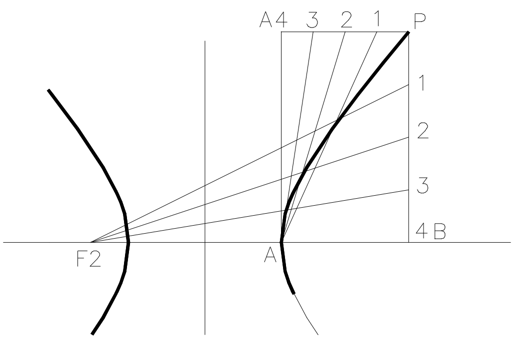


Graduamos el eje mayor arbitrariamente a partir de uno de los focos y en sentido opuesto al centro obteniendo 1, 2, 3… Trazamos circunferencias con centro en F1 y radios 1A, 2A, 3A.... y circunferencias de centro F2 y radios 1B, 2B, 3B…, los puntos de intersección de circunferencia correspondientes, son puntos de la hipérbola.

Operamos de igual modo para la rama izquierda de la curva que debe ser simétrica de la derecha.

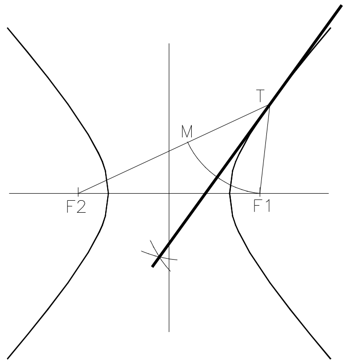
Conociendo un vértice, un foco y un punto de la curva y O, centro.

Conocido el vértice A, el punto P de la hipérbola y el foco F2, trazamos un paralelogramo rectángulo que pase por P y A, dividiendo sus lados BP y A4P en idéntico número arbitrario de partes iguales. Unimos con F2 las divisiones efectuadas en el segmento BP y con A las del segmento A4P, las intersecciones correspondientes determinan puntos de la curva. Trazamos el resto de la rama derecha de igual modo a partir de un punto P’ simétrico del anterior respecto al eje mayor y la rama izquierda de la hipérbola por simetría con respecto al eje menor trazado por O dado.



TRAZADO DE RECTAS TANGENTES A LA PARÁBOLA.

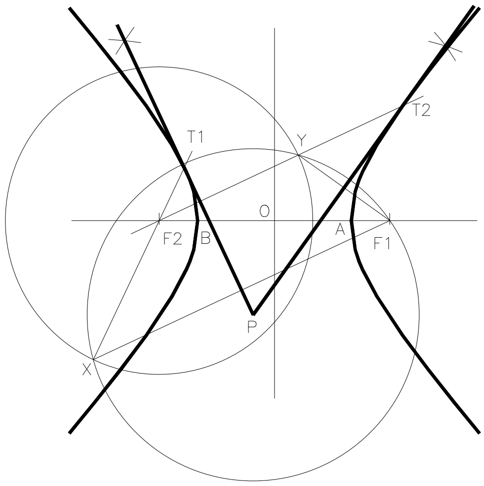
Por un punto de la curva.



Como en la elipse, el punto simétrico (M) de uno de los focos (F1), respecto de la recta tangente, está sobre la intersección del radio vector que une el punto T de tangencia con el otro foco (F2) y la circunferencia focal trazada con centro en dicho foco (F2, no dibujada).

La recta tangente es por tanto bisectriz de los radios vectores que concurren en T o mediatriz del segmento MF1.

Desde un punto exterior.



Como en la elipse, trazamos una circunferencia de centro en P dado, que pase por uno de los focos (F1), cortará a la circunferencia focal (radio AB) trazada con centro en el otro foco (F2) en X e Y, que como sabemos son los puntos simétricos del foco F1 respecto de las rectas tangentes. Trazamos las mediatrices de los segmentos XF1 e YF1 y obtenemos las rectas tangentes buscadas. Los puntos de tangencia se encuentran en la intersección de la curva y la prolongación de los segmentos XF2 e YF2.

Paralelas a una dirección dada

Trazamos la circunferencia focal de centro en uno de los focos (F2) y por el otro una perpendicular a la dirección r dada que cortará a la circunferencia en los puntos X e Y, simétricos de F1 si tomamos como ejes de simetría las rectas tangentes solución. Las mediatrices de los segmentos XF1 e YF1 son las tangentes buscadas. Los puntos de tangencia se encuentran intersección de la hipérbola y las prolongaciones de los segmentos XF2 e YF2.