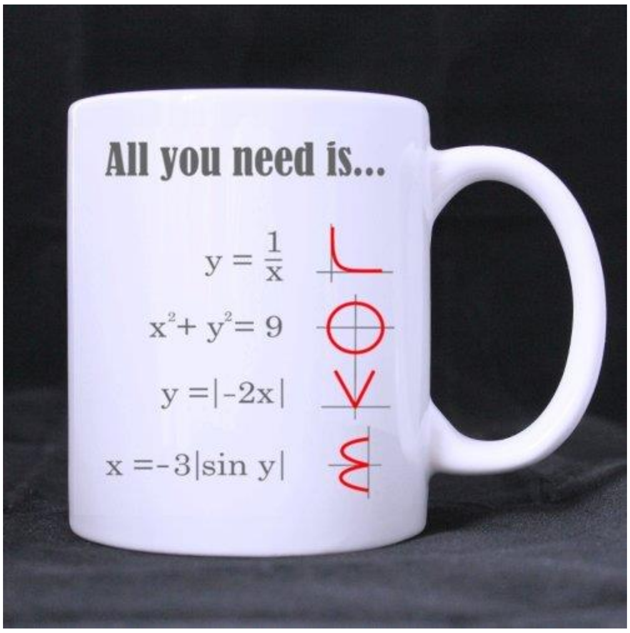
2º de bachillerato Matemáticas II
Bloque 3 - Análisis



www.ebaumatematicas.com

Cualquier error o ausencia en este documento, por favor, comunicarlo al correo ebaumatematicas@gmail.com

Ejercicios de análisis en pruebas de acceso a la universidad de toda ESPAÑA

Resueltos con todo detalle en www.ebaumatematicas.com

Andalucía

1) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2024. Bloque A. EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=a+b\cos(x)+c\,sen(x)$$

Halla a, b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{2}$ a la recta $y=1$ como recta tangente, y que la recta $y=x-1$ corta a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.

Solución: Los valores buscados son a = –1, b = 0 y c = 2.

2) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2024. Bloque A. EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

a) **[1,5 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

b) **[1 punto]** Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

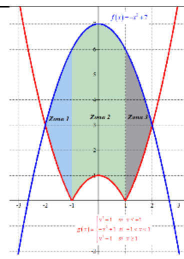
Solución: a) La función decrece en $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ *y crece en* $\left(\frac{-1}{2},1\right)$. *b) El mínimo absoluto de la función es* $-e^{-0.25}\simeq-0.7788$ *y se alcanza en* $x=\frac{-1}{2}$. *El máximo absoluto de la función es* $\frac{1}{2e}\simeq 0.1839$ *y se alcanza en* $x=1$.

3) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2024. Bloque B. EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=-x^2+7$ y $g(x)=\left|x^2-1\right|$.

a) **[1 punto]** Halla los puntos de intersección de las gráficas de *f* y *g*. Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de dicho recinto.



Solución: a) Los puntos de corte de ambas gráficas son $A(-2,3)$ *y* $B(2,3)$. *b) El área tiene un valor de* $\frac{56}{3}\simeq 18.667$ *unidades cuadradas.*

4) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2024. Bloque B. EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Halla $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\,dx$.

Solución: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\,dx = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$

5) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2024. Bloque A. EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica A(1, 0) y B(e, 1).

a) **[1,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de *f* en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto A.

Solución: a) El punto de coordenadas $(e-1,\ln(e-1))$. *b)* $y=-x+1$.

6) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2024. Bloque A. EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función continua definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cos(x)-a\,sen(x)}{x^3} & si\ \ x<0 \\ b\cos(x)-1 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$$

Calcula *a* y *b*.

Solución: $a=1$ *y* $b=\dfrac{2}{3}$.

7) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2024. Bloque B. EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función definida por $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x\neq -1$, $x\neq 1$. Calcula una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto (0, 1).

Solución: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+1$.

8) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2024. Bloque B. EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Halla la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=x\cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi,2\pi)$.

Solución: $f(x)=-x\cos(x)+2sen(x)+\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}$.

9) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2023. Bloque A. EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f:[-2,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 5x+1 & si & -2\leq x\leq 0 \\ e^x\cos(x) & si & 0<x\leq 2\pi \end{cases}$.

a) **[2 puntos]** Halla los extremos relativos y absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[0,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Solución: a) El máximo relativo de la función es $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}\right)$ *y el mínimo relativo es* $\left(\dfrac{5\pi}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4}\right)$. *El máximo absoluto está en* $x=2\pi$ *con valor* $e^{2\pi}\simeq 535.49$.
El mínimo absoluto está en $x=\dfrac{5\pi}{4}$ *y su valor es* $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4}\simeq -35.88$ *b)* $y=-e^{\pi/2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

10) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2023. Bloque A. <u>EJERCICIO 2</u> (2.5 puntos)

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

a) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución: a) El mínimo relativo tiene coordenadas $(1,0)$ *y el máximo relativo tiene coordenadas* $(e^{-2},4e^{-2})$ *b) El mínimo absoluto de la función es* $(1,0)$. *No tiene máximo absoluto.*

11) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2023. Bloque A. <u>EJERCICIO 3</u> (2.5 puntos)

Calcula *a* con $0<a<1$, tal que $\displaystyle\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx+2=0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución: El valor buscado es $a=e^{-2}$.

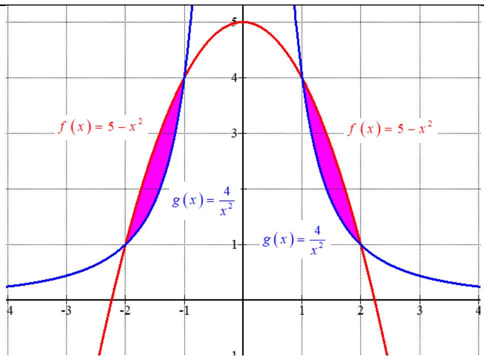
12) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2023. Bloque A. <u>EJERCICIO 4</u> (2.5 puntos)

Considera las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=5-x^2$ y $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$.

a) **[1,25 puntos]** Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.

Solución: a)



Las gráficas tienen 4 puntos de corte: x = –2, x = –1, x = 1, x = 2. b) El área total es $\dfrac{4}{3}\simeq 1.33\ u^2$

13) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2023. Bloque A. EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 f(x)\right)$.

Solución: a) El máximo absoluto tiene coordenadas $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. *La función no presenta mínimo relativo ni absoluto. b) 0.*

14) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2023. Bloque A. EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f:[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-2x+5$.

a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos *(–2, f(–2))* y $(2, f(2))$.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de inflexión.

Solución: a) Existen dos puntos: $x=-\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ *;* $x=+\sqrt{\dfrac{4}{3}}$. *b) Tangente* $y=-2x+5$. *Normal* $y=\dfrac{1}{2}x+5$.

15) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2023. Bloque A. EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa *x = 0*.

Solución: 1 unidad cuadrada.

16) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2023. Bloque A. EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x sen\left(t^2\right)dt$. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xF(x)}{sen\left(x^2\right)}$.

Solución: 0

17) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2022. Bloque A. EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula *a* sabiendo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax}{(\ln x)^3+2x}=1$ (donde *ln* denota la función logaritmo neperiano)

Solución: a = 2

18) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2022. Bloque A. EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-x^2+12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

Solución: Las coordenadas de los vértices son: (–2, 0); (2, 0); (–2, 8) y (2, 8). Área máxima de 32 u^2.

19) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2022. Bloque A. EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_3^8\dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=\sqrt{1+x}-1$).

Solución: 2 + 2ln2.

20) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2022. Bloque A. EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x^3+2$ y $g(x)=-x^2+2x+2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Esboza sus gráficas. **(1,25 puntos)**

b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* en el primer cuadrante. **(1,25 puntos)**

Solución: a) x = –2; x = 0; x = 1 b) 5/12 u^2.

21) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2022. Bloque A. EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua *f* definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & si \quad x<-1\\ ax+b & si \quad -1\le x<1\\ \dfrac{x^2}{x+1} & si \quad x\ge 1\end{cases}$

a) Calcula *a* y *b*. **(1 punto)**

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1,5 puntos)**

Solución: a) a = 3/4; b = –1/4 b) No tiene asíntotas verticales. Una asíntota horizontal en –∞ es y = 0. No hay asíntota horizontal en +∞. En +∞ la asíntota oblicua tiene ecuación $y=x-1$.

22) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2022. Bloque A. EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=4-\dfrac{x^2}{3}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{6}-2$.

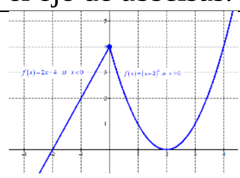
Solución: Es un cuadrado de lado 4

23) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2022. Bloque A. EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea *f* la función definida por $f(x)=\begin{cases}2x+4 & si \quad x<0\\ (x-2)^2 & si \quad x\ge 0\end{cases}$.

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de *f* con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. **(1 punto)**

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y por el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

Solución: a) La gráfica corta el eje de abscisas en (–2, 0) y (2, 0).  *b) 20/3 u^2.*

24) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2022. Bloque A. EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$ para $x\neq 1$. Halla una primitiva de *f* que pase por el punto (2, 6).

Solución: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}+1$

25) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2021. Bloque A. EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x\to 0}\dfrac{a\left(1-\cos(x)\right)+bsen(x)-2\left(e^x-1\right)}{x^2}=7$.

Solución: Los valores buscados son a = 16 y b = 2.

26) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2021. Bloque A. EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Halla $a>0$ y $b>0$ sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto (1, 2) un punto crítico.

Solución: Se consigue lo pedido en el ejercicio con a = 1 y b = 4.

27) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2021. Bloque A. EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=1+\int_0^x te^t\,dt.$$

Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtiene y valores que se alcanzan)).

Solución: La función es cóncava (∩) en $(-\infty,-1)$ *y convexa (∪) en* $(-1,+\infty)$. *El punto de inflexión tiene coordenadas* $\left(-1,2-\dfrac{2}{e}\right)$

28) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2021. Bloque A. EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x\neq -1$, $x\neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (2, 4)

Solución: $F(x)=x+\ln|x-1|-\ln|x+1|+2+\ln 3$

29) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2021. Bloque A. EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$ $(\text{para } x\neq 1)$ tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto (1, 1) y tiene pendiente 2. Calcula a y b.

Solución: Los valores buscados son a = 2 y b = –3.

30) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2021. Bloque A. EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función continua $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}(3x-6)e^x & si\quad x\leq 0\\ \dfrac{36\left(sen(x)-ax\right)}{x^3} & si\quad x>0\end{cases}$$

a) Calcula a. **(1.5 puntos)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$. **(1 punto)**

Solución: a) a = 1 b) $y=-\dfrac{6}{e}x-\dfrac{15}{e}$

31) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2021. Bloque A. EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

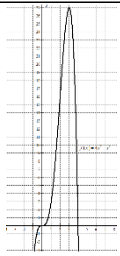
Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=4x^3-x^4$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1 punto)**

b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

Solución: a) La función crece en $(-\infty,3)$ *y decrece en* $(3,+\infty)$.

b) $Área = \frac{256}{5} = 51.2\, u^2$



32) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2021. Bloque A. EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\int_0^x \left(2t+\sqrt{t}\right)dt$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución: $y = 3x - \frac{4}{3}$

33) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2020. Ejercicio 1. (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=e^x\left(x^2-5x+6\right)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

Solución: En $(-\infty,-1)$ *es convexa* ($\cup$). *En* $(-1,2)$ *es cóncava* ($\cap$). *En* $(2,+\infty)$ *es convexa* ($\cup$). *En x = 2 y en x = –1 son puntos de inflexión.*

34) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2020. Ejercicio 2. (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^\pi x\,sen^2(x)dx$.

Solución: $\frac{\pi^2}{4}$

35) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2020. Ejercicio 5. (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{2ax-4b} & si \quad x<1 \\ 1-x\ln x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano)

a) Determina los valores de a y b. **(1.75 puntos)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$. **(0.75 puntos)**

Solución: a) $a=-\frac{1}{2};\ b=-\frac{1}{4}$ *b)* $y=(-1-\ln 2)x+3$

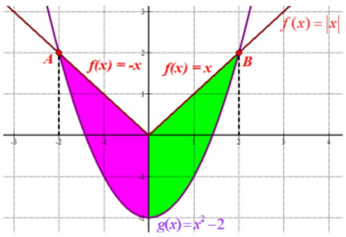
36) Andalucía. PEvAU Extraordinaria 2020. Ejercicio 6. (2.5 puntos)

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=|x|$ y $g(x)=x^2-2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan. **(1 punto)**

b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

Solución: a) $A(-2,2)$ *y* $B(2,2)$



b) **Área** $= \frac{20}{3} = 6,66\, u^2$

37) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2020. Ejercicio 1. (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ para $x \neq 1, -1$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1.25 puntos)**

Solución: A. Vertical: x = 1. A. Horizontal : y = 1. A. O. : No hay b) La función siempre crece.

38) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2020. Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$.

Solución: $a = \frac{1}{3}$

39) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2020. Ejercicio 5 (2.5 puntos)

Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{senx}{2 - \cos x}$.

a) Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**

b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$. **(0.5 puntos)**

Solución: a) La función presenta un máximo en el punto $\left(\frac{\pi}{3}, 0.57\right)$ *y un mínimo en* $\left(\frac{5\pi}{3}, -0.57\right)$ *b) La tangente es* $y = 0.57$. *La normal es* $x = \frac{\pi}{3}$

40) Andalucía. PEvAU Ordinaria 2020. Ejercicio 6 (2.5 puntos)

Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x-2)^2}$ *para* $x \neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)dx$. **(2 puntos)**

b) Calcula la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (3, 5). **(0.5 puntos)**

Solución: a) $F(x) = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C$ *b)* $F(x) = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + 12$

41) Andalucía. PEvAU Septiembre 2019. Opción A. Ejercicio 1.- [2,5 puntos]

Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de *f(x)* y la recta $y = 0$.

Solución: El rectángulo es de base $4\sqrt{3}$ *y altura 4.*

42) Andalucía. PEvAU Septiembre 2019. Opción A. Ejercicio 2.- [2,5 puntos]

Determina la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f\,'(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de *f* pasa por (1,0).

Solución: $f(x)=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+4$

43) Andalucía. PEvAU Septiembre 2019. Opción B. Ejercicio 1.- [2'5 puntos]

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\begin{cases} sen(x)+ax+b & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$.

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

Solución: $a=\frac{-3}{2};\quad b=1$

44) Andalucía. PEvAU Septiembre 2019. Opción B. Ejercicio 2.-

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$.

a) **[1'25 puntos]** Calcula los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes coordenados y los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1'25 puntos]** Determina a > 0 de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de *f* en el intervalo [0, a] y el eje de abscisas.

Solución: a) Solo tiene un punto de corte P(0, 0). La función tiene un mínimo en $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ *y un máximo en* $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$*, tomando los valores* $f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2e}}$ *y* $f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2e}}$ *b)* $a=\sqrt{\ln 2}$

45) Andalucía. PEvAU Septiembre 2018. A. 1. [2'5 puntos] Considera la función $f: R\to R$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sen(x)} & si \quad x>0 \end{cases}.$$

Determina *a*, *b* y *c* sabiendo que *f* es continua, alcanza su máximo relativo en *x = –1* y la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = –2* tiene pendiente 2.

Solución: Los valores pedidos son ***a = –1, b = –2 y c = 2***

46) Andalucía. PEvAU Septiembre 2018. A. 2. [2'5 puntos] Considera la función f definida por $f(x)=ax\ln(x)-bx$ para *x > 0* (*ln* denota la función logaritmo neperiano). Determina *a* y *b* sabiendo que *f* tiene un extremo relativo en *x = 1* y que $\int_1^2 f(x)dx=8\ln(2)-9$.

Solución: a = b = 4.

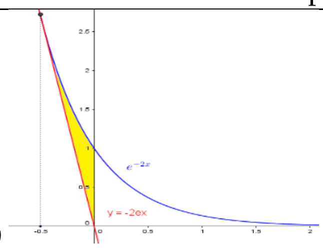
47) Andalucía. PEvAU Septiembre 2018. B. 1. Considera la función *f* definida por $f(x)=a\ln(x)+bx^2+x$ para *x > 0*, donde *ln* denota la función logaritmo neperiano.

a) **[1'5 puntos]** Halla *a* y *b* sabiendo que *f* tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.
b) **[1 punto]** ¿Qué tipo de extremos tiene *f* en $x = 1$ y en $x = 2$?

Solución: a) $a = \frac{-2}{3}$ *y* $b = \frac{-1}{6}$ *b) En x = 1 es un mínimo relativo y en x = 2 un máximo relativo.*

48) Andalucía. PEvAU Septiembre 2018. B. 2. Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = e^{-2x}$.

(a) **[0'75 puntos]** Determina el punto de la gráfica de *f* en el que la recta tangente es $y = -2ex$.
(b) **[0'5 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas.
(c) **[1'5 puntos]** Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución: (a) El punto es $\left(\frac{-1}{2}, e\right)$ *(b)* 

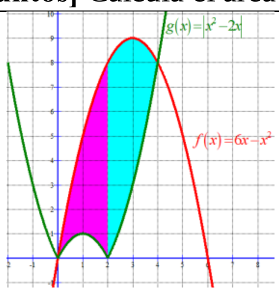
(c) $Área = \frac{e}{4} - \frac{1}{2} = 0.17957\ u^2$

49) Andalucía. PEvAU Junio 2018. A.1.
Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x): x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de *f* pasa por el punto (1, 1).

Solución: a = –3, b = 3 y c = 0

50) Andalucía. PEvAU Junio 2018. A. 2. Considera las funciones f y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$.

a) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.
b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.

Solución: a) 

b) Área total = 8 + 10,66 = 18,66 u²

51) Andalucía. PEvAU Junio 2018. B. 1. [2'5 puntos] Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & si \quad x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & si \quad x > 1 \end{cases}$ es derivable

Solución: k debe ser 1

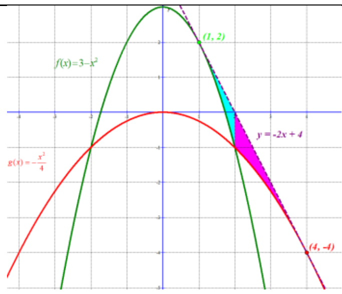
52) Andalucía. PEvAU Junio 2018. B. 2. Considera las funciones f y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $g(x)=-\dfrac{x^2}{4}$ y $f(x)=3-x^2$

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de *g*. Determina el punto de tangencia con la gráfica de *g*.

b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la recta $y=4-2x$ y las gráficas de *f* y *g*. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) [0'75 punto] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución: a) $y=-2x+4$*. En x = 4 es tangente a g. b)*



La función f(x) solo corta a la recta tangente en x = 1 y la función g(x) solo corta a la recta tangente en x = 4. c) El área es 1 u^2

53) Andalucía. PEvAU Septiembre 2017. A. 1. [2,5 puntos] Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Solución: Las dimensiones de la tarjeta que hacen mínimo el consumo de papel es 24,14 cm de largo y 12,07 cm de ancho.

54) Andalucía. PEvAU Septiembre 2017. A. 2. [2,5 puntos] Determina la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

Solución: $f(x)=xe^x-2e^x+2$

55) Andalucía. PEvAU Septiembre 2017. B. 1. Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

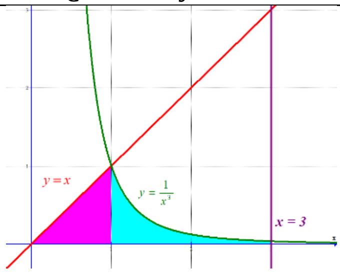
a) [2 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [0,5 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución: a) La función decrece en el intervalo $(-\infty,0)$ *y crece en* $(0,+\infty)$*. La función presenta un mínimo relativo en x = 0. Y toma el valor* $f(0)=1$*. El punto (0, 1) es el mínimo relativo.b) x = 0.*

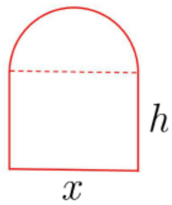
56) Andalucía. PEvAU Septiembre 2017. B. 2. Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje *OX*, la recta $y=x$, la gráfica $y=\dfrac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

a) [0,5 puntos] Haz un esbozo del recinto descrito.
b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.
c) [0,5 puntos] Si consideras la gráfica $y=\frac{1}{x}$ en lugar de $y=\frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?.

Solución: a) 

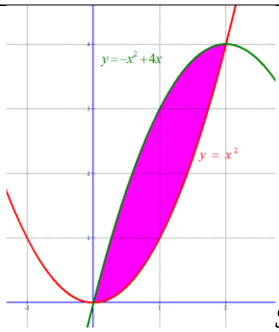
b) Área total = 0,944 u^2 c) El área del nuevo recinto sería mayor que el área del recinto inicial

57) Andalucía. PEvAU Junio 2017. A. 1. [2.5 puntos] Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados. Si es posible, determina la base *x* para que el perímetro sea mínimo.



Solución: El perímetro es mínimo para $x=\sqrt{\frac{128}{4+\pi}}=4,23$ *metros*

58) Andalucía. PEvAU Junio 2017. A. 2. Considera la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=-x^2+4x$
a) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.
b) [0,75 puntos] Expresa el área como una integral.
c) [1 punto] Calcula el área.

Solución: a) 

Se cortan en x = 0 y x = 2. b) $Área=\int_0^2 -2x^2+4x\,dx$ *c)*

$Área=\frac{8}{3}=2,667\,u^2$

59) Andalucía. PEvAU Junio 2017. B. 1. Considera la función *f* definida por
$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ para $x\neq 1$.
a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) [1,5 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución: a) La asíntota vertical es $x=1$*, no tiene asíntota horizontal y la asíntota oblicua tiene ecuación* $y=x+1$ *b) La función crece en* $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ *y decrece en* $(0,1)\cup(1,2)$*. El máximo relativo es el punto (0, 0) y el mínimo relativo es (2,4)*

60) Andalucía. PEvAU Junio 2017. B. 2. Calcula $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ $\left(\text{sugerencia } t=\sqrt[4]{x}\right)$

Solución: $2+4\ln 3-4\ln 2$

Aragón

1) Aragón. EvAU Extraordinaria 2024. 1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} a-\cos(x) & x\le 0 \\ x^2-b\,sen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) & x>0 \end{cases},\quad a,b\in\mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a y b.

(b) (1 punto) Para $a = 1$, calcula el valor de b para que, en el punto con $x=\dfrac{\pi}{2}$, la función tenga tangente $y=\dfrac{\pi}{2}x$.

Solución: a) La función es continua en $\mathbb{R}$ *cuando b = 1− a. La función es continua en* $\mathbb{R}-\{0\}$ *cuando b ≠ 1− a.. b)* $b=\dfrac{-\pi}{2}$

2) Aragón. EvAU Extraordinaria 2024. 2) Estudia la existencia del siguiente límite y calcúlalo en caso de existir:

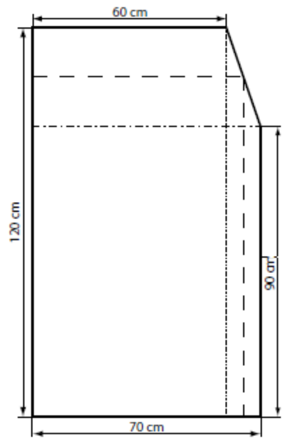
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(3x^5+5x^4-7x^3+2x^2-x+3\right)+2}{3-\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{sen\left(2x^2\right)+\left(\cos(x)\right)^2+\log(x+5)}}$$

Solución: El valor del límite es 2/3.

3) Aragón. EvAU Extraordinaria 2024. 3) Calcula el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x+6$ y $g(x)=\begin{cases}-2x & si\ x<0\\ x^2 & si\ x\ge 0\end{cases}$

Solución: $\text{Área}=19.5\ u^2$

4) Aragón. EvAU Extraordinaria 2024. 4) En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado?



Solución: El nuevo cristal rectangular recortado con área máxima tiene dimensiones 60 × 120 cm

5) Aragón. EvAU Ordinaria 2024. 1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x} & si \;\; x\neq 0\\ a & si \;\; x=0\end{cases}\;,\quad a\in\mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.
(b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY.

Solución: a) La función es continua en $\mathbb{R}$ cuando a = 2. La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ para cualquier valor de a distinto de 2. b) El punto de corte de la tangente con el eje OX es $A\left(\frac{2}{e^2+1},0\right)$. El punto de corte de la tangente con el eje OY es $B(0,-2)$.

6) Aragón. EvAU Ordinaria 2024. 2) Calcula justificadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]$$

Solución: –2

7) Aragón. EvAU Ordinaria 2024. 3) (a) (1,2 puntos) Calcula a, b y $c\in\mathbb{R}$ tales que la función

$$f(x)=ax+bsen(x)\cos(x)+c$$

sea una primitiva de $g(x)=sen^2(x)$.

(*Nota: recuerda que* $sen^2(x)+\cos^2(x)=1\ \forall x\in\mathbb{R}$.)

(b) (0,8 puntos) Sabiendo que $sen(2x)=2sen(x)\cos(x)$, demuestra que

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-sen^2(x)$$

Solución: a) $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{-1}{2}$ y c puede ser cualquier valor real. b) www.ebaumatematicas.com

8) Aragón. EvAU Ordinaria 2024. 4) Demuestra que, entre todos los rectángulos de perímetro P cm, el de mayor área es el cuadrado.

Solución: Las dimensiones del rectángulo de área máxima es un cuadrado de lado $x=\frac{P}{4}$.

9) Aragón. EvAU Extraordinaria 2023. 1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\left(e^{ax}+b\right)x-e,\quad a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcula los valores de a y b, sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x = 0$ y un punto de inflexión en $x = 2$.

b) (1 punto) Para los valores $a = 1$ y $b = 2$, calcula $\int xf\left(x\right)dx$

Solución: a) Los valores buscados son a = –1, b = –1. b) $\int xf\left(x\right)dx = x^2e^x-2xe^x+2e^x+2\frac{x^3}{3}-\frac{e}{2}x^2+K$

10) Aragón. EvAU Extraordinaria 2023. 2) Calcula el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$, para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+1\right)-a\,sen\left(x\right)+3x\cos\left(2x\right)}{x^2}$$

Solución: –1/2

11) Aragón. EvAU Extraordinaria 2023. 3) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

Solución: Los dos sumandos que buscamos son $x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}$. *La suma vale* $1-\log_3 4$.

12) Aragón. EvAU Extraordinaria 2023. 4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+1}$$

a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.

b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad = ∩ y convexidad = U) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

Solución: a) Dominio = $\mathbb{R}-\{1\}$. *La función decrece en* $\left(-\infty,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$ *y crece en* $\left(0,1\right)$. *b) La función es cóncava en* $\left(-\infty,-0.5\right)$ *y convexa en* $\left(-0.5,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$. *Tiene un punto de inflexión en* $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{9}\right)$

13) Aragón. EvAU Ordinaria 2023. 1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} ax-\dfrac{senx}{x}+2 & ,\quad x\neq 0 \\ 2 & ,\quad x=0 \end{cases},\quad a\in\mathbb{R}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=-\frac{\pi}{2}$ y di qué tipo de extremo es.

Solución: a) La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ *para todo valor de a. b) El valor buscado es* $a=\frac{4}{\pi^2}$. *En* $x=-\frac{\pi}{2}$ *hay un mínimo relativo*

14) Aragón. EvAU Ordinaria 2023. 2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}$$

Solución: 1

15) Aragón. EvAU Ordinaria 2023. 3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+4x$ y la recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x=\frac{7}{2}$.

Solución: El área de la región pedida es $\frac{343}{48}\simeq 7.15$ *unidades cuadradas*

16) Aragón. EvAU Ordinaria 2023. 4) Dada la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

a) (0,75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.
b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas, Determina las asíntotas caso de existir.

Solución: a) El dominio de la función es $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. *b)* $x=2$ *y* $x=-1$ *son asíntotas verticales.* $y=2$ *es asíntota horizontal cuando x tiende a +∞. La función no tiene ramas parabólicas*

17) Aragón. EvAU Extraordinaria 2022. 1) Dada la siguiente función

$$f(x)=xe^{-ax^2},\quad a\in\mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y tenga asíntota horizontal $y=0$.

b) (1 punto) Calcula, para el valor $a=\frac{1}{2}$, el área que encierra la gráfica de la curva *f(x)* entre el eje X y las rectas $x=0$ y $x=1$.

Solución: a) a > 0 *b)* $\text{Área}=-e^{-1/2}+1\simeq 0.39\ u^2$

18) Aragón. EvAU Extraordinaria 2022. 2) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x^3+ax^2+bx+3}{-x^3+4x^2-5x+2},\ a\in\mathbb{R}$$

Calcula los valores de $a,b\in\mathbb{R}$, para que $\lim_{x\to1} f(x)=L\in\mathbb{R}$, y determina el valor de dicho límite.

Solución: Los valores buscados son a = –1 y b = –4.

19) Aragón. EvAU Extraordinaria 2022. 3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x)=3x+2x^2$$

$$g(x)=x^2+4x+2$$

Solución: 4.5 u^2.

20) Aragón. EvAU Extraordinaria 202. 4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{x^2+x}{3-x^2}$$

a) (1.25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan.
b) (0.75 puntos) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x=1$.

Solución: a) $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$ *asíntotas verticales.* $y=-1$ *es asíntota horizontal. b)* $y=2.5x-1.5$

21) Aragón. EvAU Ordinaria 2022. 1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+e^3, & x\le 0\\ (1-x)^{a/x}, & x>0\end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcula, para *a = 1* la recta tangente a la función en $x=-4$.

Solución: a) a = –3 *b)* $y=-\frac{1}{4}x+e^3+1$

22) Aragón. EvAU Ordinaria 2022. 2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]$$

Solución: –5

23) Aragón. EvAU Ordinaria 2022. 3) Calcula:

$$\int e^{-x}\left(x^2-1\right)dx$$

Solución: $\int e^{-x}\left(x^2-1\right)dx=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-e^{-x}+K$

24) Aragón. EvAU Ordinaria 2022. 4) Dada la siguiente función
Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$$

a) (1 punto) Obtén el dominio de definición y estudia su crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Analiza la curvatura (concavidad = $\cap$ y convexidad = $\cup$) y existencia de puntos de inflexión en su dominio de definición. Obtén los puntos de inflexión, caso de existir.

Solución: a) $Dominio\ f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$. *La función crece en* $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ *y decrece en* $(0,1)$.

b) La función es convexa en $(-\infty,0)\cup(0,1.5)$ *y cóncava en* $(1.5,+\infty)$. *El punto de inflexión tiene coordenadas* $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{9}\right)$

25) Aragón. EvAU Extraordinaria 2021. 1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}5-ax^2 & si \quad x\le 1\\ \dfrac{6}{ax} & si \quad x>1\end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}, a\ne 0$$

a) (1 punto) Calcule los valores de $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua.
b) (1 punto) Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas x = 0 y $x = e$ sea 6 u^2.

Solución: a) La función es continua cuando a = 2 o a = 3 b) a = 3.

26) Aragón. EvAU Extraordinaria 2021. 2) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

Solución: $\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=e^{-\frac{\pi^2}{8}}$

27) Aragón. EvAU Extraordinaria 2021. 3) Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

Solución: Un cubo de longitud de arista 4 metros

28) Aragón. EvAU Extraordinaria 2021. 4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{e^x}{x^3-x}$$

a) (1,25 puntos) Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

b) (0,75 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 2$.

Solución: a) Las asíntotas verticales son x = 1, x = –1. No hay asíntota horizontal en +∞. La función tiene asíntota horizontal en –∞ con ecuación y = 0. No tiene asíntota oblicua.

29) Aragón. EvAU Ordinaria 2021. 1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{ax} & x>0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$, y determine el tipo de extremo que es.

Solución: a) La continuidad de la función no depende del valor de b. La función es continua si $a=\frac{1}{2}$.

b) Además b = –3. En x = –1 la función tiene un máximo relativo.

30) Aragón. EvAU Ordinaria 2021. 2) Calcule el valor de $a\in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ para que se verifique el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\left(1-sen^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}}=2$$

Solución: $a=-\ln 2$

31) Aragón. EvAU Ordinaria 2021. 3) Calcule

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}dx$$

Solución: $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left(x^3-3x+2\right)+K$

32) Aragón. EvAU Ordinaria 2021. 4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$$

a) (1,2 puntos) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

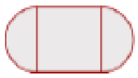
b) (0,8 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 1$.

Solución: a) El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,2\}$. *Las asíntotas verticales son x = –1, x = 2. No tiene asíntota horizontal. La asíntota oblicua es* $y=2x+1$. *b)* $y=-\frac{9}{4}x+\frac{7}{4}$

33) Aragón. EvAU Extraordinaria 2020. 5) Calcule el siguiente límite $\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{2/tg(x)}$

Solución: $\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{2/tg(x)}=e^2$

34) Aragón. EvAU Extraordinaria 2020. 6) Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base **y** metros y altura **x** metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)



Su superficie se desea que sea de $4+\pi\ m^2$. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle **x** e **y** de modo que se verifique este requisito.

Solución: El campo con longitud mínima a pintar es un cuadrado de lado 2 y dos semicírculos de radio 1.

35) Aragón. EvAU Extraordinaria 2020. 7) Dada la siguiente función $f(x)=\frac{-x^2}{2}+2\ln(x+1)$

a) *(0,25 puntos)* Calcule el dominio de *f(x)*

b) *(1,75 puntos)* Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Solución: Dominio = $\left(-1,+\infty\right)$ *La función crece en* $\left(-1,1\right)$ *y decrece en* $\left(1,+\infty\right)$.

36) Aragón. EvAU Extraordinaria 2020. 8) *(2 puntos)* Calcule la siguiente integral: $\int x^3e^{x^2}dx$

Solución: $\int x^3e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+K$

37) Aragón. EvAU Ordinaria 2020. 5) Calcule el siguiente límite: $\lim_{x\to 0^+}\left(\left(1+x-senx\right)^{1/x^3}\right)$

Solución: $\sqrt[6]{e}$

38) Aragón. EvAU Ordinaria 2020. 6) Se considera la siguiente función: $f(x)=\frac{x^2}{1-e^{-x}}$.

Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.

Solución: No tiene asíntotas verticales. No hay asíntota horizontal en +∞. Pero $y = 0$ *es asíntota horizontal en –∞. No hay asíntota oblicua.*

39) Aragón. EvAU Ordinaria 2020. 7) Se considera la siguiente función $f(x) = \ln(2x+1)$

a) (*1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) *(0,75 puntos)* Halle la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$.

Solución: a) El dominio es $\left(\frac{-1}{2}, +\infty\right)$. *La función crece en su dominio.* *b)* $y = x - \frac{1}{2} + \ln 2$

40) Aragón. EvAU Ordinaria 2020. 8) Calcule la siguiente integral: $\int\left(\sqrt{x} \cdot \ln^2 x\right)dx$

Solución: $\int\left(\sqrt{x} \cdot \ln^2 x\right)dx = x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2\ln^2 x}{3} - \frac{8\ln x}{9} + \frac{16}{27}\right) + C$

41) Aragón. EvAU Septiembre 2019. Opción A. 3.

a) (*1 punto*) Determine el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)} - \frac{1}{x}\right)$$

b) (*1 punto*) Determine el valor de la constante k para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1}, & si \quad x \neq 1 \\ k - x, & si \quad x = 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$.

c) (*2 puntos*) La curva $y = x^2 + 1$ divide al rectángulo limitado por los vértices A:(0,1), B:(2,1), C:(0,5) y D:(2,5) en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

Solución: a) ½ b) k = 5 c) 16/3 y 8/3.

42) Aragón. EvAU Septiembre 2019. Opción B. 3.

a) (*1 punto*) Considere la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2 + 2}$$

Determine el valor de k para que la función *f(x)* tenga como asíntota oblicua, cuando $x \to +\infty$, la recta $y = 2x - 1$.

b) (*1,5 puntos*) Determine

$$\int x\left(\ln(x)\right)^2 dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$

Solución: a) k = –1 b) $\int x\left(\ln(x)\right)^2 dx = \left(\ln(x)\right)^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + K$ *c) x = 1 mínimo, x = 2 punto de inflexión.*

43) Aragón. EvAU Junio 2019. Opción A. 3.

a) (*1,5 puntos*) Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0,0), (a,0),(0,b) y (a,b), donde a>0 y b >0 y además el punto (a,b), está situado en la curva de ecuación:

$$y=\frac{1}{x^2}+9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) (*1 punto*) Determine:

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$$

Solución: a) El rectángulo tiene vértices $(0,0),\left(\frac{1}{3},0\right),(0,18)$ *y* $\left(\frac{1}{3},18\right)$. *El área mínima es* $A\left(\frac{1}{3}\right)=6\,u^2$

b) $\int x\left(\ln\left(x\right)\right)^2 dx=-\frac{1}{6}\ln\left(3-x\right)+\frac{1}{6}\ln(3+x)+C$ *c) 2*

44) Aragón. EvAU Junio 2019. Opción B. 3. Considere la función:

$$f(x)=\frac{x-1}{\left(x+1\right)^2}$$

a) (*1,5 puntos*) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) (*1 punto*) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) (*1,5 puntos*) Determine la integral $\int_1^3 f(x)dx$.

Solución: a) x = –1; y = 0 b) La función decrece en $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(3,+\infty\right)$ *y crece en* $\left(-1,3\right)$.

c) $\ln 2-\frac{1}{2}=0{,}1931$

45) Aragón. EvAU Septiembre 2018. Opción A. 3. ***(4 puntos)***

a) *(2,5 puntos)* Considere la función: $f\left(x\right)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$

a.1) *(1 punto)* Determine las asíntotas de la función *f(x).*

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los mínimos y máximos relativos de la función *f(x).*

b) (1,5 puntos) Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{9}{x^2+x-2}\,dx$$

Solución: a.1) Asíntota vertical: x = 1. Asíntota horizontal: No tiene. Asíntota oblicua: y = x – 2.
a.2) La función crece en $\left(-\infty,0\right)\cup\left(2+\infty\right)$ *y decrece en* $\left(0,1\right)\cup\left(1,2\right)$. *Máximo relativo en x = 0. Mínimo relativo en x = 2.* *b)* $\int \frac{9}{x^2+x-2}dx=3\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+K$

46) Aragón. EvAU Septiembre 2018. Opción B. 3. *(4 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Calcule el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$$

b) *(1,5 puntos)* De entre todos los triángulos rectángulos que tiene un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) (1 punto) Calcule el área limitada por la curva $f(x)=x^2+x$ y la recta $g(x)=x+4$

Solución: a) e^2 b) La medida de la hipotenusa es 2 cm y los catetos miden $\sqrt{2}\ cm$. c) Área = 32/3 u^2.

47) Aragón. EvAU Junio 2018. A.3. Considere la función:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

a. Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

b. Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

c. Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=2$.

d. Calcule $\int\frac{x^2-3x+3}{x-1}dx$

Solución: a. Dom=R Asíntotas: y=1; y=–1 b. Máximo relativo en $\left(1,\sqrt{2}\right)$ c. $\sqrt{5}x+25y-17\sqrt{5}=0$

d. $\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x-1|+C$

48) Aragón. EvAU Junio 2018. B.3.

a) Determine los valores de los parámetros a, b y c para que la función:

$f(x)=a(x-1)^3+bx+c$

a.1. Pase por el punto (1, 1).

a.2. En el punto (1, 1) su tangente tenga de pendiente 2.

a.3. En el punto $x = 2$ tenga un máximo relativo.

b) Determine el valor del límite: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$

Solución: a) $a=\frac{-2}{3}; b=2; c=-1$ b) e^{-3}

49) Aragón. EvAU Septiembre 2017. Opción A. 3. *(4 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x)}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función.

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, sus asíntotas.

c) *(2 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función $f(x)$ así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

Solución: a) Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{-1\}$ b) x = –1 es asíntota vertical, no tiene asíntota horizontal y la asíntota oblicua es y = x – 1. c) La función es creciente en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y y decreciente en $(-2,-1)\cup(-1,0)$. El máximo relativo tiene coordenadas (–2, –4) y el mínimo relativo es (0, 0).

50) Aragón. EvAU Septiembre 2017. Opción B. 3. *(4 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine los valores de *"a"* y *"b"* para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 1/e^x & si\ \ x\le 0 \\ a\cos(x)+b & si\ \ 0<x\le\pi \\ sen(x)-ax & si\ \ \pi<x \end{cases}$$

b) *(1,5 puntos)* Calcule la integral:

$$\int x^2(\ln x)^2\,dx$$

c) *(1,5 puntos)* Determine el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}$$

Solución: a) $a=\frac{1}{2-\pi},\ b=\frac{1-\pi}{2-\pi}$ *b)* $\int x^2(\ln x)^2\,dx=\frac{1}{3}x^3(\ln x)^2-\frac{2}{9}x^3\ln x+\frac{2}{27}x^3+K$ *c) 1*

51) Aragón. EvAU Junio 2017. A. 3. *(4 puntos)*

a) *(3 puntos)* Considere la función de variable real *x* siguiente:

$$f(x)=x\left(\ln(x)\right)^2$$

a.1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función *f(x)*.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función *f(x)* en cada uno de ellos.

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante *k* para que se verifique que:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}=\frac{5}{3}$$

Solución: a.1) $(0,+\infty)$ *a.2) Crece en* $(0,e^{-2})\cup(1,+\infty)$ *y decrece en* $(e^{-2},1)$ *a.3) máximo en x =* e^{-2} *y mínimo en x = 1.* $f(e^{-2})=4e^{-2}$ *.* $f(1)=0$ *b) k = 4/3*

52) Aragón. EvAU Junio 2017. B. 3. *(4 puntos)*

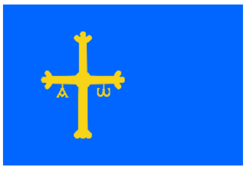
a) *(2 puntos)* Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.

b) *(2 puntos)* Determine:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Solución: a) 6 y 4 b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1$

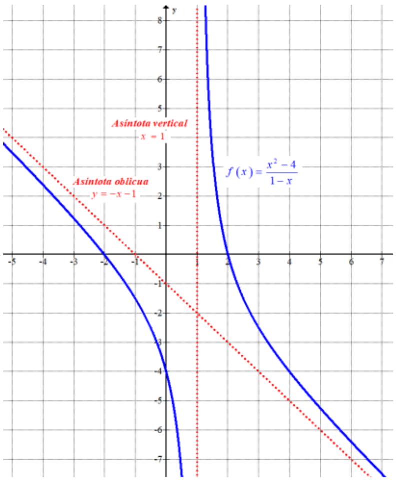
Asturias



1) Asturias. EBAU Extraordinaria 2024. Pregunta 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{1-x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función *f* y sus asíntotas.
(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de *f*.

Solución: a) Dominio f(x) = $\mathbb{R}-\{1\}$. $x=1$ *es asíntota vertical. No existe asíntota horizontal. La recta* $y=-x-1$ *es asíntota oblicua. b) La función decrece en todo su dominio. No presenta máximos ni mínimos locales. No existen puntos de inflexión. c)*



2) Asturias. EBAU Extraordinaria 2024. Pregunta 4. (2.5 puntos) Dada la función $f(x)=sen(\pi-2x)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$.

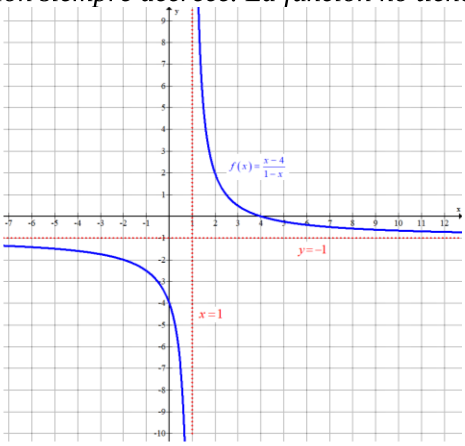
(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por *f*, el eje X y las rectas $x=-\dfrac{\pi}{4}$ y $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Solución: a) $F(x)=\dfrac{1}{2}\cos(\pi-2x)+\dfrac{1}{2}$. *b)* $Área=1\,u^2$

3) Asturias. EBAU Ordinaria 2024. Pregunta 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x-4}{1-x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función *f* y sus asíntotas.
(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de *f*.

Solución: (a) Dominio f(x) = $\mathbb{R}-\{1\}$. $x=1$ *es asíntota vertical.* $y=-1$ *es asíntota horizontal. No existe asíntota oblicua. (b) La función siempre decrece. La función no tiene máximos ni mínimos locales. No tiene puntos de inflexión. (b)*

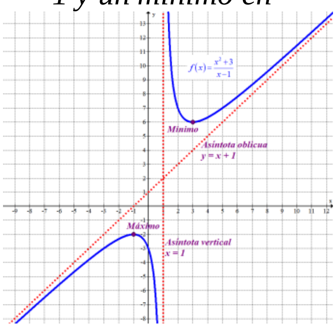


4) Asturias. EBAU Ordinaria 2024. Pregunta 4. Dada la función $f(x)=sen\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$. (a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto (0, 1). (b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por *f*, el eje X y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

Solución: (a) $F(x)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+1$ *(b) 1 unidad cuadrada.*

5) Asturias. EBAU Extraordinaria 2023. Problema 3. Sean $A,B\in\mathbb{R}$ y $f(x)=\frac{x^2+A}{Bx-1}$. Se pide: (a) **(0.75 puntos)** Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto (0,–3) y tenga un extremo relativo en *x = –1*. (b) **(1.25 puntos)** Para los valores de A = 3 y B = 1, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos. (c) **(0.5 puntos)** Para los valores A = 3 y B = 1, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

Solución: a) A = 3 y B = 1. b) La función presenta un máximo en x = –1 y un mínimo en $x=3$. $x=1$ *es asíntota vertical.* $y=x+1$ *es asíntota oblicua.* c)



6) Asturias. EBAU Extraordinaria 2023. Problema 4. (2.5 puntos) Se considera la función $f(x)=xe^{2x^2}$. Se pide: (a) **(1.5 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (0,–1). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$) (b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas x = 0 y x = 1.

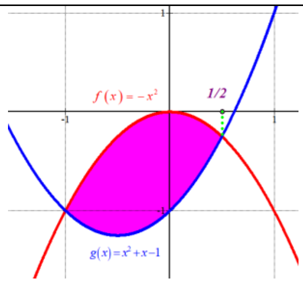
Solución: a) $F(x)=\frac{1}{4}e^{2x^2}-\frac{5}{4}$. b) $\acute{A}rea=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\simeq 1.597\ u^2$

7) Asturias. EBAU Ordinaria 2023. Problema 3. Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^2+x-1$ se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones

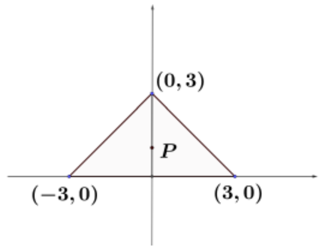
(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área de dicho recinto.

Solución: a) x = –1, x = 1/2.



b) El área del recinto es 1.125 unidades cuadradas.

8) Asturias. EBAU Ordinaria 2023. Problema 4. Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.



Solución: $P\left(0,\sqrt{3}\right)$

9) Asturias. EBAU Extraordinaria 2022. Bloque 2.A. Considera la función $f(x)=\frac{2x^2}{1-x}$.

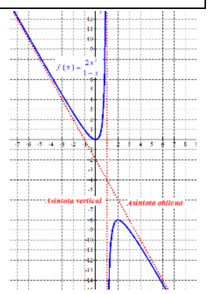
(a) **(0.75 puntos)** Calcula el dominio de f y sus asíntotas.

(b) **(1.25 puntos)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución: a) Dom f(x) = $\mathbb{R}-\{1\}$. *x = 1 es asíntota vertical. La asíntota oblicua es* $y=-2x-2$.

b) La función decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ *y crece en* $(0,1)\cup(1,2)$. *Las coordenadas del mínimo relativo son (0, 0) y del máximo relativo son (2, –8). La función no tiene puntos de inflexión. c)*



10) Asturias. EBAU Extraordinaria 2022. Bloque 2.B. Dada la función $f(x)=-sen(2x)+1$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el origen de coordenadas.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas x = 0 y x = π.

Solución: a) $F(x)=\frac{\cos(2x)}{2}+x-\frac{1}{2}$ *b) π u².*

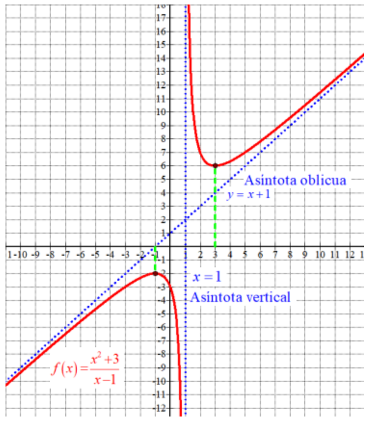
11) Asturias. EBAU Ordinaria 2022. Bloque 2.A. Se considera la función:.

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}.$$

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.

(b) **(1 punto)** Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.
(c) **(0.5 puntos)** A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución: a) $Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$. $x = 1$ *es asíntota vertical.* $y = x + 1$ *es asíntota oblicua.*
b) La función crece en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ *y decrece en* $(-1, 1) \cup (1, 3)$.
La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 1)$ *y convexa (∪) en* $(1, +\infty)$ *c)*

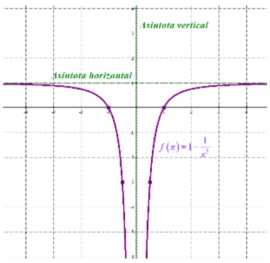


12) Asturias. EBAU Ordinaria 2022. Bloque 2.B. Se considera la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.
(a) **(1.75 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (−1, 0). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 1 - x^2$)
(b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución: a) $F(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$ *b) 1/3*

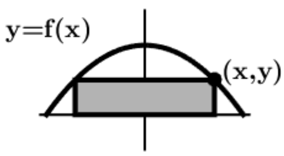
13) Asturias. EBAU Extraordinaria 2021. Bloque 2.A. Sea la función $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
a) Haz un esbozo de su gráfica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad. (1.5 puntos)
b) Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$; la recta y = 1 y el eje de ordenadas. (1 punto)

Solución: a) $Dominio\, f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$ *La recta x = 0 es asíntota vertical. La recta* $y = 1$ *es asíntota horizontal. No tiene asíntota oblicua. La función decrece en* $(-\infty, 0)$ *y crece en* $(0, +\infty)$. *No presenta máximos ni mínimos relativos. La función es cóncava en todo su dominio.*



b) El área es de 2.25 u³.

14) Asturias. EBAU Extraordinaria 2021. Bloque 2. B. En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) = 12 - \frac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos *(x, y)* que hacen máxima el área de la pantalla. (2.5 puntos)



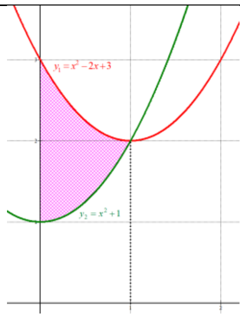
Solución: El punto buscado es $\left(\sqrt{12},8\right)$

15) Asturias. EBAU Ordinaria 2021. Bloque 2.A. Sean las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$.

a) Calcula los valores de *a* y *b* para que en el punto de abscisa *x = 2* las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente. (1 punto)

b) Para *a = 1*, *b = 1* esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje *Y* y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo. (1.5 puntos)

Solución: a) Los valores buscados son $a = \frac{1}{2}$ *y* $b = 1$. $y = 2x - 1$ *b)*



$\acute{A}rea = 1u^2$

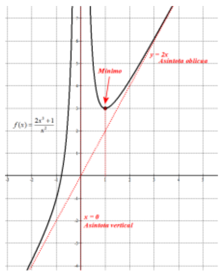
16) Asturias. EBAU Ordinaria 2021. Bloque 2.B. Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo. (2.5 puntos)

Solución: El producto se maximiza cuando los tres números son iguales a 30.

17) Asturias. EBAU Extraordinaria 2020. Bloque 2.A. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.

a) Estudia y calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1.25 puntos)
b) Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0.75 puntos)
c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

Solución: a) el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$. $x = 0$ *es asíntota vertical. No tiene asíntota horizontal.* $y = 2x$ *es la asíntota oblicua.*
b) La función crece en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ *y decrece en* $(0,1)$
El punto mínimo tiene coordenadas $(1,3)$. *c)*



18) Asturias. EBAU Extraordinaria 2020. Bloque 2.B. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x) - xe^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2}$ (1.25 puntos)

b) Una primitiva de la función $f(x) = x\cos(x) - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto (0, 3). (1.25 puntos)

Solución: a) $-\frac{1}{2}$ *b)* $F(x) = xsenx + \cos x + e^{-x} + 1$

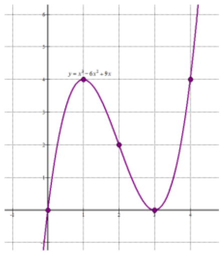
19) Asturias. EBAU Ordinaria 2020. Bloque 2.A. Sea la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión. (1 punto)
b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función. (1 punto)
c) Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$ (0.5 puntos)

Solución: a) Los puntos de corte son P(3,0) y Q(0,0). En $x=1$ *hay un punto máximo relativo, en* $x=2$ *hay un punto de inflexión y en* $x=3$ *hay un mínimo relativo.*

b) La función crece en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ *y decrece en* $(1,3)$*.La función es cóncava (∩) en* $(-\infty,2)$ *y convexa (∪) en* $(2,+\infty)$.

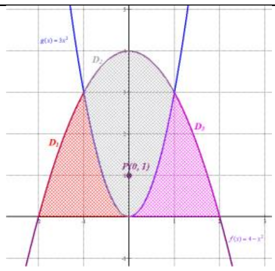
c) $y=-3x+8$



20) Asturias. EBAU Ordinaria 2020. Bloque 2.B. Sea la función $f(x)=4-x^2$

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área. (1 punto)
b) La gráfica de la función $g(x)=3x^2$ divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos. (0.75 puntos)
c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene el punto $P(0,1)$. (0.75 puntos)

Solución: a) $Área=10,66\,u^2$ *b)*

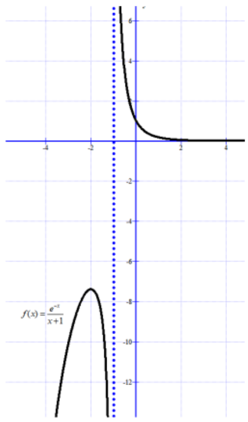


c) $Área\ D_2=5,33\,u^2$.

21) Asturias. EBAU Julio 2019. Opción A. 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

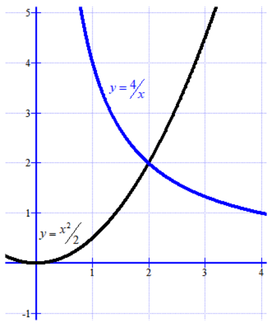
Solución: a) El dominio es $\mathbb{R}-\{-1\}$ *. Las asíntotas son: x = –1; y = 0; No hay asíntotas oblicuas. b) La función crece en* $(-\infty,-2)$ *y decrece en* $(-2,+\infty)$*. Por lo que tiene un máximo en x = –2.*



22) Asturias. EBAU Julio 2019. Opción B. 2. Dadas las curvas $y={x^2}/{2}$; $y={4}/{x}$.

a) Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)
b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo [1, 3]. (1 punto)
c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo [1, 3]. (1 punto)

Solución: a) P(2,2) b)



c) $Área = 2-4\ln 3+8\ln 2 = 3{,}1507\ u^2$

23) Asturias. EBAU Junio 2019. Opción A. 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{2}{2+e^x}$:

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1 punto)

b) Mediante el cambio de variable $t=e^x$; calcula $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}dx$ (1.5 puntos)

Solución: a) El dominio es $\mathbb{R}$ *. y = 0 e y = 1 b)* $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}dx = \ln\left(\frac{e^x}{2+e^x}\right)+K$

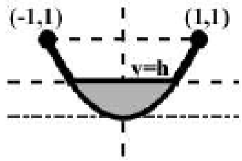
24) Asturias. EBAU Junio 2019. Opción B. 2. Dada la curva $y=\dfrac{1}{3+x^2}$.

a) Expresa la función m(x) que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x.
b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente.

Solución: a) $m(x)=f\,'(x)=\dfrac{-2x}{\left(3+x^2\right)^2}$ *b) En x = –1 hay un máximo.*

25) Asturias. EBAU Julio 2018. A.2. Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y de altura 1 m. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y=x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.

a. Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en función de *h* se puede expresar como $S(h)=\dfrac{4h\sqrt{h}}{3}$.

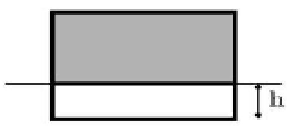


b. Determina la altura *h* donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero

(*Nota: Volumen = S x longitud*)

Solución: a. $S(h)=\displaystyle\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\left(h-x^2\right)dx=\frac{4h\sqrt{h}}{3}\ m^2$ *b.* $h=\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\ m$

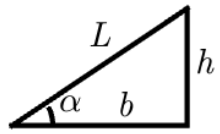
26) Asturias. EBAU Julio 2018. B.2. Se tienen 20 m de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura H que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible.



Solución: 5,83 metros de altura y 4,1667 m de anchura.

27) Asturias. EBAU Junio 2018. Opción A. 2. Se quiere construir una rampa (ver gráfica) para camiones con una pendiente *m = tan(α) > 0* y que salve una altura h = 20 metros.

a) Calcula, en función de *m*, el valor de *b* y comprueba que la longitud de la rampa L se puede expresar como $L(m)=20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$ (0.5 puntos)



b) El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente *m* y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v(m)=\frac{1}{\sqrt{m}}$. Demuestra que el tiempo *t*, en segundos, que tarda un camión en recorrer la rampa se puede expresar como $t(m)=20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$ (0.5 puntos)

c) Calcula la pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión. (1.5 puntos)
(Se recuerda que tan = tangente y velocidad = espacio / tiempo).

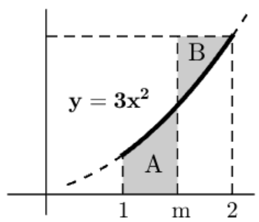
Solución: a) $b(m)=\frac{20}{m}$ *b)* www.ebaumatematicas.com *c) m = 1.*

28) Asturias. EBAU Junio 2018. Opción B. 2. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0.75 puntos)
b) Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0.75 puntos)
c) Calcula una primitiva de la función *f(x)*. (1 punto)

Solución: a) $Dom\ f(x)=\mathbb{R}-\{-3,2\}$ *x = 2, x = –3 son asíntotas verticales, y = 0 es asíntota horizontal y no tiene asíntotas oblicuas. b) x = –1/2 es mínimo relativo y no tiene puntos de inflexión.*
c) $F(x)=\int f(x)dx=\ln\left(\left|\frac{x-2}{x+3}\right|^{1/5}\right)+C$

29) Asturias. EBAU Julio 2017. Opción A. 2. Sea la gráfica de la parábola $y=3x^2$ en el intervalo [1; 2] y *m* un valor de dicho intervalo.
a) Halla, en función de *m*, el área de cada una de las partes sombreadas A y B. (1.5 puntos)
b) ¿Cuál es el valor de *m* que hace mínima la suma de esas áreas? (1 punto)

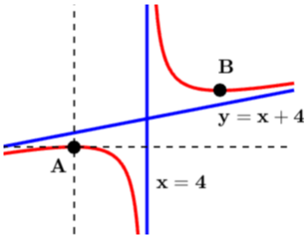


Solución: a) Área A = (m^3-1) *Área B =* $(m^3-12m+16)$ *b)* $m=\sqrt{2}$

30) Asturias. EBAU Julio 2017. Opción B. 2. Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{x-4}$

a) Estudia su dominio de definicón y calcula sus asíntotas. (1 punto)
b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. (1 punto)
c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

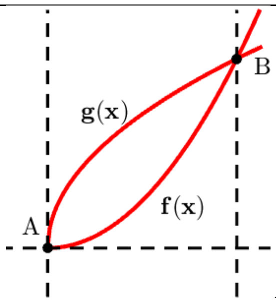
Solución: a) $Dom\ f(x)=\mathbb{R}-\{4\}$. *Asíntota vertical es x = 4. No tiene asíntotas horizontales. y = x + 4 es la asíntota oblicua. b) Crece en* $(-\infty,0)\cup(8,+\infty)$ *y decrece en* $(0,4)\cup(4,8)$*.En x = 0 hay un máximo y en x = 8 hay un mínimo. La función es cóncava en* $(-\infty,4)$ *y convexa en* $(4,+\infty)$*. No tiene punto de inflexión.*

c) 

31) Asturias. EBAU Junio 2017. Opción A. 2. Sean las funciones $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x^2/4$ y $g(x)=2\sqrt{x}$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. (1 punto)

b) Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área. (1.5 puntos)

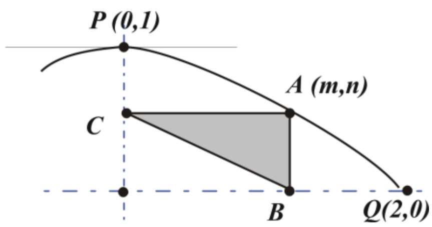


Solución: a) A(0, 0) y B(4, 4) b) Área = 16/3 u^2.

32) Asturias. EBAU Junio 2017. Opción B. 2. Se considera el arco comprendido entre los puntos P(0, 1) y Q(2, 0) de la gráfica de la función $y=a+bx+cx^2$ con tangente en el punto P paralela al eje OX.

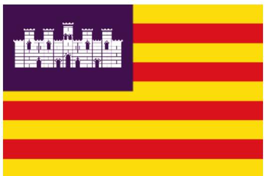
a) Calcula los valores de *a*, *b* y *c*. (1 punto)

b) Con *a* = *1*, *b* = *0* y *c* = *–1/4* y siendo *A(m, n)* un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores de *m* y *n* para que el área del triángulo rectángulo ABC sea máxima. (1.5 puntos)



Solución: a) a = 1; b = 0; c = –1/4 b) $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $n=\frac{2}{3}$

Baleares



1) Balears. PBAU Extraordinaria 2024. P5.– Resuelve los siguientes apartados:
(a)**[5 puntos]** Dada la función $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determina los valores de *a* y *b* sabiendo que *f(x)* tiene su máximo en *x = 100* y que pasa por el punto (49, 91).
(b)**[5 puntos]** Dada la función

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Indica cuál es su dominio. ¿Es *g(x)* una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

Solución: (a) a = –1 y b = 20. (b) El dominio de la función es $[0,1)\cup(1,+\infty)$. *La función presenta una discontinuidad evitable en x = 1.*

2) Balears. PBAU Extraordinaria 2024. P6.– [10 puntos] Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ y sus puntos de corte.

Solución: El área tiene un valor de $\frac{64}{3} \simeq 21.33$ *unidades cuadradas*

3) Balears. PBAU Ordinaria 2024. P5.– (10 puntos) Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m. 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

Solución: Las dimensiones del campo con área máxima y cumpliendo lo pedido en el problema tiene aproximadamente 21.74 metros de ancho y 27.77 de largo.

4) Balears. PBAU Ordinaria 2024. P6.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1 & x \le 0 \\ ax^2 + b(x+3) & 0 < x \le 1 \\ a\cos(\pi x) + 7bx & x > 1 \end{cases}$$

(a)**[5 puntos]** Calcula los valores *a* y *b* para que la función *f(x)* es continua.
(b)**[5 puntos]** Sea *a = 3* y *b = 2*, calcula el área comprendida entre $x = -1$, $x = 0$ y el eje OX.

Solución: (a) a = 3 y b = 2. (b) Área = $6 - \frac{2}{e} \simeq 5.26$ *unidades cuadradas.*

5) Balears. PBAU Extraordinaria 2023. P5.– La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ siendo $x \ge 0$ el tiempo en meses y *f(x)* el número de insectos en millones.

(a) **[4 puntos]** ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.
(b) **[4 puntos]** ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En que instante de tiempo se consigue este valor?
(c) **[2 puntos]** ¿Hay algún momento en el que la población supere los 2 millones de insectos? Justifica la respuesta.

Solución: (a) Inicialmente hay 1 millón de insectos y con el paso del tiempo acaban despareciendo todos los insectos. (b) El máximo número de insectos es de 1.213.061 insectos y se produce a mitad del primer mes. (c) La población de insectos no supera en ningún momento los 2 millones, pues el máximo absoluto es de 1.2 millones.

6) Balears. PBAU Extraordinaria 2023. P6.– [10 puntos] Calcula la integral de la función $f(x)=\dfrac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}$.

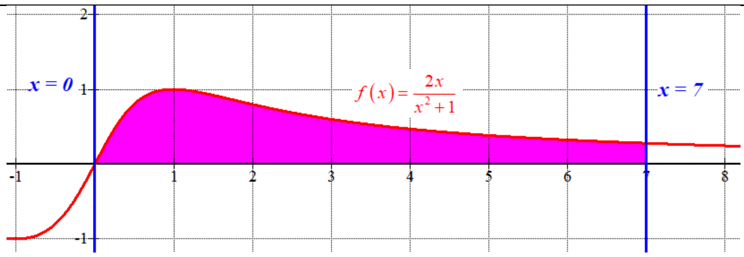
Solución: $\int f(x)dx=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+3x-\ln|x-1|-2\ln|x+2|+K$

7) Balears. PBAU Ordinaria 2023. P5.– La cantidad de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x)=e^{-x}+0.15x+1$ siendo $x\geq 0$ los días de infección y *f(x)* las toneladas de agua infectada.
(a) **[4 puntos]** ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.
(b) **[4 puntos]** ¿Em qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?
(c) **[2 puntos]** ¿Hay algún momento en el que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.

Solución: (a) Inicialmente hay infectadas 2 toneladas de agua. Con el paso del tiempo acaba infectándose toda el agua. (b) A los 1.9 días y hay, aproximadamente, 1.43 toneladas de agua infectada. (c) No, en ningún momento.

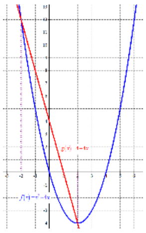
8) Balears. PBAU Ordinaria 2023. P6.– [10 puntos] Representa la región comprendida entre la curva $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, el eje de abscisas (eje OX) y las rectas *x = 0* y *x = 7*. Calcula su área.

Solución:



$Área=\ln 50\simeq 3.91$ unidades^2.

9) Balears. PBAU Extraordinaria 2022. 3. Dadas las funciones $f(x)=x^2-4x$ y $g(x)=4-4x$.
(a) Represéntelas gráficamente en un mismo sistema de coordenadas. (5 puntos)
(b) Calcule los puntos de corte de ambas gráficas. (2 puntos)
(c) Calcule el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones. (3 puntos)

Solución: (a)  *(b)* $(-2,12)$ *y* $(2,-4)$ *(c) 32/3 u²*

10) Balears. PBAU Extraordinaria 2022. 4. Sea la función $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$.

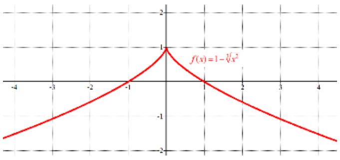
(a) Halle el dominio y los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes. (2 puntos)

(b) Calcule la derivada de la función y obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

(c) Comprueba que $f(-1)=f(1)$ y que *f ´(x)* no es nunca cero en el intervalo $[-1,1]$. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle? (3 puntos)

(d) Esboce la gráfica de la función *y = f(x)*. (3 puntos)

Solución: (a) Dominio = $\mathbb{R}$ *. A(0, 1), B(1, 0) y C(–1, 0)* *(b)* $f'(x)=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$ *. La función crece en* $(-\infty,0)$ *y decrece en* $(0,+\infty)$*. (c) No existe contradicción porque la función no es derivable en (–1, 1).*

(d) 

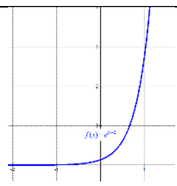
11) Balears. PBAU Ordinaria 2022. 3. Considere la función $f(x)=e^{3x-2}$.

(a) Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función *y = f(x)* tiene pendiente igual a 3/e. Halle la ecuación de esta recta tangente. (4 puntos)

(b) Calcule el $\lim\limits_{x\to 2/3}\dfrac{1-f(x)}{6x-4}$. (2 puntos)

(c) Esboce la gráfica de la función *y = f(x)*. (2 puntos)

(d) Calcule el área de la superficie acotada por la gráfica de la función *y = f(x)* y las rectas *x = 0* e *y = 1*. (2 puntos)

Solución: (a) x = 1/3. $y=\dfrac{3}{e}x$ *(b) –1/2* *(c)*  *(d)* $\dfrac{1}{3}+\dfrac{e^{-2}}{3}\simeq 0.378u^2$

12) Balears. PBAU Ordinaria 2022. 4. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+a}{2x-4} & si \quad x\le 0\\ 10x^2+x+b & si \quad x>0\end{cases}$$

(a) Halle la condición que han de cumplir los parámetros *a* y *b* para que la función *y = f(x)* sea continua. (3 puntos)

(b) Calcule *f ´(x)*. (4 puntos)

(c) Halle la condición que han de cumplir los parámetros *a* y *b* para que la función *y = f(x)* sea derivable. (3 puntos)

Solución: (a) $a=-4b$ *(b)* $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2} & si \;\; x<0\\ 20x+1 & si \;\; x>0\end{cases}$ *(c) Los valores buscados son a = –8 y b = 2.*

13) Balears. PBAU Extraordinaria 2021. 3. Considera la funció $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida per

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{2x} & si \;\; x\neq 0\\ b & si \;\; x=0\end{cases}.$$

(a) Estudia la continuïtat de la funció als punts $x_0\neq 0$. (3 punts)

(b) Calcula la relació que hi ha d'haver entre *a* i *b* perqué *f* sigui una funció contínua al punt $x_0=0$. (5 punts)

(c) Si per als valors de *a = 2* i *b = 1*, *f* és una funció derivable al punt x = 0, calcula $f'(0)$. (2 punts)

Solución: (a) La función es continua para $x\neq 0$. *b) a = 2b c) f ´(0) = 1*

14) Balears. PBAU Extraordinaria 2021. 4. El nombre d'individus d'una població en un determinat instant de temps, *t*, expressat en milions d'individus, ve donat per la funció

$$P(t)=\frac{15+t^2}{(t+1)^2}$$

on la variable real $t\geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000.

(a) Calcula la població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000. (2 punts)

(b) Prova que el nombre d'individus de la població assoleix un mínim. Quin any s'assoleix aquest mínim? Quants d'individus hi haurá l'any del mínim? (4 punts)

(c) Calcula la grandária de la població, això és el nombre d'individus, que hi haurá a llarg termini. (4 punts)

Solución: (a) Había una población de 15 millones de personas (b) A los 15 años hay un mínimo de población siendo esta de 937500 habitantes (c) La población tiende a ser 1 millón de personas.

15) Balears. PBAU Ordinaria 2021. 3. Considera la funció

$$f(x)=\frac{1}{x^4}.$$

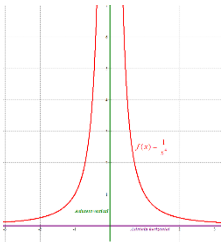
(a) Representa-la gráficament. (7 punts)

(b) Comprova que *f(2) = f(–2)*. (1 punt)

(c) Comprova que no existeix $c\in[-2,2]$ tal que *f ´(c) = 0*. (1 punt)

(d) Hi ha una contradiccióo amb la conclusió del teorema de Rolle? (1 punt)

Solución: (a) Su dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$. *Asíntota vertical: x = 0. La asíntota horizontal es* $y=0$



(b) $f(2)=f(-2)=0.0625$ *(c) En la gráfica de la función se aprecia que es*

creciente ($f\,'(x)>0$) en (–2, 0) y decreciente ($f\,'(x)<0$) en (0, 2). (d) nuestra función $f(x)=\frac{1}{x^4}$ no es continua en [–2,2], pues es discontinua en x = 0, ni es derivable en (–2, 2), pues no es derivable en x = 0. Por lo que no podemos aplicarle el teorema de Rolle y no existe ninguna contradicción.

16) Balears. PBAU Ordinaria 2021. 4. Donada la funció

$$f(x)=\frac{-x}{4-x^2}$$

(a) Calcula una primitiva de f(x). (5 punts)

(b) Calcula l'área delimitada per la gráfica de *f(x)*, les rectes $x=\sqrt{5}$ i $x=\sqrt{6}$, i l'eix X. (5 punts)

Solución: (a) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|$ *(b)* $Área=\frac{\ln 2}{2}\simeq 0.34\,u^2$

17) Balears. PBAU Extraordinaria 2020. OPCIÓ A. 2. Considera la funciò

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

(a) Determina: el domini, els de creixement i decreixement, les coordenades dels máxims i mínims i el $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. (2 punts)

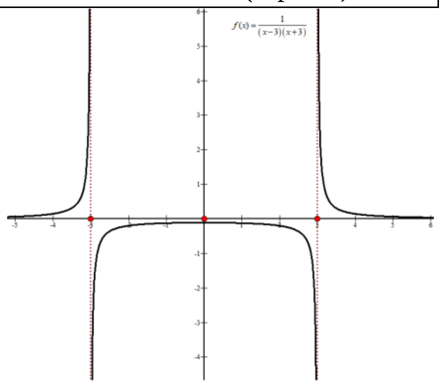
(b) Fes un esbòs de la gràfica. (1 punt)

(c) Obté els valors de A i B per als quals (3 punts)

$$f(x)=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$$

(d) Calcula l'área de la regió limitada per la gráfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x=-2$ i $x=2$. (4 punts)

Solución: (a) Dominio = $\mathbb{R}-\{-3,3\}$*. La función crece en* $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$ *y decrece en* $(0,3)\cup(3,+\infty)$*. Presenta un máximo relativo en el punto* $M\left(0,-\frac{1}{9}\right)$ *. No presenta mínimos relativos.* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$*. (b)*



(c) A=–1/6. B=1/6. (d) $Área=\frac{1}{3}\ln 5=0.36\,u^2$

18) Balears. PBAU Extraordinaria 2020. OPCIÓ B. 2. En un aquari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons la funció $t\to P(t)$,

$$P(t)=\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\ ,$$

on la variable *t*, que és un nombre real major o igual que zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000 i *P(t)* indica nombre d'individus, en milers, en l'instant de temps *t*. Segons el model, calcula:

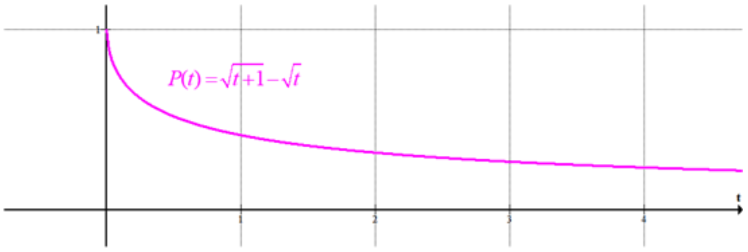
(a) La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurá a la fi de l'any 2020. (1 punt)

(b) La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini. (3 punts)

(c) L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurá. (4 punts)

(d) Fes un esbós de la gráfica de l'evolució poblacional *t* → *P(t)*. (2 punts)

Solución: (a) 1000 peces al inicio del año 2000 y 110 peces a final del año 2020 (b) La población de peces tiende a ser cero (c) La población va decreciendo hasta ser 0 peces. No tiene mínimos.

(d) 

19) Balears. PBAU Ordinaria 2020. OPCIÓ A. 2. Considera la funciò $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ donada per

$$y=f(x)=x^3-3x$$

(a) Calcula l'equaciò de la recta tangent a la gràfica de la funciò al punt d'abscissa $x=-1$. (2 punts)

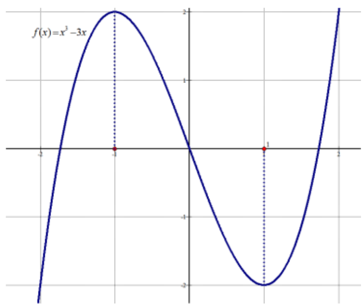
(b) Fes un esbòs de la gràfica de *y = f(x)* i calcula: els punts de tall amb els eixos, els extrems relatius i el comportament de la funciò a l'infinit. (4 punts)

(c) Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funciò donada i la recta y = 2. (4 punts)

Solución: (a) $y=2$. *(b) Los puntos de corte con los ejes son O(0, 0),* $P\left(-\sqrt{3},0\right)$ *y* $Q\left(\sqrt{3},0\right)$. *La función presenta un máximo en* $x=-1$ *y un mínimo en* $x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x=-\infty$

(c) $Área=6.75\,u^2$



20) Balears. PBAU Ordinaria 2020. OPCIÓ B. 2. Considera la funciò $f(x)=\dfrac{3}{x^2-x}$.

(a) Calcula el seu domini i els intervals de creixement i decreixement. (3 punts)

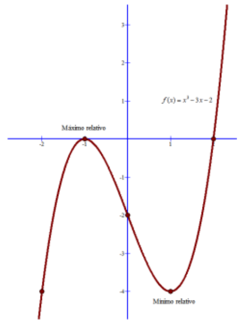
(b) Calcula una primitiva qualsevol de *f(x)*. (4 punts)

(c) Calcula l'àrea delimitada per la gràfica de la funciò *y = f(x)*, l'eix *OX* i les rectes $x=2$ i $x=3$ (3 punts)

Solución: (a) $Dominio=\mathbb{R}-\{0,1\}$. *La función crece en* $(-\infty,0)\cup(0,0.5)$ *y decrece en* $(0.5,1)\cup(1,+\infty)$. *(b)* $F(x)=-3\ln|x|+3\ln|x-1|+C$ *(c)* $Área=6\ln 2-3\ln 3=0.86\,u^2$

21) Balears. PBAU Julio 2019. OPCIÓ B. 2. Calculau els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)=x^3-3x-2$ (3 punts), els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i feu un esbós de la seva gràfica per x entre –3 i 3. (4 punts)

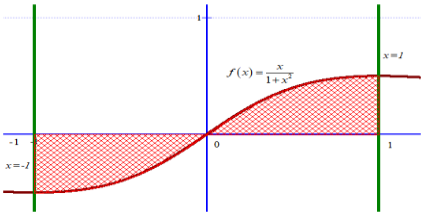
Solució. La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ *y decrece en* $(-1,1)$. *Presenta un máximo*



relativo en x = –1 y un mínimo relativo en x = 1.

22) Balears. PBAU Julio 2019. OPCIÓ A. 2. Considerem la regió delimitada per la funció $f\left(x\right)=\dfrac{x}{1+x^2}$, l'eix d'abscisses o eix OX i les rectes verticals $x=-1$ i $x=1$. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

Solució. $\acute{A}rea=\ln 2=0{,}69\,u^2$

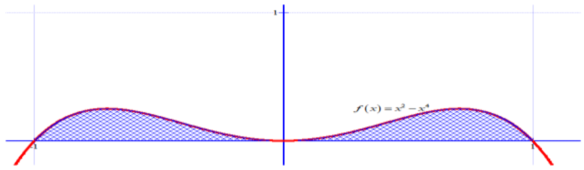


23) Balears. PBAU Junio 2019. OPCIÓ A. 2. Les funcions $f\left(x\right)=x^4+ax^2+bx$ i $g(x)=x-cx^2$ passen pel punt (1, 0): Determinau els coeficients a, b i c perqué tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt i calculau-la. (10 punts)

Solució. El valor de los parámetros es a = –4, b = 3 y c = 1. La recta tangente es $y=-x+1$

24) Balears. PBAU Junio 2019. OPCIÓ B. 2. Considerem la regió delimitada per la funció $f\left(x\right)=x^2-x^4$ i l'eix d'abscisses o eix OX.
Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

Solució. El área es $\dfrac{4}{15}u^2$

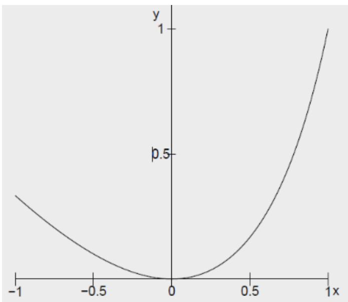


25) Balears. PBAU Julio 2018. A.2. Calculau les dimensions d'una capsa amb les dues tapes de base quadrangular de volum 64 metres cubics de superficie mínima. Comprovau que la solució obtinguda és un mínim.

Solució. Si el lado del cuadrado es a, la altura será $h=\dfrac{64}{a^2}$

26) Balears. PBAU Julio 2018. B.2. Considerem la funció $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2-x}$. Feu un dibuix aproximat de la funció anterior en l'interval [–1, 1]. (6 punts). Calculau l'área limitada per la gráfica de la funció anterior i l'eix de les X. (4 punts)

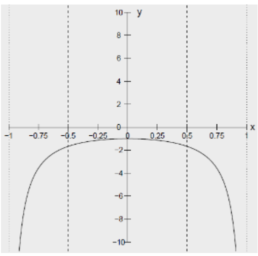
Solució.



Área = 4ln3 – 4 = 0.3944 u^2

27) Balears. PBAU Junio 2018. A. 2. Considerem la funció $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. Feu un dibuix aproximat de la funció anterior en l'interval [–1, 1]. (5 punts). Calculau l'área limitada per la gráfica de la funció anterior, l'eix de les X i les rectes verticals $x=\dfrac{-1}{2}$ i $x=\dfrac{1}{2}$. (5 punts)

Solució.



Área = |1 – 2ln3| = 1.1972 u^2

28) Balears. PBAU Junio 2018. B. 2. Trobau els valors a, b i c per tal que la funció

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+5, & si\ x<2 \\ cx+1, & si\ x\geq 2 \end{cases}$$

verifiqui les hipótesis del teorema de Rolle en l'interval [0, 4] (6 punts). Determinau en quin(s) punt(s) se verifica el que assegura el teorema. (4 punts)

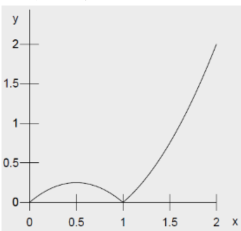
Solució. b = –3 y a = 1. Se cumple el teorema de Rolle en d = 3/2.

29) Balears. PBAU Septiembre 2017. A.2. Entre dues torres de 15 i 25 metres d'alçada, respectivament, hi ha una distáncia de 30 metres. Enmig de les dues torres hi hem de posar una altra torreta de 5 metres d'alçada i hem d'estendre un cable que uneixi els extrems de dalt de la primera torre amb la torreta i els extrems de dalt d'aquesta amb la segona torre. On hem de situar la torreta de 5 metres perqué la longitud total del cable sigui mínima? (7 punts). Qué val la llargada del cable en aquest cas? (3 punts)

Solució. A 10 metros de la torreta de 15 metros. El cable mide $30\sqrt{2}\approx 42.4264$ *metros*

30) Balears. PBAU Septiembre 2017. B.2. Considerem la funció $f(x)=x\cdot|x-1|$. Feu un dibuix aproximat de la funció anterior en l'interval [0, 2]. (6 punts). Calculau l'área limitada per la gráfica de la funció anterior i l'eix de les X. (4 punts)

Solució.



Área = 1 u^2.

31) Balears. PBAU Junio 2017. A. 2. El nombre de litres per metre quadrat que va ploure en un determinat lloc ve donat per la funció següent:

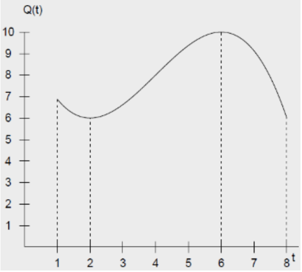
$$Q(t)=-\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10,$$

on t ve donat en dies i va des del dia $t=1$ (dilluns) fins al dia $t=8$ (dilluns de l'altra setmana).

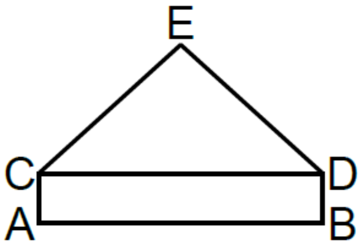
a) Determinau el dia de la setmana que va ploure més i el que va ploure menys. Quants de litres per metre quadrat va ploure aquests dos dies? (6 punts)

b) Feu un petit dibuix de la funció anterior durant els 8 dies. (4 punts)

Solució. a) Els dies que va ploure menys varen ser els dies 2 (dimarts) i 8 (dilluns de l'altra setmana), amb 6 litres per metre quadrat, i el dia que va ploure més va ser el dia 6 (dissabte) amb 10, litres per metre quadrat.

b) 

32) Balears. PBAU Junio 2017. B. 2. Hem de dissenyar una finestra com la que surt a la figura adjunta, o sigui, el polígon ACEDB, de 30 metres de perímetre. Es tracta d'un rectangle amb un triangle equiláter damunt. Calculau les dimensions del rectangle perqué l'área de la finestra sigui máxima. (10 punts)



Solució. $x = \frac{30}{6-\sqrt{3}} \simeq 7.029\ metros; \quad y = \frac{15\left(5-\sqrt{3}\right)}{11} \approx 4.457\ metros$

Canarias

1) Canarias. EBAU Extraordinaria 2024. 1A. Se considera la función:

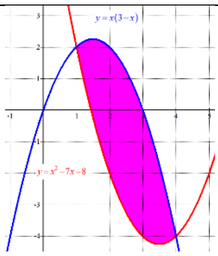
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-bx+9}{x^2+3}, & x\le 0\\[2mm] \dfrac{ax}{e^x-1}+2, & x>0\end{cases}$$

a) Estudiar los valores de los parámetros *a* y *b* para que *f(x)* sea continua y derivable en $x=0$.
1.75 ptos

b) Para los valores *a* = *1* y *b* = *–2*, hallar la ecuación de la recta tangente a la función *f(x)* en $x=-1$ 0.75 ptos

Solución: a) a = 1 y $b=\dfrac{3}{2}$. *b)* $y=x+3$.

2) Canarias. EBAU Extraordinaria 2024. 1B. El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y=x(3-x)$ e $y=x^2-7x+8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €.
2.5 ptos

Solución: 

El área es de 9 metros cuadrados que al precio de 65 € el metro cuadrado nos supone un coste de 65 · 9 = 585 €.

3) Canarias. EBAU Ordinaria 2024. 1A. La empresa 'Plátanos Islas Canarias' se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x)=\frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}},\ x\ge 0$$

donde C(x) son miles de €, *x* miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas.

a) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos. 0.5 ptos

b) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos? 0.5 ptos

c) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista. 0.75 ptos

d) Calcular: $\int_0^4 C(x)\,dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema. 0.75 ptos

Solución: a) El coste de producir 1 kg de plátanos es 0.0006 miles de euros = 0.6 euros. b) El coste de producción de los plátanos tiende a ser 0.6 miles de euros = 600 euros. c) Es falsa la afirmación. El coste siempre aumenta. d) $\int_0^4 C(x)\,dx = \frac{3\sqrt{17}-3}{5} \simeq 1.8738$. *Cuando se producen entre 0 y 4000 kg de plátanos el coste medio es de 468.4 €.*

4) Canarias. EBAU Ordinaria 2024. 1B. Dada la función definida por: $f(x)=\frac{\ln(x+2)+a}{3x+4}$

a) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$ es 10. Dar la expresión de la función. 1.25 ptos

b) Para el valor $a=0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. 1.25 ptos

Solución: a) a = –3. $f(x)=\frac{\ln(x+2)-3}{3x+4}$ *b) El dominio de la función es* $\left(-2,\frac{-4}{3}\right)\cup\left(\frac{-4}{3},+\infty\right)$. $x=\frac{-4}{3}$ *y* $x=-2$ *son asíntotas verticales. La recta* $y=0$ *es asíntota horizontal. No tiene asíntota oblicua.*

5) Canarias. EBAU Extraordinaria 2023. 1A. Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t)=\frac{5t^2}{8+t^2},\ \ t\ge 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

a) Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados. 0.75 ptos

b) Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta. 0.75 ptos

c) ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades? 0.5 ptos

d) Si el producto se vende a 2€ la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienden los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta. 0.5 ptos

Solución: a) Tasa de variación media del primer semestre (del mes 0 al mes 6) es 15/22 = 0.68182. Tasa de variación media del segundo semestre (del mes 6 al mes 12) es 45/418 = 0.10766. Al ser la tasa de variación media positiva en ambos semestres las ventas han aumentado durante los dos semestres. Aunque en el segundo semestre las ventas han aumentado más lentas que en el primero: en el primero a razón de 681 unidades por mes y en el segundo a razón de 107 unidades por mes.

b) *La derivada es positiva para valores t > 0, luego la función crece en todo su dominio.*

c) E*ntre el 5º y el 6º mes. d) Los ingresos con el paso del tiempo tienden a tener un valor de 10000 €*

6) Canarias. EBAU Extraordinaria 2023. 1B. Resolver los siguientes apartados:

a) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\frac{3}{2}$$

1 ptos

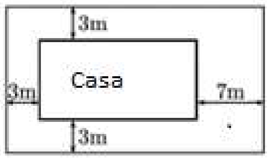
b) Resolver la siguiente integral indefinida: $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$ 1.5 ptos

Solución: a) El valor buscado es $k=-\frac{3}{4}$. *b)* $\int x\sqrt{2x-1}\,dx=\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6}+\frac{\sqrt{(2x-1)^5}}{10}+K$

7) Canarias. EBAU Ordinaria 2023. 1A. Hallar la función polinómica *f(x)* que verifica que tiene un punto mínimo en M(1, 2) y su segunda derivada es: $f''(x)=2x+3$. Dar la expresión de *f(x)*. 2.5 ptos

Solución: La función tiene la expresión $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-4x+\frac{25}{6}$.

8) Canarias. EBAU Ordinaria 2023. 1B. Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m^2 de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



2.5 ptos

Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?

Solución: La zona ajardinada tiene una superficie mínima de 300 m^2 *cuando el solar es un rectángulo de lados 12 y 20 metros.*

9) Canarias. EBAU Extraordinaria 2022. 1A.
Resuelve los siguientes apartados:

a) Considera la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 1.75 ptos

Calcular los coeficientes a, b, c, d, sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$

Dar la expresión de la función $f(x)$

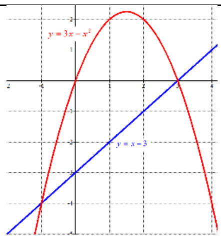
b) Resuelve el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ 0.75 ptos

Solución: a) Los valores buscados son a = 1; b = –3; c = 0 y d = 1. La función tiene la expresión $f(x)=x^3-3x^2+1$. *b) 2*

10) Canarias. EBAU Extraordinaria 2022. 1B.
Considera las siguientes funciones: $y=3x-x^2$; $y=x-3$

a) Representa el recinto que encierra las dos funciones anteriores 1.5 ptos

b) Calcula el área del recinto limitado por las funciones anteriores 1 pto

Solución: a)  *b) Área = 32/3* u^2

11) Canarias. EBAU Ordinaria 2022. 1A. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+bx & si\ x<1\\ a+\ln(x) & si\ x\geq 1\end{cases}$$

a) Estudia los valores de los parámetros a y b para que la función *f(x)* sea continua y derivable en $\mathbb{R}$. Escribe la función resultante $f(x)$ 1.5 ptos

b) Tomando los valores $a=-2$ *y* $b=1$, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=e$
1 pto

Solución: a) a = b = 1 b) $y=\frac{x}{e}-2$

12) Canarias. EBAU Ordinaria 2022. 1B. Realiza el cálculo de las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x+4}{x^2+4}dx$ 1.25 ptos b) $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$ 1.25 ptos

Solución: a) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+2arctg\frac{x}{2}+K$ *b) 1/4*

13) Canarias. EBAU Extraordinaria 2021. 1A. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+a}{2x-4} & x\le 0\\ 10x^2+x+b & x>0\end{cases}$

Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.
Dar las expresiones de la función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$. 2.5 ptos

Solución: a = –8 y b = 2. La función sería $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-8}{2x-4} & x\le 0\\ 10x^2+x+2 & x>0\end{cases}$ *y la derivada*

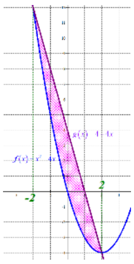
$f'(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-8x+16}{(2x-4)^2} & x\le 0\\ 20x+1 & x>0\end{cases}$

14) Canarias. EBAU Extraordinaria 2021. 1B. Dadas las funciones: $f(x)=x^2-4x$; $g(x)=4-4x$

a) Esbozar el gráfico del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 ptos

b) Determinar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 ptos

Solución:

a) 

b) $Área=\frac{32}{3}\simeq 10.66\,u^2$

15) Canarias. EBAU Ordinaria 2021. 1A. Dada la función $f(x)=\frac{ax^2-2}{b-x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

a) Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican que $f(-2)=2$ y que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}-\{5\}$. Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$. 1.25 ptos

b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a=-1$ y $b=-3$ 1.25 ptos

Solución: a) a = 4 y b = 5. $f(x)=\frac{4x^2-2}{5-x}\rightarrow f'(x)=\frac{-4x^2+40x-2}{(5-x)^2}$

b) x = –3 es asíntota vertical. No tiene asíntota horizontal. $y = x - 3$ *es la asíntota oblicua.*

16) Canarias. EBAU Ordinaria 2021. 1B. Se desea construir una caja sin tapa superior (ver Figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver Figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo.

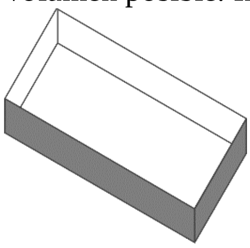


Figura 1

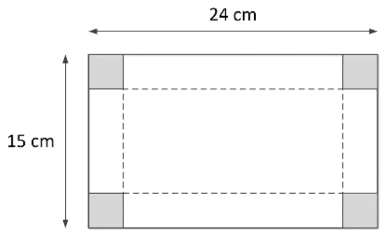
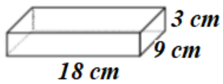


Figura 2

2.5 ptos

Solución: 

El volumen máximo es de 18 · 9 · 3 = 486 cm^3.

17) Canarias. EBAU Extraordinaria 2020. Grupo A. 1. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a. Calcule: $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ 1.25 ptos

b. Halle las asíntotas de la función: $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$ 1.25 ptos

Solución: a. $\dfrac{\pi}{2} - 1$ *b. Las asíntotas verticales son* $x = -1$ *y* $x = 1$. *No tiene asíntotas horizontales. La asíntota oblicua tiene ecuación* $y = x + 5$

18) Canarias. EBAU Extraordinaria 2020. Grupo B. 1. Halle los valores de *a* y *b* para que la recta de ecuación $y = 6x + a$ sea tangente a la curva $f(x) = \dfrac{bx - 1}{bx + 1}$ en el punto de abscisa *x = 0*. Escriba las funciones que se obtienen. 2.5 ptos

Solución: a = –1 y b = 3. La función es $f(x) = \dfrac{3x - 1}{3x + 1}$ *y la tangente es* $y = 6x - 1$

19) Canarias. EBAU Ordinaria 2020. Grupo A. 1. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, donde *ln* denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función *f(x)*. 1.25 ptos

b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x)dx$ 1.25 ptos

Solución: a. El dominio es $(0, +\infty)$. *La función crece en* $\left(0, \sqrt{e}\right)$ *y decrece en* $\left(\sqrt{e}, +\infty\right)$. *Tiene un máximo relativo en* $x = \sqrt{e}$. *b.* $\int_1^e f(x)dx = \dfrac{-2}{e} + 1$

20) Canarias. EBAU Ordinaria 2020. Grupo B. 1. Sean las funciones $f(x)=2x^4+ax^2+b$ y $g(x)=-2x^3+c$.

a. Calcule los valores *a*, *b* y *c* de manera que las gráficas de *f(x)* y *g(x)* cumplan las dos condiciones siguientes: 1.5 ptos

- Se cortan en el punto *P(1, 1)*
- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.

b. Suponiendo $a=b=1$ en *f(x)*, halle las asíntotas de la función: $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^3-1}$ 1 pto

Solución: a. $a=-7; b=6; c=3$. $f(x)=2x^4-7x^2+6$ *y* $g(x)=-2x^3+3$.

b. La asíntota vertical es $x=1$. *No existe asíntota horizontal. La asíntota oblicua es* $y=2x$

21) Canarias. EBAU Julio 2019. Opción A. 1. Dada la función $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7$

Calcular los valores de *a*, *b y c* sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = -2$
- La función corta el eje *OX* en el punto $x = 1$

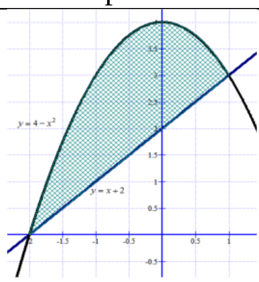
Dar la expresión de la función resultante. (2,5 ptos)

Solución: a = 0, b = –8 y c = 0. La función queda $f(x)=x^4-8x^2+7$

22) Canarias. EBAU Julio 2019. Opción B. 1. Dada la parábola de ecuación $y=4-x^2$ y la recta de ecuación $y=x+2$

a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores. (0,5 ptos)
b) Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas. (0,5 ptos)
c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas. (1,5 ptos)

Solución: a) P(1,3) y Q(–2,0) b)



c) 9/2 u².

23) Canarias. EBAU Junio 2019. Opción A. 1. Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcular el valor de dicha área máxima. (2,5 ptos)

Solución: Un cuadrado de lado 30 m, con área 900 m²

24) Canarias. EBAU Junio 2019. Opción B. 1. Dada la siguiente expresión de la función *f*, de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x)=\begin{cases} a-x & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{b}{x}-\ln x & si \quad x>1 \end{cases}$$

Calcular los valores de *a* y *b* para que *f* sea derivable en todo su dominio.
Escribir la función resultante. (2,5 ptos)

Solución: a = 1 y b = 0. $f(x)=\begin{cases}1-x & si \quad x\le 1\\ -\ln x & si \quad x>1\end{cases}$

25) Canarias. EBAU Julio 2018. Opción A. 1.- Tenemos que hacer dos cuadrados de tela donde cada cuadrado se hace con una tela diferente. Las dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm? (2,5 puntos)

Solución: 10 y 15 centimetros.

26) Canarias. EBAU Julio 2018. Opción B. 1.- Determinar los valores de a y b para que la función $f(x)=a\sqrt{3x+3}+b\sqrt{x-1}$ tenga un punto de inflexión en el punto (2,8) (2,5 puntos)

Solución: a = 3 y b = –1.

27) Canarias. EBAU Junio 2018. Opción A. 1. Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que la longitud de uno de los trozos sea el doble de la longitud de otro y tal que, al construir con cada uno de los tres trozos de hilo un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo. (2,5 puntos)

Solución: 30, 60 y 50 metros.

28) Canarias. EBAU Junio 2018. Opción B. 1.- Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $y=3x+\dfrac{3x}{x-1}$ (2,5 puntos)

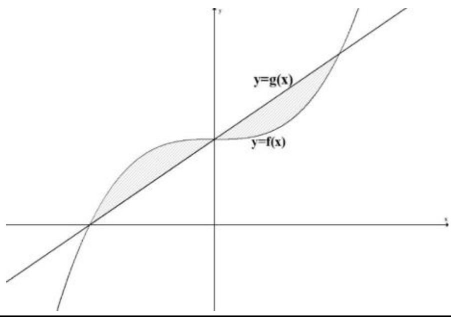
Solución: x = 1 es asíntota vertical. No tiene asíntotas horizontales. y = 3x +3 es asíntota oblicua.

29) Canarias. EBAU Julio 2017. Opción A. 1. Determinar los valores de a y b para que la función f definida de la forma $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+a & si \quad x\le 2\\ -x^2+bx & si \quad x>2\end{cases}$

Sea derivable en todo $x\in\mathbb{R}$ (2,5 ptos)

Solución: $a=8\ y\ b=12$

30) Canarias. EBAU Julio 2017. Opción A. 2. Calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura, siendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica $f(x)=x^3+1$ y $g(x)=x+1$ (2,5 ptos)



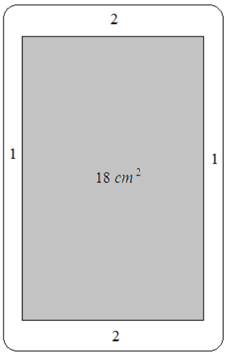
Solución: El área pedida es $\frac{1}{2}u^2$

31) Canarias. EBAU Julio 2017. Opción B. 1. Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\left(x^2\right)}$ (1,25 puntos) b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2-\dfrac{x}{4}}{x^2}$ (1,25 puntos)

Solución: a) 2 b) –1/64

32) Canarias. EBAU Julio 2017. Opción B. 2. Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2. Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima. (2,5 puntos)



Solución: Las dimensiones de la pantalla del móvil es 3 cm y 6 cm. Y el móvil mide 5 cm y 10 cm

33) Canarias. EBAU Junio 2017. Opción A. 1. Calcular el valor de los parámetros c y d sabiendo que la gráfica de la función f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f\left(x\right)=2x^3-x^2+cx+d$, tiene como recta tangente en el punto P(1,–2) la recta de ecuación $y=5x-7$ (2,5 puntos)

Solución: c = 1 y d = –4

34) Canarias. EBAU Junio 2017. Opción A. 2. Resolver las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\frac{(\ln 2x)^2}{3x}dx$ (1.25 puntos) b) $\displaystyle\int\frac{3x^4+5x^2+\sqrt{x}}{x^2}dx$ (1.25 puntos)

Solución: a) 1/9 b) $x^3+5x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+K$

35) Canarias. EBAU Junio 2017. Opción B. 1. Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{e^{x^2}}$ se pide

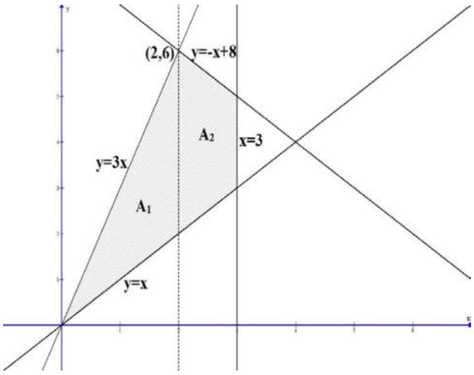
a) Determinar los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento (1,5 puntos)
b) Calcular los máximos y mínimos relativos (1 punto)

Solución: a) $f(x)$ creciente en $(-\infty,-1)$ y en $(0,1)$. $f(x)$ decreciente en $(-1,0)$ y en $(1,+\infty)$
b) El mínimo es (0, 0) y el máximo es (1, 1/e)

36) Canarias. EBAU Junio 2017. Opción B. 2. Dibujar y calcular el área de la región del plano limitada por las siguientes rectas:

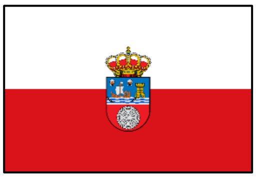
$y=3x$; $y=x$; $y=-x+8$; $x=3$ (2,5 puntos)

Solución:



Área = 7 u^2

Cantabria



1) Cantabria. EBAU Extraordinaria 2024. Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\begin{cases} x^3-10x^2+25x, & si\ x\le 5 \\ \ln\left(x^2-25\right), & si\ x>5 \end{cases}$.

1) [0,75 PUNTOS] Determine si *f(x)* tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).
2) [0,75 PUNTOS] Determine si *f*(*x*) tiene punto(s) de inflexión. En caso afirmativo, calcúlelo(s).

Solución: 1) $x=5$ *es asíntota vertical cuando x tiende a 5 por la derecha. No tiene asíntota horizontal ni oblicua. 2) La función presenta puntos de inflexión en* $x=\frac{10}{3}$ *y en x = 5.*

2) Cantabria. EBAU Extraordinaria 2024. Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=ax+sen(x)$, en función de la constante real *a*, con $x\in\left[0,2\pi\right]$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine la constante para que la función valga 0 cuando $x=\pi/2$.
2) [1 PUNTO] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) para el valor de *a* calculado.
3) [1 PUNTO] Calcule una primitiva de *f*(*x*).

Solución: 1) $a=\frac{-2}{\pi}$. *2) La función crece en* $\left[0,0.88\right)\cup\left(5.4,2\pi\right]$ *y decrece en* $\left(0.88,5.4\right)$.

3) $F(x)=a\frac{x^2}{2}-\cos(x)$

3) Cantabria. EBAU Ordinaria 2024. Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=x\ln x$, con $x>0$.

1) [0,75 PUNTOS] Calcule la derivada de *f(x)*.
2) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de *f*(*x*).
3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por *f*(*x*), el eje OX de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Solución: 1) $f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}=1+\ln x$, con $x>0$. *2)* $F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$. *3) El área del recinto tiene un valor de* $\ln 4-\frac{3}{4}\simeq 0.64$ *unidades cuadradas.*

4) Cantabria. EBAU Ordinaria 2024. Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x}, & si\ x\le 10 \\ \sqrt{x+1}, & si\ x>10 \end{cases}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de *f*(*x*).
2) [1 PUNTO] Determine los intervalos, del dominio de definición, en que *f*(*x*) es continua.
3) [1 PUNTO] Determine si *f*(*x*) tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Solución: 1) El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,0\}$. 2) La función es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,10)\cup(10,+\infty)$. 3) La función tiene una asíntota vertical: $x=0$, una asíntota horizontal cuando x tiende a –∞: $y=0$, y no tiene asíntota oblicua.

5) Cantabria. EBAU Extraordinaria 2023. Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$.

A) [0,5 PUNTOS] Calcule el dominio de definición de *f*(*x*).

B) [0,75 PUNTOS] Determine si hay intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*(*x*). En caso afirmativo, calcúlelos.

C) [0,5 PUNTOS] Calcule los cortes de *f*(*x*) con los ejes.

D) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de concavidad y convexidad de *f*(*x*).

Solución: A) El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{2\}$. B) La función decrece en todo su dominio $\mathbb{R}-\{2\}$. C) A(–1, 0) y B(0, –1/2) D) La función es cóncava (∩) en $(-\infty,2)$ y convexa (∪) en $(2,+\infty)$.

6) Cantabria. EBAU Extraordinaria 2023. Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\sin(x)$.

A) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de *f*(*x*).

B) [1,75 PUNTOS] Calcule el área del recinto del plano limitado por *f*(*x*) y el eje OX de abscisas para $x\in[0,2\pi]$.

Solución: A) Una primitiva puede ser con k = 0 → $F(x)=-\cos(x)$ B) 4 unidades cuadradas.

7) Cantabria. EBAU Ordinaria 2023. Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de *f(x)*.

2) [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*).

3) [1 PUNTO] Determine si *f*(*x*) tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Solución: 1) La función es discontinua en x = 0. 2) La función crece en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ y decrece en $(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$. 3) $x=0$ es asíntota vertical. No tiene asíntota horizontal. La asíntota oblicua tiene ecuación $y=x-1$.

8) Cantabria. EBAU Ordinaria 2023. Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=x^3+1$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de *f*(*x*).

2) [1 PUNTO] Calcule los puntos de inflexión de *f*(*x*) si los hubiera.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por *f*(*x*), el eje OX de abscisas y las rectas *x* = 1 y $x=2$.

Solución: 1) Una primitiva puede ser con k = 0 → $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+x$. 2) Área $=\dfrac{19}{4}=4.75\ u^2$

9) Cantabria. EBAU Extraordinaria 2022. Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\frac{e^x}{x}$

A. [0,5 PUNTOS] Calcule la derivada primera de *f(x)*.

B. [0,5 PUNTOS] Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 2*.

C. [0,5 PUNTOS] Calcule las asíntotas verticales de *f (x)*.

D. [1 PUNTO] Calcule las asíntotas horizontales de *f (x)*.

Solución: A. $f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}$ *B.* Pendiente $=\frac{e^2}{4}$ *C.* $x=0$ *D. No hay asíntota horizontal cuando x tiende a* $+\infty$*. Cuando x tiende a* $-\infty$ *la asíntota horizontal es* $y=0$.

10) Cantabria. EBAU Extraordinaria 2022. Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\frac{3}{x}$.

A. [1 PUNTO] Calcule el dominio y las asíntotas de *f(x)*.

B. [0,5 PUNTOS] Halle una primitiva de *f(x)*.

C. [0,5 PUNTOS] Calcule el área de la región limitada por la función *y = f (x)*, las rectas *x = 1*, $x=e$ y el eje OX de abscisas.

Solución: A. Dominio f(x) = $\mathbb{R}-\{0\}$. $x=0$ *es asíntota vertical.* $y=0$ *es asíntota horizontal.*

B. $F(x)=3\ln|x|+K$ *C. 3* u^2.

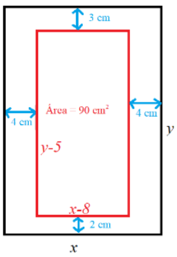
11) Cantabria. EBAU Ordinaria 2022. Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm^2 de área para texto y además, con margen superior 3 cm, inferior 2 cm y márgenes laterales 4 cm cada uno.

A. [0,25 PUNTOS] Realice un dibujo planteando el problema.

B. [2,25 PUNTOS] Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Solución: A.



B. El gasto en papel es mínimo con las medidas de 20×12.5 *cm.*

12) Cantabria. EBAU Ordinaria 2022. Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=x^2e^{-x}$.

A. [1 PUNTO] Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

B. [0,5 PUNTOS] Calcule la derivada primera de *f(x)*.

C. [0,5 PUNTOS] Determine los extremos relativos de *f(x)*.

D. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*.

Solución: A. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ *B.* $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

C. El mínimo relativo tiene coordenadas $(0,0)$ *y el máximo relativo* $\left(2,\frac{4}{e^2}\right)$

D. La función decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ *y crece en* $(0,2)$.

13) Cantabria. EBAU Extraordinaria 2021. Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.
2) [0.5 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento, y/o decrecimiento.
3) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 2$.
4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Solución: 1) $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$ *2) La función crece en* $(-\infty,1)$ *y decrece en* $(1,+\infty)$

3) $y=-\dfrac{1}{e^2}x+\dfrac{4}{e^2}$ *4)* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0;\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

14) Cantabria. EBAU Extraordinaria 2021. Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=-x^2+4x$.

1) [0.25 PUNTOS] Calcula la derivada de $f(x)$.
2) [0.75 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$.
3) [0.5 PUNTOS] Calcula una primitiva de $f(x)$.
4) [1 PUNTO] Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje OX de abscisas.

Solución: 1) $f'(x)=-2x+4$ *2) La función crece en* $(-\infty,2)$ *y decrece en* $(2,+\infty)$

3) $F(x)=-\dfrac{x^3}{3}+2x^2$ *4)* $\text{Área}=\dfrac{22}{3}\simeq 7.33u^2$

15) Cantabria. EBAU Ordinaria 2021. Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=x^2$

1) [0.5 PUNTOS] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x = 1$. Llamaremos a dicha recta *g(x)*.
2) [0.5 PUNTOS] Calcula el área de la región limitada por las rectas *g(x)*, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=1$ y el eje OX de abscisas.
3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva *F(x)* de la función *f(x)*.
4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función *f(x)*, y las rectas *g(x)*, $x=\dfrac{1}{2}$.

Solución: 1) $g(x)=2x-1$ *2) 0.25* u^2. *3)* $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ *4)* $\text{Área}=\dfrac{1}{24}\simeq 0.042\,u^2$

16) Cantabria. EBAU Ordinaria 2021. Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS] En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, *I(t)*, viene dada por la función $I(t)=\begin{cases} ke^{2t} & si\ \ t<1 \\ \dfrac{t^2}{3t^2+1} & si\ \ t\ge 1 \end{cases}$, siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

1) [0.75 PUNTOS] Calcula el valor de k para que *I(t)* sea continua.
2) [0.75 PUNTOS] Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t\to\infty$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de *I(t)* para el instante $t=\frac{1}{2}$.

4) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de *I(t)* para el instante $t = 2$.

Solución: 1) $k=\frac{1}{4e^2}$ *2) Cuando t→∞ la proporción de personas infectadas es 1 de cada 3.*

3) $I\,'(1/2)=\frac{1}{2e}$ *4)* $I\,'(2)=\frac{4}{169}$

17) Cantabria. EBAU Extraordinaria 2020. Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=\frac{1-\cos(x)}{x}$

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.
2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x=\pi$
3) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$.
4) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.

Solución: 1) $f\,'(x)=\frac{xsen(x)-1+\cos(x)}{x^2}$ *2) La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en dicho punto.* $f\,'(\pi)=\frac{-2}{\pi^2}$ *3)* $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ *4) No tiene asíntota vertical.* $y=0$ *es asíntota horizontal. No tiene oblicua.*

18) Cantabria. EBAU Extraordinaria 2020. Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & si \quad x\le \pi/2\\ \frac{2}{x}+a & si \quad x>\pi/2\end{cases}$, siendo *a* un parámetro real.

1) [0.5 PUNTOS] Halla *a* para que *f(x)* sea continua.
2) [0.5 PUNTOS] Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de *f(x)* para $x\le\pi/2$
4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y=f(x)$, las rectas $x=0$, $x=\pi/2$ y el eje *OX* de abscisas.

Solución: 1) $a=\frac{\pi-4}{\pi}$ *2)* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$ *;* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=$ *No existe 3)* $F_0(x)=-\cos x+0=-cosx$ *4) 1* u^2

19) Cantabria. EBAU Ordinaria 2020. Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.
2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x=\pi$
3) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.
4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$

Solución: 1) $f\,'(x)=\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$ *2)* $f\,'(\pi)=\frac{-1}{\pi}$. *3) No tiene asíntotas verticales.* $y=0$ *es asíntota horizontal. No tiene asíntota oblicua. 4)* $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

20) Cantabria. EBAU Ordinaria 2020. Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS] Considera la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$.

1) [1 PUNTO] Calcula el dominio y las asíntotas de *f(x)*.
2) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de *f(x)*.
3) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y=f(x)$, las rectas $x=1$, $x=2$ y el eje *OX* de abscisas.

Solución: 1) El dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$. $x=0$ *es asíntota vertical.* $y=0$ *es asíntota horizontal. No tiene asíntota oblicua. 2)* $F(x)=-\dfrac{2}{x}+C$ *3)* $Área=1u^2$

21) Cantabria. EBAU Septiembre 2019. Opción 1. Ejercicio 2

Considere la función $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-7x-8}$.

1) [2.75 PUNTOS] Estudie el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos de la función *f*.

2) [0.25 PUNTOS] Si *g* es una función derivable con un máximo relativo en *x = 2*, ¿Cuánto vale $g´(2)$?

Solución:1) El dominio es $\mathbb{R}-\{-1,8\}$. *Asíntotas verticales x = –1 y x = 8. Horizontal y = 0. La función presenta un mínimo relativo en x = –10 y un máximo relativo en x = 2. Crece en* $(-10,2)$ *y decrece en* $(-\infty,-10)\cup(2,+\infty)$*.2)* $g´(2)=0$

22) Cantabria. EBAU Septiembre 2019. Opción 1. Ejercicio 2

Sea *f(x)* la función definida en (0, ∞) dada por *f(x) = x ln(x)*, donde ln denota el logaritmo neperiano.

1) [1 PUNTO] Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2) [2 PUNTOS] Calcule $\int_2^e f(x)dx$

Solución:1) 0 2) $2-2\ln 2$

23) Cantabria. EBAU Junio 2019. Opción 1. Ejercicio 2 Considere la función $f(x)=(x+10)e^{2x}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule un primitiva *F*(*x*) tal que *F*(0) = 0. Use la derivada para comprobar su solución.

2) [0.5 PUNTOS] Calcule $\int_0^5 f(x)dx$.

Solución: ***1)*** $F(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}\left(x+\dfrac{19}{2}\right)-\dfrac{19}{4}$ ***2)*** $\dfrac{29e^{10}-19}{4}$

24) Cantabria. EBAU Junio 2019. Opción 2. Ejercicio 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen(x)}{2x} & si\ x<0\\ \dfrac{a-x^2}{2+x} & si\ x\geq 0\end{cases}$

1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de *a* que haga a la función continua en *x* = 0.

2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de *a* para que *f* tenga un extremo relativo en *x* = 2. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?

3) [0.5 PUNTOS] Sea *g*(*x*) una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\int_2^3 g(x)dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

Solución:1) a = 1 2) a = –12. En x = 2 hay un máximo 3) –2

25) Cantabria. EBAU Septiembre 2018. Opción 1. 2.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{sen\left(2x^2\right)+x}{\ln\left(x+1\right)+x}$. (ln denota el logaritmo neperiano)

2) [1 PUNTO] ¿Para qué valor de *d* tiene la función $\frac{x^d+1}{x-2}$ una asíntota oblicua en +∞? Calcule dicha asíntota.

Solución: 1) 1/2 2) La asíntota oblicua existe cuando d =2 y dicha asíntota tiene ecuación $y = x+2$

26) Cantabria. EBAU Septiembre 2018. Opción 2. 2.

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x \le -2 \\ x^2+ax & si \quad -2 < x < 0 \\ 2sen\left(x\right)+b & si \quad 0 \le x \end{cases}$$

1) [1 PUNTO] Determine *a* y *b* para que la función *f* sea continua en todo R.
2) [1,5 PUNTOS] Si *a* = 3, *b* = 0 clasifique la discontinuidad en *x* = –2.
3) [1 PUNTO] Si *a* = 2, *b* = 0, calcule el área encerrada por la gráfica de *f* entre las rectas *y* = 0, $x = -5$ y *x* = –3.

Solución: 1) Necesitamos que sea a = 2 y b = 0 2) En x = –2 hay una discontinuidad inevitable de salto finito 3) Área = 4 u^2

27) Cantabria. EBAU Junio 2018. Opción 1. Ejercicio 2 Sea $f(x) = \frac{x-1}{x^2-7x+10}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule todas las primitivas de *f(x)*.

2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por la gráfica de *f(x)* y las rectas $y = 0$, $x = 3$ y $x = 4$.

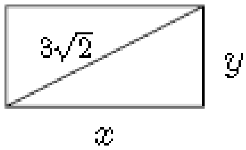
Solución: 1) $\int f(x)dx = \frac{4}{3}\ln|x-5| - \frac{1}{3}\ln|x-2| + K$ *2)* $Área = \frac{5}{3}\ln 2 = 1{,}15\, u^2$

28) Cantabria. EBAU Junio 2018. Opción 2. Ejercicio 2. Se quiere construir un cilindro de volumen 250 · π metros cúbicos y área mínima.
1) [0,5 PUNTOS] Exprese la altura *h* del cilindro en función del radio *r* de la base.
2) [0,5 PUNTOS] Calcule la función *a(r)* que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.
3) [2,5 PUNTOS] Calcule el valor del radio y la altura que hacen el área mínima.
Datos: Volumen del cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, *área del cilindro:* $A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$

Solución: 1) $h = \frac{250}{r^2}$ *2)* $a(r) = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}$ *3) El radio de 5 metros y la altura de 10 m.*

29) Cantabria. EBAU Septiembre 2017. Opcioón 1. Ejercicio 2.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule el rectángulo de base x cm, altura y cm y diagonal $3\sqrt{2}$ cm cuyo perímetro sea máximo.



2) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto (1, 2).

Solución: 1) El perímetro es máximo para el cuadrado de lado 3 cm. *2)* $y = 3x - 1$

30) Cantabria. EBAU Septiembre 2017. Opción 2. Ejercicio 2.

Sea f la función definida a trozos dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 3 & si \quad x \le 3 \\ 2x^2 - 3 & si \quad 3 < x < 5 \\ be^x & si \quad x \ge 5 \end{cases}$$

1) [1,5 PUNTOS] Calcule los valores de a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

2) [1 PUNTO] Si a = 1, b = 3, calcule el área encerrada bajo la gráfica de f comprendido entre las rectas x = –1 y x = 3.

3) [1 PUNTO] Calcule los extremos relativos de la función $g(x) = 2x^2 + x + 3$.

Solución: 1) a = 1 y $b = \frac{47}{e^5}$ *2)* $Área = 25,33\, u^2$ *3) El mínimo es el punto* $\left(-\frac{1}{4}, \frac{21}{8}\right)$

31) Cantabria. EBAU Junio 2017. Opción 1. Ejercicio 2

Sea la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la primitiva de f. Compruebe la solución obtenida.

2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por f y el eje $y = 0$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución: 1) $\int f(x)dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3 - 2\sqrt{1+x} + K$ *2)* Área$=\frac{4}{3}\sqrt{5} + \frac{4}{3} = 4,314\, u^2$

32) Cantabria. EBAU Junio 2017. Opción 2. Ejercicio 2.

Tenemos la función definida a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & si \quad x < 0 \\ 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 & si \quad x \ge 0 \end{cases}$$

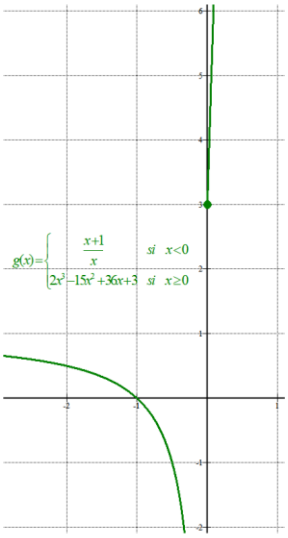
1) [2 PUNTOS] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g en $\mathbb{R} - \{0\}$ y determine los máximos y mínimos relativos.

2) [0,5 PUNTOS] Determine si la función es continua en $x = 0$.

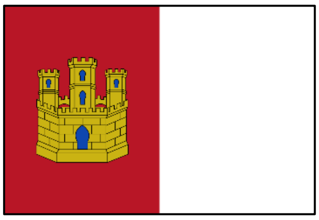
3) [1 PUNTO] Haga un esbozo del gráfico de la función en un entorno de $x = 0$.

Solución: 1) La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, 3)$ *y crece en* $(0, 2) \cup (3, +\infty)$.

Presenta un mínimo relativo en $x = 3$. Y un máximo relativo en $x = 2$. *2) No es continua en $x = 0$.*

3) 

Castilla la Mancha



1) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2024. 2. Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & x<3 \\ \dfrac{2x}{x-4} & x\geq 3 \end{cases}.$$

a) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.

b) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución: a) La función es continua en $\mathbb{R}-\{3,4\}$. *En x = 3 tiene una discontinuidad inevitable de salto finito y en x = 4 tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.* *b)* $y=6x-3$.

2) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2024. 4. a) [1 punto] Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2x^2}{x^2+1}dx$.

Solución: $\int \frac{2x^2}{x^2+1}dx = 2(x-arctgx)+K$.

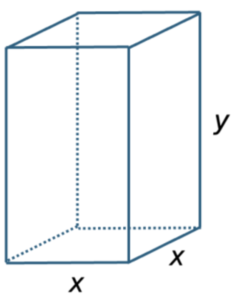
3) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2024. 5. a) [1 punto] Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x)=x$ entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$ con respecto al eje X.

Solución: $\frac{19\pi}{3}u^3$.

4) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2023. 6. a) **[1 punto]** Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x}$.

Solución: –2.5.

5) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2024. 2. Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



a) **[1 punto]** Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).
b) **[1 punto]** Calcula, razonadamente, los valores de x e y, para que la superficie sea mínima.
c) **[0,5 puntos]** Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2.

Solución: a) $S(x)=2x^2+\frac{4}{x}$ *b) La superficie es mínima para x = y = 1 dm. c) La superficie mínima tiene un valor de* $6\,dm^2$. *El coste del envase será de 30 euros.*

6) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2024. 4. a) [1 punto] Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2+3}$.

Solución: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2+3}=+\infty$

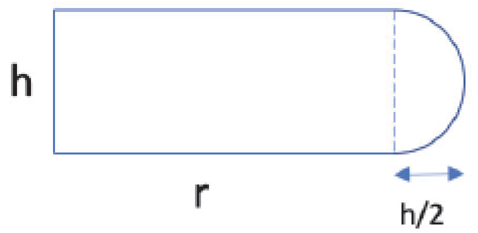
7) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2024. 5. a) [1 punto] Calcula la siguiente integral $\int x\sqrt{2x+3}dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t=\sqrt{2x+3}$ ..

Solución: $\int x\sqrt{2x+3}dx=\frac{1}{10}\left(\sqrt{2x+3}\right)^5-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3+K$

8) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2024. 6. a) [1 punto] Calcula los coeficientes $a,b,c\in\mathbb{R}$ de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1,2)$. Justifica tu respuesta.

Solución: Los valores buscados son a = –3, b = 0 y c = 4.

9) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2023. 2.
Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r\in\mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es *h/2*. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



a) **[1 punto]** Escribe el área del aparcamiento en función del valor *h*.
b) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer *h* y *r* para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

Solución: a) $Área=hr+\frac{\pi h^2}{8}$ *b) El área del aparcamiento es máxima para* $h=\frac{160}{4+\pi}\simeq 22.4$ *metros y* $r=\frac{80}{4+\pi}\simeq 11.2$ *metros*.

10) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2023. 5. a) **[1 punto]** Encontrar el área encerrada por la recta $x=-1$ y las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-2x+3$ y $g(x)=\frac{1}{2}x^2+1$

Solución: 4.5 unidades cuadradas.

11) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2023. 6. a) **[1 punto]** Calcula el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}$$

Solución: 4

12) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2023. 7. a) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x}dx .$$

Solución: $\int (x+3)e^{-2x}dx=\frac{-2x-7}{4}e^{-2x}+K$

13) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2023. 2.
a) **[0,5 puntos]** Enuncia el teorema de Bolzano.
b) **[1 punto]** Sea la función $f(x)=x^3+6x^2+3x-10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo [0, 2].
c) **[1 punto]** ¿Podría *f(x)* tener más de una raíz en el intervalo [0, 2]? Justifica tu respuesta

Solución: a) b) Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano y existe $c\in(0,2)$ *tal que f(c) = 0. c) la función es estrictamente creciente en el intervalo* $[0,2]$ *y sólo puede tener una raíz en el intervalo* $[0,2]$.

14) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2023. 5. a) **[1 punto]** Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1-3x=t^6$

Solución: $\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}=2\sqrt[6]{1-3x}+\sqrt[3]{1-3x}+\ln\left(1-\sqrt[6]{1-3x}\right)^2+K$

15) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2023. 6. a) **[1 punto]** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2} .$$

Solución: $+\infty$

16) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2023. 7. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x)=x^3+3x^2+x+3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

Solución: La función presenta un máximo en $x=-1-\frac{\sqrt{6}}{3}$ *y un mínimo en* $x=-1+\frac{\sqrt{6}}{3}$.

17) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2022. 2.

a) **[1,5 puntos]** Encuentra razonadamente el valor de a, $b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$$

tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \to +\infty$.

b) **[1 puntos]** Resuelve la integral:

$$\int x \cdot \cos(2x)\, dx$$

Solución: a) Los valores buscados son b = –2 y a = 4. b) $\int x \cdot \cos(2x)\, dx = \frac{x}{2} sen(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + K$

18) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2022. 3. a) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \left(2e^{x^2-4} - 8x + 14\right)/\left(x^2 - 2x\right)$.

Solución: La función es continua en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$. *En x = 0 la discontinuidad es de salto infinito y en x = 2 la discontinuidad es evitable*

19) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2022. 5. b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = 3 - x$.

Solución: Área = 1/6 u^2.

20) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2022. 6. a) **[1,5 puntos]** Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.
b) **[1 punto]** Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función

$$f(x) = \left(2e^x - 8x - 3\right)/\left(x^2 + 2\right)$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

Solución: a) Los valores buscados son $a = \frac{-5}{2}$ *y* $a = \frac{7}{2}$. *b) Existe un c ∈ [0, 5] tal que f(c) = 0 y que, por tanto, la función f(x) corta al eje de abscisas al menos una vez.*

21) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2022. 2. b) **[1 puntos]** Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

Solución: e

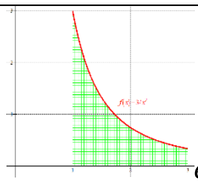
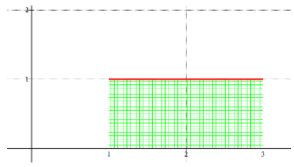
22) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2022. 3. a) Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué valores puede tomar $a \in \mathbb{R}$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?
a.2) **[1,25 punto]** Encuentra razonadamente $a \in \mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.
b) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}\, dx$$

Solución: a.1) a > 0 a.2) a = 9 b) $\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{1+3x^2} + K$

23) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2022. 5. b) **[1,5 puntos]** Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x)=3/x^2$ en el intervalo $[1,3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

Solución: $c=\sqrt{3}\in[1,3]$ *El área de*  *es igual que el área de* 

24) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2021. 5. a) Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

b) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \;\; x<0 \\ \dfrac{1}{x-1} & si \;\; 0\le x\le 2 \\ x & si \;\; x>2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad en *x = 0* y en *x = 2* e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

Solución: a) 1 b) En x = 0 y en x = 2 la función es discontinua inevitable de salto finito.

25) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2021. 6. Sea la función $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función *f(x)* y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función *f(x)* en el punto de abscisa *x = 1*.

Solución: a) mínimo relativo son $\left(2-\sqrt{5},-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ *y máximo relativo son* $\left(2+\sqrt{5},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

b) La recta tangente en x = 1 tiene ecuación $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$*; la recta normal en x = 1 es* $y=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{6}$

26) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2021. 7. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+x-1$, con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina los valores de *a* y *b* para que la gráfica de *f(x)* pase por el punto (1, 1) y tenga aquí un punto de inflexión.

b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x)=x sen(x)-\cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función *f(x)* tiene al menos un extremo relativo en el intervalo [–1, 1].

Solución: a) $a=-\frac{1}{2}$ *y* $b=\frac{3}{2}$ *b) www.ebaumatematicas.com*

27) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2021. 6. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x)=ax^3-2x^2-x+b$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de *a* y *b* para que la gráfica de la función pase por el punto (1, 2) y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & x<0 \\ be^x & x\geq 0 \end{cases}$, con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de *a* y *b* para que la función sea continua y derivable en *x = 0*.

Solución: a) a = 2 y b = 3 b) a = –1 y b = 1

28) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2021. 7. a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{2x-4}$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & si \quad x<1 \\ \dfrac{2x-1}{x-2} & si \quad 1\leq x\leq 3 \\ 2e^x & si \quad x>3 \end{cases}$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

Solución: a) 1/2 b) Su dominio es $\mathbb{R}-\{2\}$. Es continua en $\mathbb{R}-\{2,3\}$. En x = 3 hay una discontinuidad inevitable de salto finito. En x = 2 hay una discontinuidad inevitable de salto infinito

29) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2020. 3. a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(2x)}\right)$

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2^{(x-1)} & si \quad x\leq 1 \\ x-2 & si \quad 1<x<2 \\ \ln(x-1) & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Donde ln es el logaritmo, estudia la continuidad de la función *f(x)* en $x=1$ y en $x=2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Solución: a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(2x)}\right)=+\infty$ *b) Es discontinua inevitable de salto finito en x = 1. Es continua en* $x=2$.

30) Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2020. 4. a) **[1,5 puntos]** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2+x-1$ en el punto de abscisa $x=1$.

Solución: a) 6 dm en el lado del cuadrado de la base y 3 de altura. b) $y=3x-2$

31) **Castilla La Mancha. EvAU Extraordinaria 2020. 5.** a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int\frac{-dx}{1+e^x}$. *(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$)*

b) **[1,25 puntos]** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

Solución: a) $\int \frac{-dx}{1+e^x} = -x + \ln\left(1+e^x\right) + C$ *b)* $Área = 4{,}5\,u^2$

32) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2020. 3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & si \quad x < 2 \\ \cos(\pi x) & si \quad 2 \le x \le 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos\left(x^2\right)}$

Solución: a) La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$*, presentando una discontinuidad inevitable de salto infinito en x = 2. b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos\left(x^2\right)} = \frac{1}{2}$

33) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2020. 4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función *f(x)* y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función *f(x)* en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución: a) La función tiene un máximo en P(–1, 2) y un mínimo en Q(1, 0).

b) La recta tangente es $y = -2x + 1$ *y la recta normal es* $y = 1 + \frac{x}{2}$

34) Castilla La Mancha. EvAU Ordinaria 2020. 5. a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$.

b) **[1,25 puntos]** Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

Solución: a) $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx = 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$ *b)* $Área = \frac{142}{12} = 11{,}833\,u^2$

35) Castilla La Mancha. EvAU Julio 2019. 1A. a) Estudia la continuidad en todo R de la función $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. (1,5 puntos)

b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x) = xe^{-x}$. (1 punto)

Solución: a) En x = 1 es discontinua evitable. En x = – 1 es discontinua inevitable de salto infinito. b) En x = 1 hay un máximo relativo.

36) Castilla La Mancha. EvAU Julio 2019. 2A. a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=16-x^2$ y $g(x)=(x+2)^2-4$.
(1,5 puntos)
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=16-x^2$ en el punto de abscisa x = 1. (1 punto)

Solución: a) 72 u². *b)* $y=-2x+17$

37) Castilla La Mancha. EvAU Julio 2019. 2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ (1,25 puntos por integral)

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

Solución: a) $-\frac{3}{e}+2$ *b)* $2arctg\sqrt{x}+C$

38) Castilla La Mancha. EvAU Junio 2019. 2A. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x)=-x^2+2x+3$, la recta x = –2 y el eje de abscisas.
(1,5 puntos)
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función g(x) en el punto de abscisa x = 4. (1 punto)

Solución: a) 13 u² *b)* $x-6y-34=0$

39) Castilla La Mancha. EvAU Junio 2019. 1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$ (1,25 puntos por límite)

Solución: a) $e^{\frac{1}{2}}$ *b) 1/2*

40) Castilla La Mancha. EvAU Junio 2019. 2B.

Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=\frac{x^2}{2}$ con x ∈ R.

a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones *f(x)* y *g(x)*. (1 punto)
b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)*. (1,5 puntos)

Solución: a) En x = 0 hay un máximo relativo de f(x) y un mínimo relativo de g(x). b) Área = $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}=1,24\,u^2$

41) Castilla La Mancha. EvAU Junio 2018. A.2. Calcula:

$a)\int_0^{\pi}(x^2-1)\cos x dx$ $b)\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}dx$

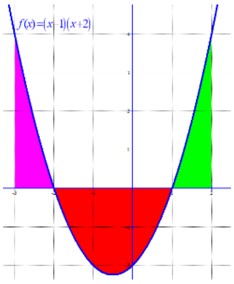
Solución: a) -4π *b)* $\frac{1}{3}\ln\sqrt[3]{\frac{e^x-1}{e^x+2}}+C$

42) Castilla La Mancha. EvAU Junio 2018. B.2. Dadas las funciones $f(x)=2xe^{-x}$ y $f(x)=x^2e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones.

Solución: $\int_0^2\left(2xe^{-x}-x^2e^{-x}\right)dx=\frac{4}{e^2}u^2$

43) Castilla La Mancha. EvAU Septiembre 2017. 1A. a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x)=(x-1)(x+2)$, las rectas $x=-3$, $x=2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto de abscisa $x=2$. **(1 punto)**

Solución:

a) 

El área total es $\frac{49}{6}=8.16\,u^2$ *b)* $y=5x-6$

44) Castilla La Mancha. EvAU Septiembre 2017. 2A. a) Determina el valor de $k\in\mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & si \quad x<0\\ 6x+k & si \quad x\geq 0\end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $cos\,x=2-x$ tiene alguna solución real en el intervalo [0, 2π]. **(1 punto)**

Solución: a) $k=\frac{1}{e}$ *b) Existe* $c\in(0,\pi)$ *tal que* $\cos c=2-c$

45) Castilla La Mancha. EvAU Septiembre 2017. 1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

Solución: La superficie a usar es mínima cuando la base de la piscina es un cuadrado de lado 4 metros. Y la profundidad es de 2 metros.

46) Castilla La Mancha. EvAU Septiembre 2017. 2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int\frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}dx$ **b)** $\int x^2\ln x dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

Solución: a) $\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x-1|+4\ln|x+2|+K$ *b)* $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+K$

47) Castilla La Mancha. EvAU Junio 2017. 1A. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & si \quad x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros *a* y *b* para que *f(x)* sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

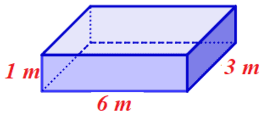
(1,5 puntos)

b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función *f(x)* verifica las hipótesis del teorema en el intervalo *[-2, 6]*. **(1 punto)**

Solución: a) a = –1 y b = 8 b) Se verifican todas las hipótesis del teorema de Rolle y existe, al menos, un valor c en el intervalo [-2, 6] donde se anula la derivada

48) Castilla La Mancha. EvAU Junio 2017. 2A. Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**

Solución:



49) Castilla La Mancha. EvAU Junio 2017. 1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}$ **(1,25 puntos por límite)**

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

Solución: a) 3 b) 1

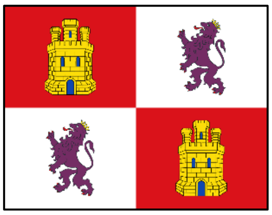
50) Castilla La Mancha. EvAU Junio 2017. 2B. Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^2-2x-4$

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de *g(x)* en el punto de abscisa *x* = –3. **(1 punto)**

Solución: a) 9 u^2. b) $-x+8y-91=0$

Castilla y León



1) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2024. E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=e^x+x^3-2$ demostrar que *f(x)* se anula para algún valor de *x* y que ese valor es único. **(2 puntos)**

Solución: www.ebaumatematicas.com

2) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2024. E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x-a}{bx^2} & si\ x\neq 0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$, ¿qué valores tienen que tomar los parámetros $a\in\mathbb{R}$ y $b\in\mathbb{R}-\{0\}$ para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$? **(2 puntos)**

Solución: $a=1$ y $b=\dfrac{-1}{2}$.

3) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2024. E7.- (Análisis)

Calcular los valores de *a*, *b* y *c* para los cuales la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 2$ y además la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x=1$. **(2 puntos)**

Solución: a = –3, b = 0 y c = 2.

4) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2024. E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-3x+2}$, hallar su dominio de definición y determinar sus asíntotas horizontales y verticales. **(1 punto)**

b) Calcular $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-3x+2}dx$. **(1 punto)**

Solución: a) El dominio de la función es $(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$. $x=0$ *y* $x=2$ *son asíntotas verticales. La recta* $y=0$ *es asíntota horizontal de la gráfica de f cuando x tiende a + ∞.*

b) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-3x+2}dx=\ln|x-2|-\ln|x-1|+C=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$.

5) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2024. E5.- (Análisis)

Probar que la ecuación $e^{-x}(x-1)=1$ no tiene solución para $x\in\mathbb{R}$. **(2 puntos)**

Solución: www.ebaumatematicas.com

6) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2024. E6.- (Análisis)

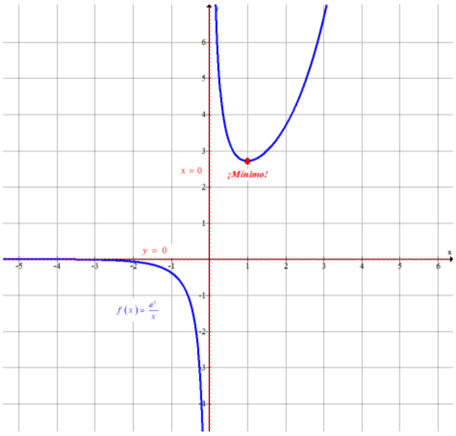
Se considera la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Determinar el valor de los parámetros A, B y C tales que $f(-1)=0$, la función f presenta un extremo relativo en $x=0$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en $x=-1$ es paralela a la recta de ecuación $y+3x=0$. **(2 puntos)**

Solución: $A=3, B=0$ y $C=-2$

7) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2024. E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=e^x x^{-1}$, determinar su dominio de definición, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica. **(2 puntos)**

Solución: Dominio f(x) = $\mathbb{R}-\{0\}$. $x=0$ *es asíntota vertical. La recta* $y=0$ *es asíntota horizontal de la gráfica de f cuando x tiende a –∞. No existe asíntota horizontal cuando x tiende a +∞. La función decrece en* $(-\infty,0)\cup(0,1)$ *y crece en* $(1,+\infty)$. *El mínimo relativo tiene coordenadas (1, e).*



8) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2024. E8.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{\cos(x)-1}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^2 e^{-x}(x-1)\,dx$ **(1 punto)**

Solución: $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{\cos(x)-1}=-2$. $\int_0^2 e^{-x}(x-1)\,dx=\frac{-2}{e^2}$

9) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2023. E5.- (Análisis)

Sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x} & si \quad x<1\\ \ln(x) & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x=1$. **(1 punto)**

b) Estudiar sus asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

Solución: a) La función no es continua ni derivable en x = 1. b) No tiene asíntotas verticales. $y=0$ *es asíntota horizontal cuando* $x\to-\infty$

10) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2023. E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=x^2(x+3)$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. **(2 puntos)**

Solución: Dominio = $\mathbb{R}$. *Tiene dos puntos de corte con los ejes: A(0, 0) y B(–3, 0). La función decrece en* $(-2,0)$ *y crece en* $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. *La función tiene un máximo relativo en x = –2 y un mínimo relativo en x = 0.*

11) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2023. E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)}{x^3+4x^2}$. **(1 punto)**

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\cos^3(x)\,dx$ **(1 punto)**

Solución: a) 1/4 b) 1/4

12) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2023. E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^3$.

a) Comprobar que las gráficas de dichas funciones en $[-1,0]$ sólo se cortan para $x=-1$ y $x=0$. Demostrar que en $[-1,0]$ $g(x)\geq f(x)$ **(1 punto)**

b) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de dichas funciones. **(1 punto)**

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) 1/12 unidades cuadradas.

13) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2023. E5.- (Análisis)

a) Determinar a y b de modo que las funciones $f(x)=x^2-a$ y $g(x)=(x-b)e^x$ tomen el mismo valor en un punto en el que ambas tengan un extremo relativo. **(1 punto)**

b) Demostrar que la función $f(x)=2x+senx$ solo se anula en el punto $x=0$. **(1 punto)**

Solución: a) Los valores buscados son *a = 1; b = 1.* b) www.ebaumatematicas.com

14) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2023. E6.- (Análisis)

a) Determínense el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de la función $f(x)=x(\ln x-1)$. **(1 punto)**

b) Calcúlese $\int x(\ln x-1)\,dx$ **(1 punto)**

Solución: a) Dominio = $(0,+\infty)$. *La función decrece en (0, 1) y crece en* $(1,+\infty)$. *La función tiene un mínimo relativo en x = 1. No presenta máximos relativos. b)* $\int x(\ln x-1)\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3x^2}{4}+K$

15) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2023. E7.- (Análisis)

Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}$. **(2 puntos)**

Solución: 1/6

16) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2023. E8.- (Análisis)

Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=xe^{-x}$ y el eje de abscisas cuando x varía en el intervalo $[-1,0]$. **(2 puntos)**

Solución: 1 unidad cuadrada.

17) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2022. E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Encuentre su dominio y calcule sus asíntotas, si las tiene. **(1 punto)**

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si los tiene. **(1 punto)**

Solución: a) $Dominio\ f(x)=\mathbb{R}-\{2\}$. $x=2$ *es asíntota vertical. No tiene asíntota horizontal. La asíntota oblicua tiene ecuación* $y=-x-2$. *b) La función decrece en* $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ *y crece en* $(0,2)\cup(2,4)$. *Las coordenadas del mínimo relativo son* $(0,0)$ *y las del máximo relativo son* $(4,-8)$.

18) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2022. E6.- (Análisis)

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$ **(1 punto)**

b) Estudiando previamente el signo de la función en el intervalo [0,3], hállese el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-9x$ y el eje de abscisas, cuando x varía en el intervalo [0,3]. **(1 punto)**

Solución: a) 1 b) La función es negativa en el intervalo (0, 3). Área = 81/4 u^2*.*

19) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2022. E7.- (Análisis)

a) Enuncie el teorema de Bolzano. **(1 punto)**

b) Averigüe si la función $f(x)=x+senx-2$ se anula en algún punto del intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ **(1 punto)**

Solución: b) Se puede aplicar y se anula en algún punto del intervalo.

20) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2022. E8.- (Análisis)

a) Estudie el signo de la función $f(x)=x^3-4x^2+3x$ en el intervalo $[0,2]$. **(0.5 puntos)**

b) Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-4x^2+3x$ y el eje de abscisas en el intervalo [0,2]. **(1.5 puntos)**

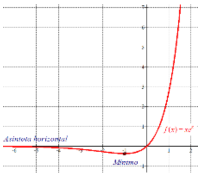
Solución: a) La función se anula en x = 0, es positiva en $(0,1)$*, se anula en x = 1 y es negativa en* $(1,2]$*.*
b) 1.5 u^2*.*

21) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2022. E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=xe^x$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

Solución: El dominio es todo $\mathbb{R}$. *No tiene asíntota vertical. Hay una asíntota horizontal en* $-\infty$ *con ecuación* $y=0$. *No hay asíntota oblicua. La función decrece en* $(-\infty,-1)$ *y crece en* $(-1,+\infty)$.

Tiene un mínimo relativo en x = –1. La función es cóncava (∩) en el intervalo $(-\infty,-2)$*. La función es convexa (∪) en el intervalo* $(2,+\infty)$*.La función presenta un punto de inflexión en x = –2.*



22) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2022. E6.- (Análisis)

Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^1 xe^x dx$ **(1 punto)**

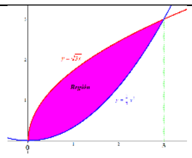
Solución: a) 1/2 b) 1

23) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2022. E7.- (Análisis)

Dadas las curvas de ecuaciones $y=\sqrt{3x},\ \ y=\dfrac{1}{3}x^2$.

a) Dibuje las curvas y señale el recinto plano comprendido entre ambas. **(1 punto)**

b) Calcule el área de dicho recinto. **(1 punto)**

Solución: a)  *b) 3 u²*.

24) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2022. E8.- (Análisis)

a) Halle el área del recinto del plano limitado por la gráfica de $f(x)=x^3-4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$. **(1 punto)**

b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x sen x}{2-2\cos x}$ **(1 punto)**

Solución: a) 4 u². b) 1

25) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2021. E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=x^5-5x-1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión. **(2 puntos)**

Solución: La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ *y decrece en* $(-1,1)$*. Tiene un máximo relativo en (–1, 3). Tiene un mínimo relativo en (1,–5).*

La función es cóncava (∩) en $(-\infty,0)$ *y convexa (∪) en* $(0,+\infty)$*. Tiene un punto de inflexión en (0, –1).*

26) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2021. E6.- (Análisis)

Calcular el valor de *m > 0* para el cual se verifica que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(mx)}{x^2}=2$ **(2 puntos)**

Solución: m = 2

27) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2021. E7.- (Análisis)

a) Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & , \ si \ \ x\neq 0\\ 0 & , \ si \ \ x=0\end{cases}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int x\ln\left(x^2\right)dx$. **(1 punto)**

Solución: a) La función es continua en $\mathbb{R}$ *b)* $\int x\ln\left(x^2\right)dx = x^2\ln|x|-\dfrac{x^2}{2}+K$

28) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2021. E8.- (Análisis)

Se considera la función $f(x)=x-\cos(x)$.

a) Demostrar que la ecuación *f(x) = 0* tiene al menos una solución en el intervalo $[0,\pi/2]$. **(1 punto)**

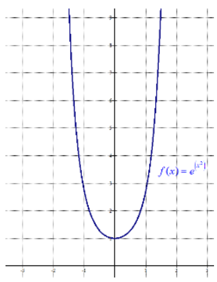
b) Probar que la ecuación *f(x) = 0* solo puede tener una solución en el intervalo $[0,\pi/2]$, de modo que la solución del apartado anterior es la única. **(1 punto)**

Solución: a) Aplicando el teorema de Bolzano b) Aplicando el teorema de Rolle

29) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2021. E5.- (Análisis)

Representar la función $f(x)=e^{\left(x^2\right)}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas. **(2 puntos)**

Solución: La función decrece en $(-\infty,0)$ *y crece en* $(0.+\infty)$. *Tiene un mínimo relativo en x = 0. La función es siempre convexa (∪). La función no tiene ninguna asíntota*



30) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2021. E6.- (Análisis)

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-\cos(3x)}{sen^2(x)}$ **(2 puntos)**

Solución: 5

31) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2021. E7.- (Análisis)

a) Dadas las funciones $f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2+8$, hallar los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los que $g(x)\geq f(x)$. **(0,5 puntos)**

b) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones f(x) y g(x). **(1,5 puntos)**

Solución: a) Se cumple solo en el intervalo [–2, 2]. b) $Área=\dfrac{64}{3}\simeq 21.3\,u^2$

32) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2021. E8.- (Análisis) Hallar los valores de a, b y c para los cuales el polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ cumple las siguientes condiciones:

- $P(0)=1$
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x=0$ es $m=1$.

- $\int_0^2 P(x)dx = 12$. **(2 puntos)**

Solución: Los valores son a = 3, b = c = 1.

33) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2020. E5.- (Análisis) Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en *x = 1* y que la recta tangente a su gráfica en el punto (–1, 0) es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

Solución: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

34) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2020. E6.- (Análisis)
Demuestre que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + senx$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

Solución: Aplicando el teorema de Bolzano y de Rolle.

35) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2020. E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x}$. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = \frac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}}$, hallar la función primitiva suya *F(x)* que verifique *F(0) = 3*. **(1 punto)**

Solución: a) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x} = \frac{1}{2}$ *b)* $F(x) = \ln\left(x^2 + e^{-x}\right) + 3$

36) Castilla y León. EBAU Extraordinaria 2020. E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1, 3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas *x = 1* y $x = 3$. **(1 punto)**

Solución: a) La función crece en $(0, e)$ *y decrece en* $(e, +\infty)$. *Tiene un máximo relativo en x = e.*

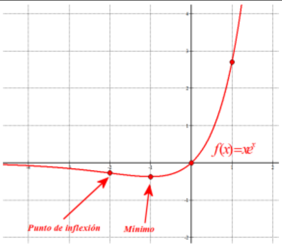
b) Es negativa en el intervalo $[1, 2)$ *y positiva en* $(2, 3]$. *El área vale 2* u^2.

37) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2020. E5.- (Análisis)
Representar gráficamente la función $f(x) = xe^x$, calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas. **(2 puntos)**

Solución: La asíntota horizontal es $y = 0$

La función decrece en $(-\infty, -1)$ *y crece en* $(-1, +\infty)$. *Tiene un mínimo relativo en* $x = -1$.

La función es cóncava en $(-\infty, -2)$ *y convexa en* $(-2, +\infty)$ *y presenta un punto de inflexión en* $x = -2$.



38) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2020. E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x-x}{e^x+senx-1}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(senx+\cos x\right)dx$. **(1 punto)**

Solución: a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x-x}{e^x+senx-1}=0$ *b)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(senx+\cos x\right)dx=2$

39) Castilla y León. EBAU Ordinaria 2020. E8.- (Análisis)

a) Calcule los puntos de corte de las gráficas de las funciones $f(x)=\dfrac{2}{x}$ y $g(x)=3-x$.

(0,5 puntos)

b) Sabiendo que en el intervalo $[1,2]$ se verifica que $g(x)\geq f(x)$ calcular el área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones en dicho intervalo. **(1,5 puntos)**

Solución: a) x = 1 y x = 2. b) $\acute{A}rea=\dfrac{3}{2}-2\ln 2=0{,}114\,u^2$

40) Castilla y León. EBAU Julio 2019. Opción A. E4.-

a) Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{senx}{e^x-\cos x}$. **(1 punto)**

b) Calcular a, siendo $a>1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f\left(x\right)=x$, $g\left(x\right)=ax$ y $x=1$ sea 1. **(1 punto)**

Solución: a) 1 b) a = 3

41) Castilla y León. EBAU Julio 2019. Opción B. E4.- Determínense los valores de a y de b para los cuales la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} a+\cos x & si \quad x\leq 0 \\ x^2-2bx+1 & si \quad x>0 \end{cases},$$

es continua y verifica que $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{3}$. **(2 puntos)**

Solución: a = 0 y b = 1

42) Castilla y León. EBAU Junio 2019. Opción A. E3.- Dada la función $f(x)=2x^3+3x^2-12x$, para $x\in\mathbb{R}$.

a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(1 punto)

b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2,2]$. **(1 punto)**

Solución: a) La función tiene un máximo local en x = –2 y un mínimo local en x = 1. Crece en $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ *y decrece en* $(-2,1)$. b) *El mínimo absoluto está en x = 1 y el máximo absoluto se alcanza en x = –2*

43) Castilla y León. EBAU Junio 2019. Opción A. E4.-

a) Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x\right)-1}{xsen\left(x\right)}$. **(1 punto)**

b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x)=4x$ y de $g(x)=x^3$ en el intervalo [0,2], probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$. **(1 punto)**

Solución: a) –1/2 b) 4 u².

44) Castilla y León. EBAU Junio 2019. Opción B. E3.- Sea el polinomio $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ del cual sabemos que *f(0)=1, f(1)=0* y que tiene extremos relativos en $x=0$ *y* $x=1$. Calcular a, b. **(2 puntos)**

Solución: a = 2, b = –3, c = 0 y d = 1

45) Castilla y León. EBAU Junio 2019. Opción A. E4.- a) Sea $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de *f(x)*, el eje OX y las rectas $x=0$ *y* $x=2$. **(1 punto)**

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,sen(x)}{3\cos(x)-3}$. **(1 punto)**

Solución: a) $\ln 11 = 2{,}39\,u^2$ *b) –2/3*

46) Castilla y León. EBAU Julio 2018. A. E3. Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{x}+ax+b$

a) Encontrar a y b para que la función tenga un mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{1}{2},6\right)$. **(1 punto)**

b) Suponiendo que $a = 4$ y $b = 2$, estudia su continuidad y, en el caso de tenerlas, sus asíntotas. **(1 punto)**

Solución: a) a = 4 y b = 2. b) f(x) es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$. *x = 0 es asíntota vertical, no tiene asíntota horizontal, y = 4x + 2 es asíntota oblicua.*

47) Castilla y León. EBAU Julio 2018. A. E4. Sea la función $f(x)=senx$

a) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)$ en los puntos $x=0$ y $x=\pi$. Encontrar el punto en que se cortan ambas rectas tangentes. **(1 punto)**

b) Hallar el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas de ecuaciones: $y=x$ e $y=-x+\pi$. **(1 punto)**

Solución: a) y = x. $y=-x+\pi$. *Se cortan en* $x=\dfrac{\pi}{2}$ *b)* $Área=\dfrac{\pi^2}{4}-2\ u^2$

48) Castilla y León. EBAU Julio 2018. B. E3.
De todos los rectángulos de perímetro 40 cm encontrar el que tiene la diagonal de menor longitud.

Solución: Es un cuadrado de lado 10 cm.

49) Castilla y León. EBAU Julio 2018. B. E4. a) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-senx}{e^x+x}$. **(1 punto)**

b) Encontrar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)=|x|-1$ y $g(x)=1-x^2$. **(1 punto)**

Solución: a) 3 b) Área = 7/3 u².

50) Castilla y León. EBAU Junio 2018. A. E3. Dada la función $f(x)=3x^4+x^3-1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que *f(x)* se anula. **(2 puntos)**

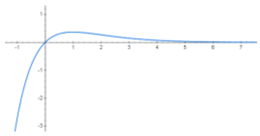
Solución: Decrece en $\left(-\infty,\frac{-1}{4}\right)$ *y crece en* $\left(\frac{-1}{4},0\right)\cup(0,+\infty)$. *Mínimo en x = –1/4. La función se anula en dos valores, uno antes de x = –1/4 y otro después de x = –1/4.*

51) Castilla y León. EBAU Junio 2018. A. E4. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=x\cos x$ y el eje de las x, cuando x pertenece al intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Solución: $\frac{\pi}{2}-1\,u^2$

52) Castilla y León. EBAU Junio 2018. B. E3. Dada la función $f(x)=x\cdot e^{-x}$, determínese su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

Solución: Dom f = R. No tiene asíntotas verticales, y = 0 es asíntota horizontal cuando x tiende a + infinito y no tiene asíntota oblicua. Crece en $(-\infty,1)$ *y decrece en* $(1,+\infty)$. *Máximo en x = 1. Cóncava (∩) en* $(-\infty,2)$ *y convexa en* $(2,+\infty)$. *Punto de inflexión en x = 2.*



53) Castilla y León. EBAU Junio 2018. B. E4.

a) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\ln(1+x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx$ **(1 punto)**

Solución: a) 1 b) $\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\frac{(\ln x)^3}{3}+K$

54) Castilla y León. EBAU Septiembre 2017. A. E3.

a) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x<0 \\ x^2+ax & si \quad x\geq 0\end{cases}$, calcular a para que *f* sea derivable en x = 0. **(1 punto)**

b) Hallar a, b y c para que la función $f(x)=ax^2+bsenx+c$ verifique $f(0)=0,\ f\,'(0)=1$ y $f\,''(0)=2$. **(1,25 puntos)**

Solución: a) a = 1 b) a = b = 1, c = 0

55) Castilla y León. EBAU Septiembre 2017. A. E4.

a) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{(x^2)}}{x}$ **(1 punto)**

b) Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2,\quad g(x)=x^2-2$. **(1,25 puntos)**

Solución: a) 1 b) El área es $\frac{8}{3}u^2$.

56) Castilla y León. EBAU Septiembre 2017. B. E3. Consideremos la función $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$.
Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica. **(2,25 puntos)**

Solución: El dominio de la función es R. No hay asíntotas verticales. La asíntota horizontal es $y=1$. *No hay asíntota oblicua. La función presenta un mínimo relativo en x = 0. Es decreciente en* $(-\infty,0)$ *y creciente en* $(0,+\infty)$.

57) Castilla y León. EBAU Septiembre 2017. B. E4.
a) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-senx}{x^2}$. **(1,25 puntos)**
b) Calcular $\int \ln(x)\,dx$. **(1 punto)**

Solución: a) 1 b) $\int \ln(x)\,dx = x\ln x - x + C$

58) Castilla y León. EBAU Junio 2017. A. E3.
a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente. **(1 puntos)**
b) Encontrar un intervalo en el que $P(x)=x^6+x^4-1$ tenga al menos una raíz. **(1,25 puntos)**

Solución: a) b) Aplicamos el teorema de Bolzano en el intervalo (0, 1)

59) Castilla y León. EBAU Junio 2017. A. E4.
a) Calcular la recta tangente a la curva $f(x)=4e^{x-1}$ en el punto $(1, f(1))$. **(1 punto)**
b) Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x)=x^3$ y la recta $y=4x$. **(1,25 puntos)**

Solución: a) $y=4x$ *b)* $Área=4\,u^2$

60) Castilla y León. EBAU Junio 2017. B. E3.
a) Dado el polinomio $P(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x+C$, hallar *C* para que el valor de *P(x)* en su mínimo relativo sea 1. **(1,25 puntos)**
b) Calcular $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$. **(1 punto)**

Solución: a) C = 1/3 b) 0

61) Castilla y León. EBAU Junio 2017. B. E4. Sea $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & si \quad x\le 1\\ a+\ln x & si \quad x>1\end{cases}$

a) Encontrar *a* para que la función sea continua. **(1,25 puntos)**
b) Hallar el área de la región delimitada por la gráfica de *f(x)* y las rectas $x=1$, $y=1$. **(1 punto)**

Solución: a) a = 0 b) El área es $\frac{2}{3}u^2$ *o bien es* $e-2\approx 0.72\,u^2$

Cataluña

1) Cataluña. PAU Extraordinaria 2024. Serie 3. 1.

Considere la función polinómica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.

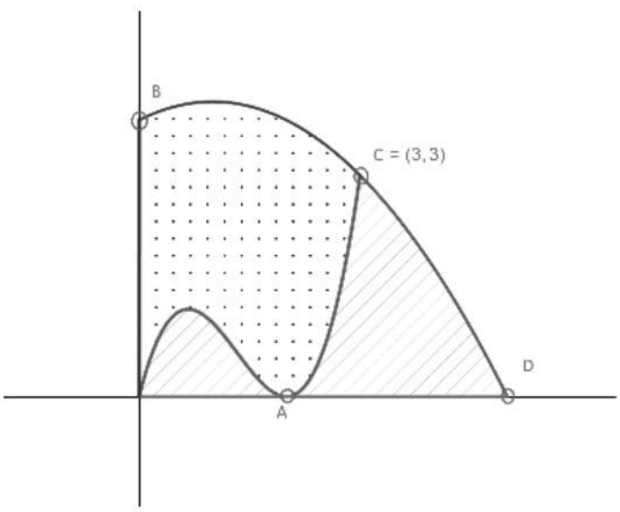
a) Justifique que su gráfica corta el eje de abscisas en un punto del intervalo [–2, 0]. Dé un intervalo de longitud 0,5 donde se encuentre este punto de corte. [1.25 puntos]

b) Estudie las zonas de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de $y = f(x)$. ¿Cuántos puntos de corte tiene exactamente la gráfica de esta función con el eje de abscisas? Justifique su respuesta. [1.25 puntos]

Solución: a) $[-1, -0.5]$. *b) La función f siempre crece. En particular, no tiene máximo ni mínimo. Por otra parte, la función, polinómica, no tiene asíntotas ni discontinuidades. En definitiva, su gráfica sólo puede tener un único punto de corte con el eje de abscisas que se encuentra, como hemos dicho, en el intervalo* $[-1, -0.5]$.

2) Cataluña. PAU Extraordinaria 2024. Serie 3. 3.

La clase de Èlia ha diseñado el siguiente logotipo para pintarlo en la pared del instituto:



La curva que pasa por el punto A es $y = f(x)$, con $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, y la que pasa por los puntos B, C =(3, 3) y D es $y = f(x)$, con $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

a) Calcule las coordenadas de los puntos A, B y D. [0,75 puntos]

b) Calcule el área de la zona punteada. [1,25 puntos]

c) Los alumnos quieren pintar la parte punteada de color azul y la parte rayada de color rojo. Sabiendo que el área total del logotipo es $\frac{175}{12}$ m^2, ¿de qué color necesitarán más pintura? [0,5 puntos]

Solución: a) A(2, 0), $B\left(0, \frac{15}{4}\right)$, *D(5, 0). b)9 unidades cuadradas. c) Necesitarán más pintura azul (9* u^2*) que roja (5.583* u^2*)*

3) Cataluña. PAU Extraordinaria 2024. Serie 3. 5.

Para cada punto (x, y) de la curva $y = e^{-2x}$, con $x > 0$ e $y > 0$, considere el rectángulo con vértices en los puntos (0, 0), (x, 0), (0, y) y (x, y).

a) Compruebe que, de entre todos estos rectángulos, el que tiene $x = \frac{1}{2}$ es el de área máxima. ¿Cuál es el valor de esta área? [1,5 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $y = e^{-2x}$ en el punto de abscisa x = 0, y su punto de corte con el eje de abscisas. [1 punto]

Solución: a) x = 0.5, y = 1/e. Área máxima = $\frac{1}{2e}u^2$. *b)* $y = -2x + 1$. *Punto de corte* $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

4) Cataluña. PAU Ordinaria 2024. Serie 1. 1.

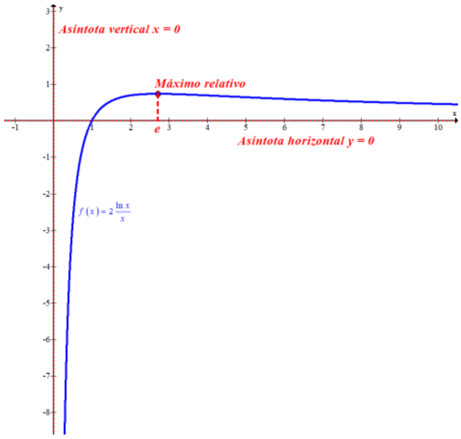
Considere la función $f(x) = 2\frac{\ln x}{x}$ definida para $x > 0$.

a) Estudie sus máximos y sus mínimos, y sus zonas de crecimiento y de decrecimiento. [1 punto]

b) ¿Esta función tiene asíntotas? Haga un esbozo de su gráfica. [1 punto]

c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. [0,5 puntos]

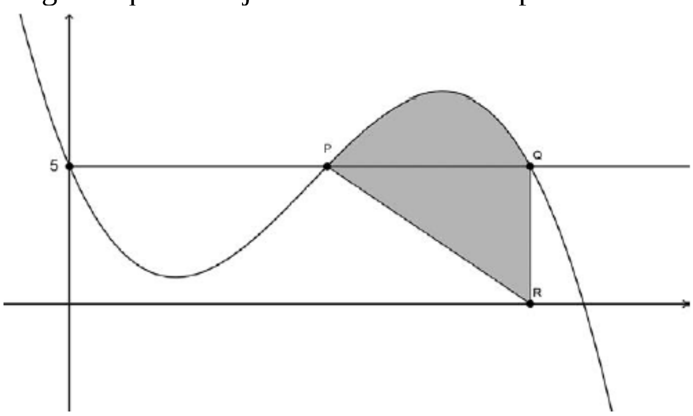
Solución: a) La función crece en $(0, e)$ *y decrece en* $(e, +\infty)$. *La función tiene un máximo relativo en* $x = e$. *b)* $x = 0$ *es asíntota vertical.* $y = 0$ *es asíntota horizontal cuando x tiende a* $+\infty$.



c) $y = 2x - 2$

5) Cataluña. PAU Ordinaria 2024. Serie 1. 3.

Joan encuentra entre los papeles de su abuelo un esbozo como el de la figura adjunta, donde se describe un terreno de regadío que ha dejado en herencia a su padre.



La curva de la gráfica es $y = f(x)$, con $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

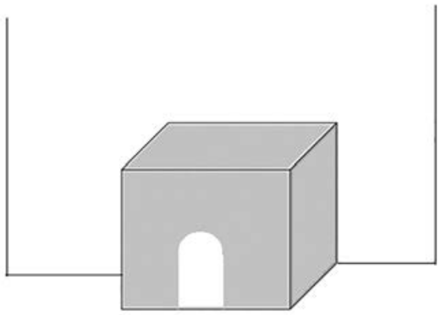
a) A partir de la expresión de $f(x)$, calcule las coordenadas de los puntos P, Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR. [1,25 puntos]

b) Calcule la superficie del terreno. [1,25 puntos]

Solución: a) P(1, 5) y el punto Q tiene coordenadas Q(6. 5) y R(6, 0). La ecuación de la recta PR es $y=-x+6$. *b) El terreno tiene una superficie de* $\frac{1025}{12}\simeq 85.4167\ u^2$.

6) Cataluña. PAU Ordinaria 2024. Serie 1. 5.

Se quiere construir un pequeño cobertizo de madera de 6 m^3 de volumen, en forma de prisma rectangular, adosado a la pared lateral de una casa, para guardar leña. Solo hay que construir, por tanto, el techo y tres paredes (la pared del fondo del cobertizo es la de la casa a la que está adosado). Además, se quiere que el cobertizo mida el triple de anchura que de profundidad. Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado. Una vez construido el cobertizo, añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 €.



a) Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función $C(x)=\frac{300}{x}+150x^2+35$, donde x es la profundidad del cobertizo en metros. [1,25 puntos]

b) Calcule cuáles han de ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste? [1,25 puntos]

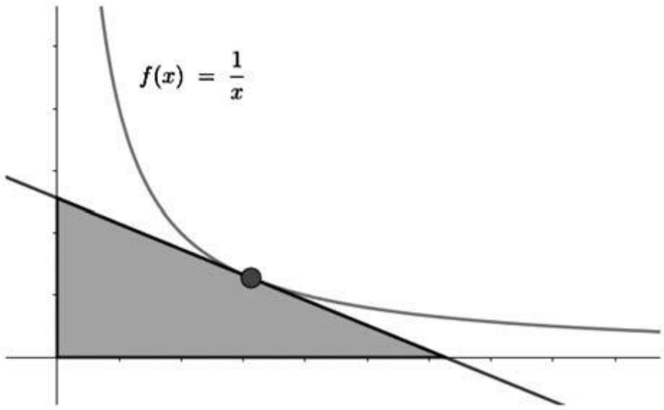
Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) Las medidas del cobertizo con coste mínimo son 1 metro de profundidad, 3 metros de anchura y 2 *metros de altura. El coste mínimo tiene un valor de 485 euros.*

7) Cataluña. PAU Extraordinaria 2023. Serie 2. 2. Considere la función $f(x)=\frac{1}{x}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=2$.[0,75 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=k$, donde k es un número real positivo. [0,75 puntos]

c) Compruebe que, tal y como puede verse en la figura de abajo, la recta del apartado b determina un triángulo de área constante con los semiejes positivos de coordenadas. Calcule este área. [1 punto]



Solución: a) La ecuación de la recta tangente es $y=\frac{-1}{4}x+1$. *b) La recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa* $x=k$ *tiene ecuación* $y=\frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k}$. *c) El valor del área es independiente del valor de k y siempre vale 2 unidades cuadradas.*

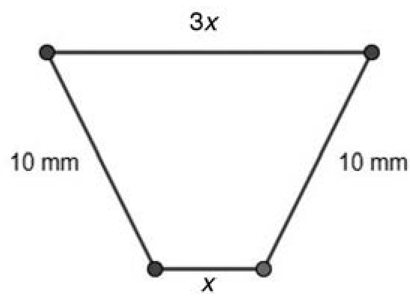
8) Cataluña. PAU Extraordinaria 2023. Serie 2. 4.
Considere la función *f(x)* definida por $f(x)=-3x+e^{2x^3-1}$.

a) Justifique que $f(x)=2$ tiene una solución en el intervalo $(-1,0)$. [1,25 puntos]

b) Sea la función $h(x)=-3x^2+e^{2x^3-1}$. Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones *f(x)* y *h(x)*. [1,25 puntos]

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) 0.5 unidades cuadradas.

9) Cataluña. PAU Extraordinaria 2023. Serie 2. 6. Queremos construir una pieza metálica que tenga por sección un trapecio isósceles con la base superior tres veces más larga que la base inferior. Los otros lados del trapecio miden 10 mm, tal y como se puede observar en la siguiente figura:



a) Exprese la altura del trapecio en función de la longitud *x* de la base inferior. [0,5 puntos]
b) Calcule la longitud de la base inferior del trapecio de forma que el área de la pieza sea máxima y encuentre el valor de esa área máxima. [2 puntos]

Solución: a) $a(x)=\sqrt{100-x^2}$, *siendo* $0\le x\le 10$

b) Un trapecio de base inferior $x=\sqrt{50}\simeq 7.1$ *mm tiene un área máxima con valor 100 mm*^{2}.

10) Cataluña. PAU Ordinaria 2023. Serie 1. 1. Calcule los coeficientes *a*, *b*, *c* y *d* de la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ si sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de inflexión (1, 0) es $y=-3x+3$ y que la función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa *x = 0*. [2,5 puntos]

Solución: Los valores buscados son a = 1, b = –3, c = 0 y d = 2.

11) Cataluña. PAU Ordinaria 2023. Serie 1. 3.

Sea $f\,'(x)=\begin{cases} x-1, & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-1}, & si \quad x>2 \end{cases}$ la derivada de una función derivable *f(x)* que pasa por el punto $A=(0,\ 3)$.

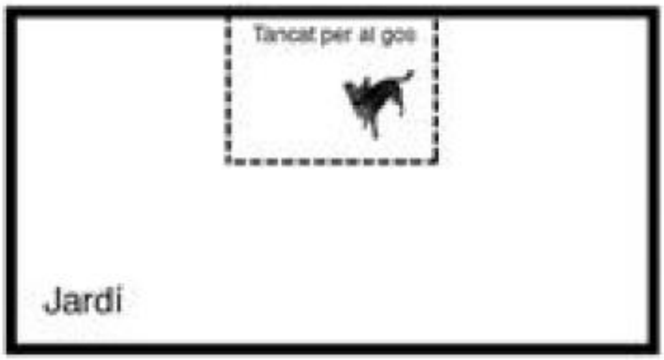
a) Calcule la función *f(x)*. [1,5 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función *f ´(x)* en el punto de abscisa *x = 3*. [1 punto]

Solución: a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+3, & si \quad x\le 2 \\ \ln|x-1|+3, & si \quad x>2 \end{cases}$ b) $y=\dfrac{-1}{4}x+\dfrac{5}{4}$

12) Cataluña. PAU Ordinaria 2023. Serie 1. 5.

Nuria tiene un jardín rectangular y quiere hacer un cercado (rectangular o cuadrado) de 8 m^2 para su perro. Ha pensado en poner el cercado junto al muro del jardín, tal y como se muestra en la figura de la derecha, para ahorrarse así uno de los cuatro lados. El precio de la valla que desea utilizar es de 2,5 €/m.



a) ¿Qué dimensiones debe tener el cercado para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste mínimo? [1,75 puntos]

b) Si mantiene la forma rectangular o cuadrada del cercado y hace que uno de los vértices del jardín coincida con un vértice del cercado, ¿cuántos euros se puede ahorrar? Razone cómo pondría el cercado y justifique con cálculos matemáticos las dimensiones de su propuesta. [0,75 puntos]

Solución: a) Las dimensiones del cercado con perímetro mínimo son x = 4 e $y=2$. *El coste de este cercado es de 20 €. b) Nos ahorramos 5.86 €*

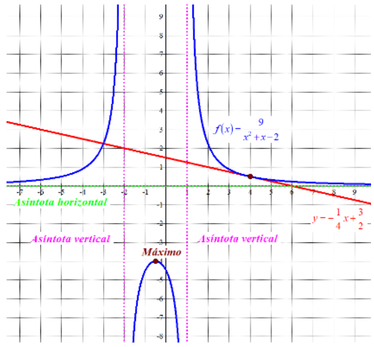
13) Cataluña. PAU Extraordinaria 2022. Serie 3. 2.

Considere la función $f(x)=\dfrac{9}{x^2+x-2}$.

a) Determine el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. [1,25 puntos]

b) Calcula la ecuación general de la recta tangente a la función *f(x)* en el punto de abscisa *x = 4*. Represente en un mismo gráfico la función *f(x)* y la recta tangente [1,25 puntos]

Solución: a) Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{-2,1\}$. $x=-2$ *y* $x=1$ *son asíntotas verticales,* $y=0$ *es asíntota horizontal. La función crece en* $(-\infty,-2)\cup(-2,-1/2)$ *y decrece en* $(-1/2,1)\cup(1,+\infty)$. *Las coordenadas del máximo relativo son* $\left(\dfrac{-1}{2},-4\right)$ *b) La recta tangente es:* $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$



14) Cataluña. PAU Extraordinaria 2022. Serie 3. 4.

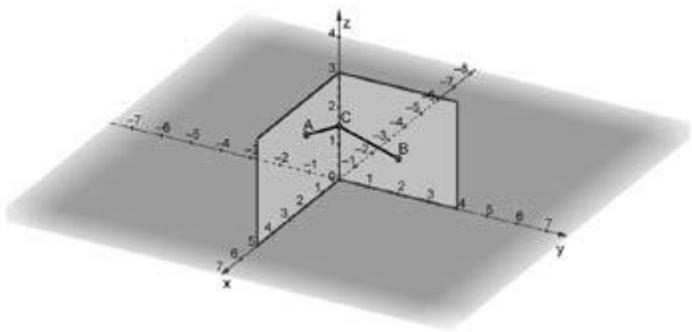
a) Considere la función $f(x)=\begin{cases}\ln(x), & si \;\; x\in(0,e)\\ ax+b, & si \;\; x\in[e,4)\end{cases}$, donde *a* y *b* son números reales. Encuentre el valor de *a* y de *b* para que la función sea continua y derivable en el intervalo (0, 4). [1,25 puntos]

b) Calcule la función *g(x)* que satisface $g'(x)=\dfrac{x^3}{9x^4+1}$ y que pasa por el punto (0,–1). [1,25 puntos]

Solución: a) Los valores buscados son $a=\dfrac{1}{e}$ *y* $b=0$. *b)* $g(x)=\dfrac{1}{36}\ln\left(9x^4+1\right)-1$

15) Cataluña. PAU Extraordinaria 2022. Serie 3. 6.

La siguiente imagen muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de modo que una pared está en el plano *y = 0* y la otra está en el plano *x = 0*.



En el punto A = (2, 0, 2) queremos colgar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, el cual está situado en la otra pared, en el punto B = (0, 2, 1). La conexión entre A y B se hará mediante un cable que pase por el punto C = (0, 0, h), situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Dado que la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une los dos aparatos, se quiere realizar una instalación con el mínimo de cable posible.

a) Compruebe que la longitud total del cable necesario, en función de la altura *h* por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ, viene dada por la expresión $L(h)=\sqrt{h^2-4h+8}+\sqrt{h^2-2h+5}$ [0,75 puntos]

b) Calcule las coordenadas del punto C por donde debe pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calcule esta longitud mínima del cable. [1,75 puntos]

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) La longitud mínima del cable se consigue pasando por C(0, 0, 1.5), siendo esta longitud mínima de 4.123 unidades de longitud.

16) Cataluña. PAU Ordinaria 2022. Serie 2. 1. Sea $f'(x)=3x^2-12x$ la derivada de una función $f(x)$.

a) Si sabemos que $f(x)$ corta el eje de abscisas en $x = 1$, calcule la expresión de la función $f(x)$. [0,75 puntos]

b) Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función. [0,75 puntos]

c) Se sabe que el àrea del recinto limitado por la curva $y = f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=a$, con $a > 2$, es $15u^2$. Calcule el valor de a. [1 punto]

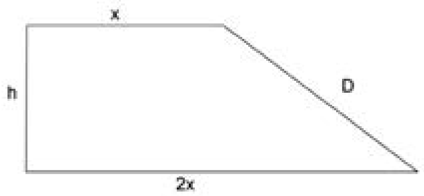
Solución: a) $f(x)=x^3-6x^2+5$ *b) La función es cóncava (∩) en* $(-\infty,2)$ *y convexa (∪) en* $(2,+\infty)$. *Tiene un punto de inflexión en x = 2.* *c) El valor buscado es a = 3.*

17) Cataluña. PAU Ordinaria 2022. Serie 2. 4. ***a)*** Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte el eje de ordenadas en el punto (0, 5), que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x + 1$. [1 punto]

b) Compruebe que la función $f(x)=-x^3+6x^2-16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo (0, 4). Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$. [1,5 puntos]

Solución: a) $g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+5$ *b) El área pedida es:* $Área=40u^2$

18) Cataluña. PAU Ordinaria 2022. Serie 2. 6. En el patio de una escuela se quiere crear una área de juego de 30 m^2 para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, de manera que la base mayor mida el doble que la base menor, como se indica en la figura, y que el lado oblicuo respecto a las bases (*D*) sea tan corto como sea posible.



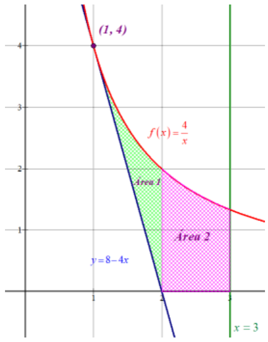
a) Justifique que se verifican las relaciones siguientes: $h=\frac{20}{x}$ y $D(x)=\sqrt{\frac{400}{x^2}+x^2}$ [1 punto]

b) Encuentre las dimensiones del trapecio para las que la longitud del lado *D* es mínima. [1,5 puntos]

Solución: a) www.ebaumatematicas.com *b) Las dimensiones del trapecio con longitud D mínima son:* $x=+\sqrt{20}\simeq 4.47$ *metros;* $h=\sqrt{20}\simeq 4.47$ *metros y* $D=2\sqrt{10}\simeq 6.325$ *metros.*

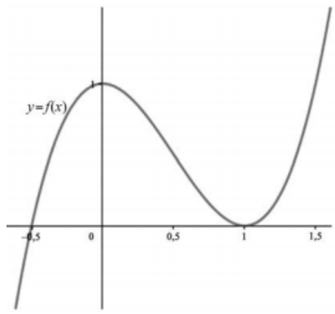
19) Cataluña. PAU Extraordinaria 2021. Serie 1. 2. a) Dada la función $f(x)=\frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$. Encuentre también la ecuación de la recta normal a $y = f(x)$ en ese mismo punto. [1,25 puntos]

b) Haga un esbozo de las gráficas de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calcule el área delimitada per estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta vertical $x = 3$. [1,25 puntos]

Solución: a) $y = -4x + 8$. $y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$ b) 

Área = 4ln3 – 2 u²

20) Cataluña. PAU Extraordinaria 2021. Serie 1. 4. a) En la figura se muestra la gráfica de la función *f(x)*. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de *f(x)*. Explique el razonamiento que ha seguido. [1,25 puntos]
b) Calcule los valores de *a* y *b* para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tenga un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$. [1,25 puntos]



Solución: a)  *b) a = 2, b = –3*

21) Cataluña. PAU Extraordinaria 2021. Serie 1. 6. Considere la función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.
a) Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de tenerlos, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. [1,5 puntos]
b) Compruebe que la ecuación *f(x) = 0* tiene una única solución en el intervalo (–2, 1). [1 punto]

Solución: a) La función presenta dos puntos críticos: x = 0, x = 3. En x = 0 es punto de inflexión y en x = 3 es mínimo relativo. b) Se aplica el teorema de Bolzano al intervalo (–2, 1).

22) Cataluña. PAU Ordinaria 2021. Serie 2. 1. Considere la parábola $y = 4 - x^2$ y un valor $a > 0$.
a) Compruebe que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = a$ es y calcule los puntos de corte de esta recta tangente con los ejes de coordenadas. [1,25 puntos]
b) Calcule el valor de *a* > 0 para que el área del triángulo determinado por esta recta tangente y los ejes de coordenadas sea mínima. [1,25 puntos]

Solución: a) $P(0, a^2+4)$, $Q\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)$ *b)* $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

23) Cataluña. PAU Ordinaria 2021. Serie 2. 4. Sigui la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ definida en el dominio $x > 0$, en què ln és el logaritme neperià.
a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y = f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt. [1 punt]

b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal. [0,5 punts]
c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y = f(x)$ i les rectes $x = 1$ i $x = e$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0 < x < 5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat. [1 punt]

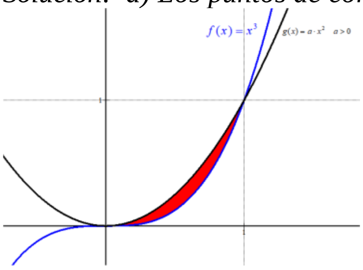
Solución: a) $x = e$. La función presenta un máximo relativo en $x = e$ b) $y = 0$ c) 0.5 u^2

24) Cataluña. PAU Ordinaria 2021. Serie 2. 6. Considere la función $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.
a) Estudie la continuidad, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. [1,25 puntos]
b) Demuestre que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones entre $x = -1$ y $x = 3$. [1,25 puntos]

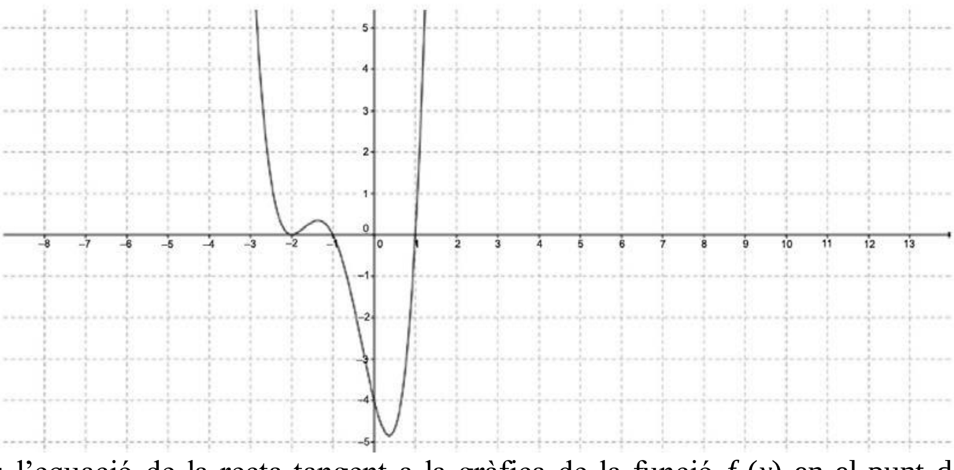
Solución: a) La función es continua. La función decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$.
La función presenta un mínimo relativo en el punto (1, –1). b) www.ebaumatematicas.com

25) Cataluña. PAU Extraordinaria 2020. Serie 4. 1. Siguin les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = a \cdot x^2$ en què a és un nombre real positiu.
a) Trobeu, en funció del paràmetre a, els punts de tall entre les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i feu un esbós de la regió limitada per les dues gràfiques. [1,25 punts]
b) Calculeu el valor de a perquè l'àrea compresa entre $y = f(x)$ i $y = g(x)$ sigui $\frac{27}{4} u^2$.[1,25 punts]

Solución: a) Los puntos de corte de ambas gráficas son P(0, 0) y Q(a, a^3) .b) El valor buscado de a es 3.



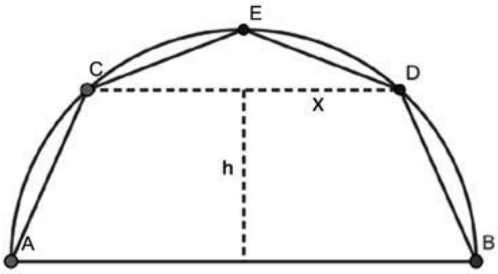
26) Cataluña. PAU Extraordinaria 2020. Serie 4. *3.* Sigui $f(x)$ una funció derivable la gràfica de la qual passa pel punt (0, 1). La gràfica de la seva derivada, $f'(x)$, és la que es mostra en la figura.



a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$. [1,25 punts]
b) Trobeu les abscisses dels punts singulars de la funció $f(x)$ i classifiqueu-los. [1,25 punts]

Solución: a) $y=-4x+1$ *b) La función tiene un punto de inflexión en x = –2, un máximo relativo en x = –1 y un mínimo relativo en x = 1.*

27) Cataluña. PAU Extraordinaria 2020. Serie 4. 5. Una empresa està treballant en el disseny d'unes càpsules de cafè. L'empresa ha construït la secció transversal de les càpsules inscrivint-la en una semicircumferència de radi 1, traçant a continuació una corda *CD* paral·lela al diàmetre *AB* i incorporant el punt *E* en el punt mitjà de l'arc *CD*. D'aquesta manera queda traçat el pentàgon *ACEDB*, tal com es mostra en la figura.



a) Expresseu en funció de x i h l'àrea del pentàgon *ACEDB*. [1,25 punts]
b) Quina ha de ser la distància (indicada en la figura per h) a què s'ha de situar la corda *CD* de *AB* per tal que l'àrea del pentàgon *ACEDB* sigui màxima? [1,25 punts]

Solución: a) $\acute{A}rea(x,h)=h+x$ *b) El área del pentágono es máxima para* $h=\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0.707$.

28) Cataluña. PAU Ordinaria 2020. Serie 1. 4. Considereu la funció $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa x = 2. [2,5 punts]

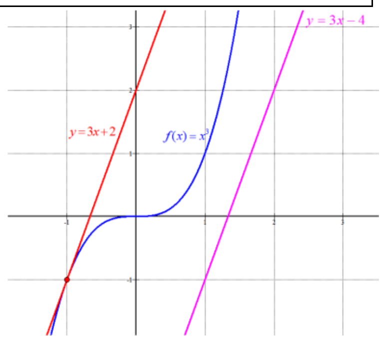
Solución: a = 1 y b = 4.

29) Cataluña. PAU Ordinaria 2020. Serie 1. 6. Considereu la funció $f(x)=x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x-y=4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes. [1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y=3x+2$. [1,25 punts]

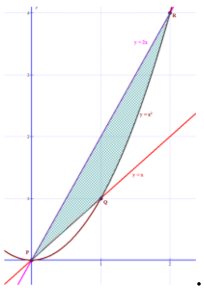
Solución: a) P(–1, –1). b) $\acute{A}rea=\frac{27}{4}=6,75\,u^2$



30) Cataluña. PAU Septiembre 2019. Serie 5. 1. Considera las rectas $y = x$ *e* $y = 2x$, y la parábola $y=x^2$.

a) Calcule los puntos de intersección entre las gráficas de las diferentes funciones y haga un esbozo de la región delimitada per las gráficas. [1 punto]

b) Calcule el área de la región del apartado anterior. [1 punto]

Solución: a) $P(0,0);\ Q(1,1)\ y\ R(2,4)$  . *b)* $Área = \frac{7}{6} = 1{,}17\ u^2$

31) Cataluña. PAU Septiembre 2019. Serie 5. 4. Considera la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

***a*)** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en que la recta tangente es horizontal. [1 punto]

***b*)** Calcula las coordenadas del punto de la gráfica de la función *f*(*x*) en que la pendiente de la recta tangente es máxima. [1 punto]

Solución: a) y = 1. b) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$

32) Cataluña. PAU Septiembre 2019. Serie 5. 6. Considera la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

***a*)** Calcula el dominio de la función *f*, los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. [1 punto]

***b*)** Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función *f*, las rectas $x = 1$ y $x = e$, y el eje de abscisas. [1 punto]

Solución: a) $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$*, Puntos de corte: P(1,0). La función crece en* $(-\infty, e)$ *y decrece en* $(e, +\infty)$.

33) Cataluña. PAU Junio 2019. Serie 1. 1. Las páginas de un libro deben de tener 600 cm^2 de superficie cada una, con unos márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm a cada lado. Calcula las dimensiones de la página que permite la superficie impresa más grande posible.

Solución: 21,9 y 27,38 cm.

34) Cataluña. PAU Junio 2019. Serie 1. 4. Considera la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$$

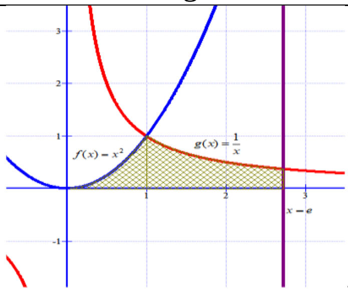
a) Calcula el dominio y estudia la continuidad de *f*. ¿Tiene asíntota vertical?

b) Observa que $f(-2) = \frac{-2}{3}$, $f(0) = 4$ y $f(2) = -10$. Razona si, a partir de esta información, podemos deducir que el intervalo (–2,0) contiene un cero de la función. ¿Podemos deducirlo para el intervalo (0,2)? Encuentra un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.

Solución: a) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}$*. Es continua en todo su dominio. Tiene asíntota vertical, es* $x = 1$.

35) Cataluña. PAU Junio 2019. Serie 1. 6. Considera las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y la recta $x = e$.

a) Haz un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcula el punto de corte de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.
b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución: a) 

. Se cortan en x = 1. b) 4/3 u^2.

36) Cataluña. PAU Septiembre 2018. Serie 3. 1.
Considere la función polinómica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.

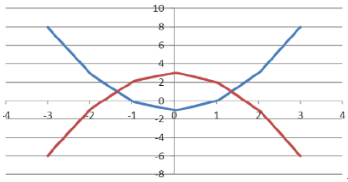
a) Calcule los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*, sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa *x* = 1 y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x* = 0 es la recta *y* = *x* + 3. [1 punto]
b) Para los valores *a* = 2, *b* = 1 y *c* = 3, calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos. [1 punto]

Solución: a) a = 2, b = 1, c = 3 b) Mínimo relativo en x = 1 y máximo relativo en x = 1/3

37) Cataluña. PAU Septiembre 2018. Serie 3. 6. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x^2$.

a) Esboce las gráficas de las parábolas *y* = *f*(*x*) e *y* = *g*(*x*) en un mismo sistema de ejes cartesianos y encuentre los puntos de corte con el eje de abscisas, los vértices y los puntos de corte entre las dos gráficas. [1 punto]
b) Calcule el área de la región del semiplano $y \geq 0$ comprendida entre las gráficas de *f*(*x*) y *g*(*x*). [1 punto]

Solución:

a) 
Puntos de corte: $\left(\sqrt{2},1\right)$ *y* $\left(-\sqrt{2},1\right)$ *b) Área* = $\dfrac{16\sqrt{2}-4}{3} \approx 6.21\,u^2$

38) Cataluña. PAU Junio 2018. Serie 1. 3. Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x + 3y = 0$.
b) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.

Solución: a) $27y + 9x - 1 = 0$ *b) En x = 0 hay un máximo y en x = 2/3 hay un mínimo.*

39) Cataluña. PAU Junio 2018. Serie 1. 5. Sea la función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

a) Compruebe que la función *f*(*x*) cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo $[0,\ 2]$ y que, por lo tanto, la ecuación *f*(*x*) = 0 tiene alguna solución en el intervalo (0, 2).

Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única. [1 punto]

b) A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$. [1 punto]

Solución: a) La función es continua en [0,2]. f(0) = –2 < 0 y f(2) = $\sqrt{2} > 0$ *. f(1) = 0. f '(x) > 0 por lo que la función es estrictamente creciente b) Área = 5/6* u^2.

40) Cataluña. PAU Junio 2018. Serie 5. 3. Sigui la funció $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$, amb a ≠ 0 i b ≠ 0.

a) Calculeu els valors de a i de b que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1, e)$.

b) Per al cas a = 3 i b = 5, calculeu l'asímptota horitzontal de la funció f quan x tendeix a +∞.

Solución: a) a=1; b=2 b) y = 0

41) Cataluña. PAU Junio 2018. Serie 5. 4. Se sabe que una función $f(x)$ está definida para todos los números reales y que es derivable dos veces. Se sabe también que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 2$, que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en este punto es $y = -124x + 249$ y que $f(-3) = -4$.

a) Calcule $f''(2)$, $f'(2)$ y $f(2)$. [1 punto]

b) Calcule $\int_{-3}^{2} f'(x)\,dx$. [1 punto]

Solución: a) f ''(2) = 0, f '(2) = –124 y f (2) = 1. b) 5

42) Cataluña. PAU Septiembre 2017. Serie 2. 4.

De las funciones $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ y $g'(x)$ se conocen los siguientes valores:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	–6

x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1
1	3	3

a) De la función $f(x)$ se sabe también que la pendiente de la recta tangente a un punto de abscisa x es $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Encuentre $f(x)$. [1 punto]

b) Calcule $(g \circ f)'(1)$. [1 punto]

Solución: a) $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 2$ *b) –6*

43) Cataluña. PAU Septiembre 2017. Serie 2. 6. Sea la función $f(x) = \dfrac{senx}{\cos^2 x}$.

a) Calcule una primitiva de la función $f(x)$. [1 punto]

b) Calcule el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre las abscisas $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$. [1 punto]

Solución: a) $F(x) = \dfrac{1}{\cos x} + C$ *b) Área =* $\sqrt{2} - 1 \approx 0.414\, u^2$

44) Cataluña. PAU Junio 2017. Serie 1. 3. Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - k}$, donde k es un parámetro real distinto de 0. Para los distintos valores del parámetro k:

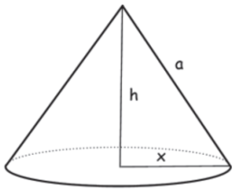
a) Calcule el dominio y las asíntotas de la función. [1 punto]

b) Calcule los puntos con un máximo o un mínimo relativo. [1 punto]

Solución: a) Si k < 0 el dominio es R, no tiene asíntotas verticales, la asíntota horizontal es y = 0. Si k > 0 el dominio es $\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{k},\sqrt{k}\right\}$, $x=\sqrt{k}$ *y* $x=-\sqrt{k}$ *son asíntotas verticales, la asíntota horizontal es y = 0.*

b) Máximo relativo en $\left(0,\frac{-1}{k}\right)$ *y no tiene mínimos relativos.*

45) Cataluña. PAU Junio 2017. Serie 1. 6. Considere un cono de 120 cm^3 de volumen que tiene una altura *h*, un radio de la base *x* y una arista *a*, como el de la siguiente figura:



***a*)** Compruebe que $a^2=\frac{260}{\pi}\cdot\frac{1}{h}+h^2$. [1 punto]

***b*)** Calcule la altura del cono que tiene la arista de longitud mínima. [1 punto]

Nota: Recuerde que el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro recto que tiene la misma base y la misma altura que el cono.

Solución: a) Aplicando el teorema de Pitágoras y la fórmula del volumen del cono b) $h=\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\approx 3.86\,cm$

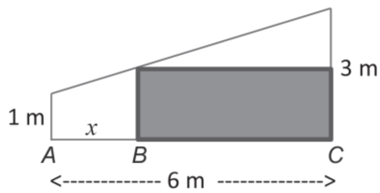
46) Cataluña. PAU Junio 2017. Serie 5. 3. Responda a las siguientes cuestiones:

a) Compruebe que la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ es la recta $y=4x-4$ y calcule los puntos de intersección de esta recta con los ejes de coordenadas. [1 punto]

***b*)** Calcule el área limitada por la curva del apartado anterior, la recta tangente en $x = 2$ y el eje de abscisas. [1 punto]

Solución: a) Los puntos de intersección son (0, –4) y (1, 0) b) Área = 2/3 u^2

47) Cataluña. PAU Junio 2017. Serie 5. 6. El croquis de debajo representa la pared de un desván con el techo inclinado, en la que se quiere construir un armario rectangular como el de la zona sombreada.



***a*)** Exprese el área del rectángulo en función de la longitud *x* del segmento *AB*. [1 punto]

***b*)** Determine las dimensiones del rectángulo si se quiere que tenga una superficie máxima y calcule esta superficie máxima. [1 punto]

Solución: a) $A(x)=-\frac{1}{3}x^2+x+6$ *b) x = 3/2 Área máxima = 27/4* u^2

Extremadura

1) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2024. 5.

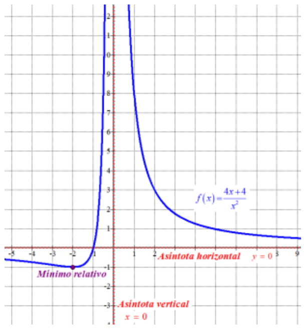
Se considera la función $f(x)=\dfrac{4x+4}{x^2}$.

a) Estudiar sus asíntotas, monotonía y extremos relativos. (1.5 puntos)

b) Representarla gráficamente. (0.5 puntos)

Solución: a) La recta $x=0$ es asíntota vertical. La recta $y=0$ es asíntota horizontal. No tiene asíntota oblicua. La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y crece en $(-2,0)$.

El mínimo relativo tiene coordenadas (–2, –1). b)



2) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2024. 6.

Calcular *a*, *b* y *c* para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-b & si\ x<0 \\ a+cx & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

cumpla los requisitos del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2]. (2 puntos)

Solución: Los valores buscados son a = 1, b = –1 y c = 1..

3) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2024. 7.

Hallar la integral $\displaystyle\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx$. (2 puntos)

Solución: $\displaystyle\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx=-3\ln|x|+4\ln|x-1|-2\ln|x+2|+C$

4) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2023. 8.

Determinar el área encerrada por las gráficas de las funciones

$f(x)=-x^3+3x^2+6$, $g(x)=2x+6$ (2 puntos)

Solución: 0.5 unidades cuadradas.

5) Extremadura. EBAU Ordinaria 2024. 5.

Hallar los intervalos de crecimiento y los puntos extremos de la función $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$.

(2 puntos)

Solución: La función decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ *y crece en* $(0,2)$. *La función presenta un mínimo relativo en (0, 0) y un máximo relativo en* $\left(2,\ \frac{4}{e^2}\right)$.

6) Extremadura. EBAU Ordinaria 2024. 6.
Calcular el valor de a para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen(x)-x\cdot e^x}{x^2-2\cos(x)+2} & si\ x\neq 0\\ a & si\ x=0\end{cases}$$

sea continua en $x = 0$. (2 puntos)

Solución: $a=\frac{-1}{2}$.

7) Extremadura. EBAU Ordinaria 2024. 7.
Hallar una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=(2x+5)\cdot e^{-2x}$ que cumpla $F(0) = 0$. (2 puntos)

Solución: $F(x)=(-x-3)e^{-2x}+3$.

8) Extremadura. EBAU Ordinaria 2024. 8.
Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-5x$ y $g(x)=-x$.
(2 puntos)

Solución: 8 unidades cuadradas.

9) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2023. 5. Calcular los coeficientes *a*, *b*, *c* y *d* del polinomio $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, sabiendo que cumple todas las condiciones siguientes:

- *p(x)* tiene un máximo relativo en $x = -1$, y
- la gráfica de *p(x)* tiene un punto de inflexión en (0, 0), y
- la recta tangente a la gráfica de *p(x)* en $x = 2$ tiene pendiente 3. (2 puntos)

Solución: Los valores buscados son a = 0, b = –1, c = 0, $d=\frac{1}{3}$.

10) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2023. 6. Encontrar los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}2x^2+ax+b & si\ x\leq 1\\ \ln(x) & si\ x>1\end{cases}$ sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el punto $(-1,\ 5)$ (2 puntos)

Solución: Los valores buscados son $a=\frac{-5}{2};\ b=\frac{1}{2}$.

11) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2023. 7. Determinar la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=(x+1)e^{x+1}$ que cumple $F(0) = -1$. (2 puntos)

Solución: $F(x)=xe^{x+1}-1$

12) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2023. 8. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+3x$ y $g(x)=x$. (2 puntos)

Solución: 0.5 unidades cuadradas.

13) Extremadura. EBAU Ordinaria 2023. 5.

a) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación (1.5 puntos)

$$x \cdot \cos(2x) = x^2 - 1.$$

b) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima. (0.5 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $c = 0.8....$

14) Extremadura. EBAU Ordinaria 2023. 6.

Calcular *a, b* y *c* para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si \ 0 \le x < 1 \\ cx & si \ 1 \le x \le 4 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. (2 puntos)

Solución: Los valores buscados son $a = \frac{-7}{4}; \ b = 1; \ c = \frac{1}{4}$.

15) Extremadura. EBAU Ordinaria 2023. 7.

Calcula la integral (2 puntos)

$$\int \frac{17 - x}{x^2 + x - 6} dx.$$

Solución: $\int \frac{17 - x}{x^2 + x - 6} dx == 3\ln|x - 2| - 4\ln|x + 3| + K$

16) Extremadura. EBAU Ordinaria 2023. 8. Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas. (2 puntos)

Solución: 8 unidades cuadradas

17) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2022. 5. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$$

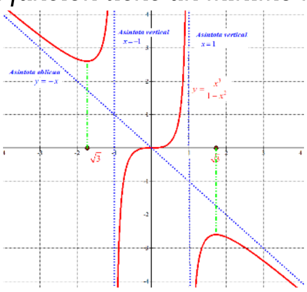
a) Estudiar asíntotas, monotonía y puntos extremos de *f(x)*. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de *f(x)*. (0,5 puntos)

Solución: a) $x = -1$; $x = 1$ *son asíntotas verticales. No existe asíntota horizontal.* $y = -x$ *es asíntota oblicua. La función decrece en* $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ *y crece en* $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

La función tiene un mínimo relativo en $x = -\sqrt{3}$ *y un máximo relativo en* $x = \sqrt{3}$.

b)



18) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2022. 6. Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$. (2 puntos)

Solución: Los puntos de inflexión tienen coordenadas $A\left(-1,-1-\ln 2\right)$ *y* $B\left(1,1-\ln 2\right)$

19) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2022. 7. Calcular la integral $\int \frac{1}{x^3-x}dx$. (2 puntos)

Solución: $\int \frac{1}{x^3-x}dx = -\ln x + \frac{1}{2}\ln\left|x-1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|x+1\right| + C$

20) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2022. 8. Hallar el parámetro positivo $a \in \mathbb{R}$ tal que el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f\left(x\right)=x^2$ y $g\left(x\right)=ax$ sea 4/3. (2 puntos)

Solución: El valor buscado es a = 2.

21) Extremadura. EBAU Ordinaria 2022. 5. Calcular el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot e^x - senx}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ a & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Sea continua en $x = 0$. (2 puntos)

Solución: a = 1

22) Extremadura. EBAU Ordinaria 2022. 6. Dada la función $f\left(x\right)=\left|x+1\right|+\left|x-2\right|$.

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función. (1 punto)
b) Calcular el intervalo donde la función permanece constante. (1 punto)

Solución: a) La función es continua en todo $\mathbb{R}$ *y derivable en* $\mathbb{R}-\left\{-1,2\right\}$ *b)* $\left[-1,2\right]$

23) Extremadura. EBAU Ordinaria 2022. 7. Determinar la función *f(x)* tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas y su derivada sea $f'\left(x\right)=\left(2x+1\right)e^{-x}$ (2 puntos)

Solución: $f\left(x\right)=-2xe^{-x}-3e^{-x}+3$

24) Extremadura. EBAU Ordinaria 2022. 8. Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $f\left(x\right)=sen\left(2x\right)$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=\pi$. (2 puntos)

Solución: Área = 2 u^2.

25) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2021. 5.
a) Estudiar la continuidad de la siguiente función *f(x)* para $x \neq 0$ (con $a \in \mathbb{R}$): (0,5 puntos)

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1-x}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ a & si \quad x = 0 \end{cases}$$

b) Calcular el valor de *a* para que la función *f(x)* sea continua en $x = 0$. (1,5 puntos)

Solución: a) La función f(x) es continua para cualquier valor x ≠ 0. La continuidad en x = 0 depende del valor de a. b) a = 1/2

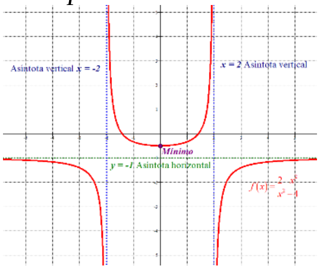
26) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2021. 6. Sea la función $f\left(x\right)=\frac{2-x^2}{x^2-4}$.

a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de la función *f(x)*. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de *f(x)*. (0,5 puntos)

Solución: a) Las recta x = –2 y x = 2 son asíntotas verticales. La recta y = –1 es asíntota horizontal. No tiene asíntota oblicua. La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ *y crece en* $(0,2)\cup(2,+\infty)$. *La función presenta un mínimo relativo en x = 0*

b)



27) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2021. 7. Resolver la integral $\int \ln^2(x)\,dx$. (2 puntos)

Solución: $\int \ln^2(x)\,dx = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + K$

28) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2021. 8. Dadas las funciones $f(x) = 3x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$, calcular el área de la región limitada por sus gráficas. (2 puntos)

Solución: $\text{Área} = \dfrac{125}{24} \simeq 5.208\, u^2$

29) Extremadura. EBAU Ordinaria 2021. 5. Estudiar asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento), extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{-x^2}$. (2 puntos)

Solución: No tiene asíntotas verticales ni oblicuas. La asíntota horizontal es $y = 0$. *La función crece en* $(-\infty,0)$ *y decrece en* $(0,+\infty)$. *La función tiene un máximo relativo en x = 0. La función presenta puntos de inflexión (cambio de curvatura) en* $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ *y en* $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$

30) Extremadura. EBAU Ordinaria 2021. 6. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en al menos 2 puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que lo justifiquen. (2 puntos)

Solución: Aplicamos el teorema de Bolzano en los intervalos [0, 1] y [–2, –1]

31) Extremadura. EBAU Ordinaria 2021. 7. Calcular la integral racional

$$\int \frac{3x}{x^2 + x - 2}\,dx \qquad \text{(2 puntos)}$$

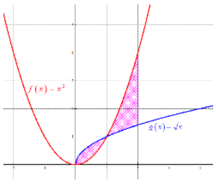
Solución: $\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx = \ln\left((x+2)^2\,|x-1|\right) + C$

32) Extremadura. EBAU Ordinaria 2021. 8. Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Representar la región plana delimitada por las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)* en el intervalo [0, 2]. (0,5 puntos)

b) Calcular el área de la región anterior. (1,5 puntos)

Solución:

a) 

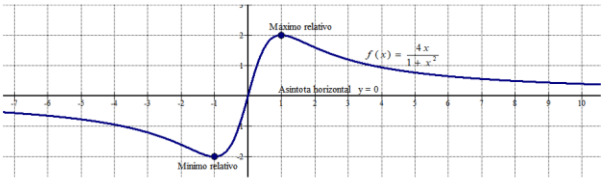
b) Área = $\dfrac{10-4\sqrt{2}}{3} \simeq 1.45\,u^2$

33) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2020. 5. Sea la función $f(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$.

(a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x)$. (1,5 puntos)

(b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior, represente de forma aproximada la gráfica de la función *f(x)*. (0,5 puntos)

Solución: a) Solo tiene asíntota horizontal: $y=0$. *La función decrece en* $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ *y crece en* $(-1,1)$. *Tiene un mínimo relativo en x = –1 y un máximo relativo en x = 1.*

b) 

34) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2020. 6. Calcule los valores de a y b sabiendo que la siguiente función *f(x)* es derivable en todo su dominio: (2 puntos)

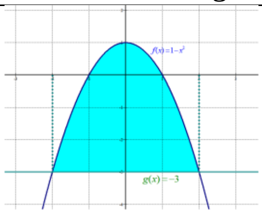
$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & si \quad x\le 1 \\ -2+\ln(x) & si \quad x>1 \end{cases}$$

Solución: Los valores buscados son $a=-3$ *y* $b=-1$

35) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2020. 7. Sean las funciones $f(x)=1-x^2$ y $g(x)=-3$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (0,5 puntos)

b) Calcule el área de la región anterior. (1,5 puntos)

Solución: 

Área $=\dfrac{32}{3}=10,66\,u^2$

36) Extremadura. EBAU Extraordinaria 2020. 8. Calcule la integral (2 puntos)

$$\int \frac{3x}{x^2-x-2}\,dx$$

Solución: $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-x-2}\,dx=\ln(x-2)^2|x+1|+K$

37) Extremadura. EBAU Ordinaria 2020. 5.

(a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x)=e^x\left(x^2-x+1\right)$. (1 punto) (b)Justifique si existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$. (1 punto)

Solución: a) Crece en $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ *y decrece en* $(-1,0)$*.Tiene un máximo local en* $x=-1$ *y un mínimo en* $x=0$*. b) Teorema de Bolzano.*

38) Extremadura. EBAU Ordinaria 2020. 6. Considere la función $f(x)$, donde $a\in\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^x}{x} & si \quad x\neq 0\\ a & si \quad x=0\end{cases}$$

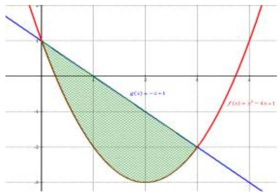
a) Calcule el valor de a para que la función sea continua. (1 punto)
b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x=1$. (1 punto)

Solución: a) a = –1. b) $y=-x+2-e$

39) Extremadura. EBAU Ordinaria 2020. 7. Dadas las funciones $f(x)=x^2-4x+1$ y $g(x)=-x+1$, se pide:

a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas. (0,5 puntos)
b) Calcule el área de dicha región. (1,5 puntos)

Solución: $\text{Área}=4{,}5\,u^2$



40) Extremadura. EBAU Ordinaria 2020. 8. Resuelva la integral $\displaystyle\int\frac{-x+7}{x^2+x-2}dx$ (2 puntos)

Solución: $\displaystyle\int\frac{-x+7}{x^2+x-2}dx=2\ln|x-1|-3\ln|x+2|+C$

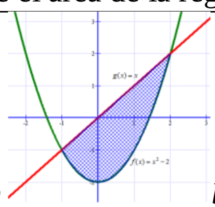
41) Extremadura. EBAU Julio 2019. Opción A. 3. Sea la función $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & si\ x<0\\ e^{x} & si\ x\geq 0\end{cases}$

(a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. **(1,5 puntos)**
(b) Estudie si existe un extremo relativo de $f(x)$ en $x=0$. **(0,5 puntos)**

Solución: (a) Es continua en $\mathbb{R}$ *y es derivable en* $\mathbb{R}-\{0\}$*. (b) Un mínimo relativo en x = 0.*

42) Extremadura. EBAU Julio 2019. Opción A. 4. Dadas las funciones $f(x)=x^2-2$ y $g(x)=x$.

(a) Represente la región plana encerrada por $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**
(b) Calcule el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

Solución: a)  *b)* $4{,}5\,u^2$

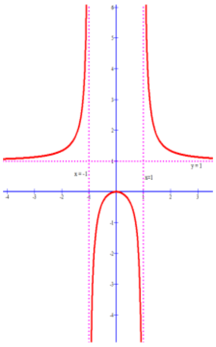
43) Extremadura. EBAU Julio 2019. Opción B. 3. Sea la función

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}.$$

(a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de *f(x)*. **(1,5 puntos)**

(b) Represente la gráfica de *f(x)* utilizando el apartado anterior. **(0,5 puntos)**

Solución: a) Las asíntotas verticales son $x=1$ y $x=-1$. *La asíntota horizontal es* $y=1$. *La función crece en* $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ *y decrece en* $(0,1)\cup(1,+\infty)$. *Tiene un máximo relativo en x = 0.*



44) Extremadura. EBAU Julio 2019. Opción B. 4. Calcule la primitiva F(x) de la función $f(x)=\frac{x-3}{x^2-1}$ **(2 puntos)**

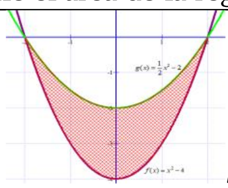
Solución: $F(x)=\ln\frac{(x+1)^2}{|x-1|}+C$

45) Extremadura. EBAU Junio 2019. Opción A. 4. Sean las funciones $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**

b) Calcule el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

Solución:



b) 16/3 u²

46) Extremadura. EBAU Junio 2019. Opción B. 3. Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x)=x^2e^x$. **(2 puntos)**

Solución: La función crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ *y decrece en* $(-2,0)$

47) Extremadura. EBAU Junio 2019. Opción B. 4. Resuelve la integral

$$\int\frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx$$ **(2 puntos)**

Solución: $2\ln|x-1|+3\ln|x+3|+C$

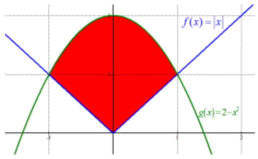
48) Extremadura. EBAU Julio 2018. A. 3. Sea la función

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & si \quad x\ge 0, \\ -x & si \quad x<0. \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f(x)*. **(1 punto)**
(b) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de *f(x)* y justifique si en el punto $x = 0$ la función *f(x)* tiene un mínimo relativo. **(1 punto)**
(c) Dibuje el recinto plano limitado entre las funciones $f(x)=|x|$ y $g(x)=2-x^2$ y calcule su área. **(1,5 puntos)**

Solución: (a) La función es continua en $\mathbb{R}$ *y es derivable en* $\mathbb{R}-\{0\}$

(b) La función decrece en $(-\infty,0)$ *y crece en* $(0,+\infty)$ *y presenta un mínimo relativo en x = 0.*

(c)  *Área = 7/3 = 2.33 u*^{2}.

49) Extremadura. EBAU Julio 2018. B. 3. Sea la función $f(x)=x\ln(x)$ para $x > 0$.
(a) ¿Se puede definir *f(0)* para que *f(x)* sea continua por la derecha de $x = 0$? **(1 punto)**
(b) Estudie los máximos y mínimos relativos de *f(x)* para $x > 0$. **(0'5 puntos)**
(c) Halle, si existe, la recta tangente a *f(x)* en $x = 1$. **(0'5 puntos)**
(d) Calcule una primitiva *F(x)* de la función $f(x)=x\ln(x)$. **(1'5 puntos)**

Solución: (a) f(0) = 0 *(b) Mínimo en* $x=e^{-1}$ *(c)* $y = x-1$ *(d)* $F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+K$

50) Extremadura. EBAU Junio 2018. A. 3.
(a) Enuncie el teorema de Bolzano y demuestre, usando dicho teorema, que la función $f(x)=x^3+x-3$ tiene una raíz real positiva. **(1,5 puntos)**
(b) Calcule la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=(x+1)e^{-x}$ que cumpla la condición $F(0)=0$ **(2 puntos)**

Solución: (a) Aplicando el teorema de Bolzano existe un valor $c\in(0\ ,\ 2)$ *donde f(c) = 0*

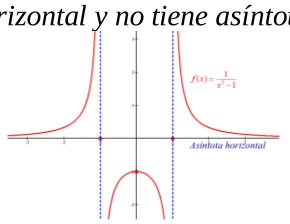
(b) $F(x)=-xe^{-x}-2e^{-x}+2$

51) Extremadura. EBAU Junio 2018. B. 3.
(a) Estudie el dominio, las asíntotas y máximos y mínimos de la función **(1,5 puntos)**

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

(b) Represente la gráfica de *f(x)* utilizando los datos del apartado anterior. **(0,5 puntos)**
(c) Calcule una primitiva *F(x)* de la función *f(x)*. **(1,5 puntos)**

Solución: (a) Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$, *x = –1, x = 1 son asíntotas verticales, y = 0 es asíntota horizontal y no tiene asíntota oblicua. La función presenta un máximo en x = 0. No tiene mínimos.*

(b) 

(c) $F(x)=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+K$

52) Extremadura. EBAU Julio 2017. A. 3.
(a) Enuncie el teorema del valor medio de Lagrange. **(0,75 puntos)**

(b) Aplicando a la función $f(x)=1/x^2$ el anterior teorema, pruebe que cualesquiera que sean los números reales 1 < a < b se cumple la desigualdad $a+b<2a^2b^2$. **(1,25 puntos)**

Solución: www.ebaumatematicas.com

53) Extremadura. EBAU Julio 2017. A. 4. Calcule una primitiva *F(x)* de la función

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}-e^{-x}+2x\cos\left(x^2\right)$$

que cumpla *F(0) = 0.* **(2 puntos)**

Solución: $F(x)=\ln\left(x^2+1\right)+e^{-x}-sen\left(x^2\right)-1$

54) Extremadura. EBAU Julio 2017. B. 3. Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función

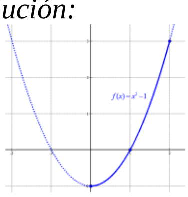
$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$$ **(2 puntos)**

Solución: Dominio = $\mathbb{R}-\{0,-1\}$. *La función es **positiva** en* $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$ *y es **negativa** en* $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)$. *x = 0, x = –1 son asíntotas verticales. y = 0 es asíntota horizontal.*

55) Extremadura. EBAU Julio 2017. B. 4.- (a) Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)=x^2-1$ definida en el intervalo cerrado [0,2]. **(0,5 puntos)**

(b) Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^2-1$, el eje OX y las rectas *x = 0, x = 2.* **(1,5 puntos)**

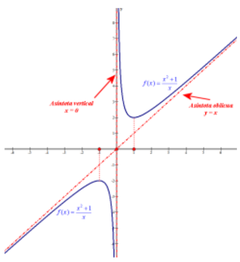
Solución:

(a)  *(b) Área = 2 u²*.

56) Extremadura. EBAU Junio 2017. A. 3.- (a) Estudie el dominio de definición, los extremos relativos y las asíntotas de la función $f(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$ **(1,5 puntos)**

(b) Teniendo en cuenta los datos obtenidos en el apartado anterior, represente, aproximadamente, la gráfica de la función *f(x).* **(0,5 puntos)**

Solución: (a) El dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$, *la función presenta un máximo relativo en x = –1 y un mínimo relativo en x = 1. x = 0 es asíntota vertical, no tiene asíntota horizontal,* $y=x$ *es la asíntota oblicua.*

(b) 

57) Extremadura. EBAU Junio 2017. A. 4.- Utilizando el cambio de variable $1+x^2=t^2$, calcule una primitiva *F(x)* de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ que cumpla *F(0) = 0.* **(2 puntos)**

Solución: $F(x)=\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}{3}-\sqrt{1+x^2}+\dfrac{2}{3}$

58) Extremadura. EBAU Junio 2017. B. 3.- Calcule, aplicando la regla de L´Hôpital, el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)+(1-x)^2-1}{\ln(\cos x)}$$ **(2 puntos)**

Solución: –2

59) Extremadura. EBAU Junio 2017. B. 4.- (a) Calcule los puntos en los que las dos curvas $y=e^x$, $y=-x^2$ cortan a la recta *x = 0* y a la recta $x=1$. **(0,5 puntos)**

(b) Calcule el área de la región plana limitada por las curvas $y=e^x$, $y=-x^2$, y por las rectas *x = 0,* $x=1$. **(1,5 puntos)**

Solución: (a) Con y = e^x *los puntos son (0, 1) y (1, e). Con y =* $-x^2$ *los puntos son (0, 0) y (1, –1)*

(b) Área = $e-\dfrac{2}{3}=2,05\,u^2$

Galicia

1) Galicia. ABAU Extraordinaria 2024. 3. Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+bx-1 & si\ x\le 0 \\ \dfrac{k-xe^x}{x} & si\ x>0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en x = 0 para cualquier valor de b?
b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en x = 0?

Solución: a) k = 0 b) k = 0 y b = –1.

2) Galicia. ABAU Extraordinaria 2024. 4. Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y=-2x$ y la parábola $y=ax^2+4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

Solución: El valor buscado es a = 2.

3) Galicia. ABAU Ordinaria 2024. 3. Análisis. (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.
b) Calcule $\int x^3e^{x^2}dx$

Solución: a) Está en los libros de texto. b) $\int x^3e^{x^2}dx=\frac{e^{x^2}}{2}\left(x^2-1\right)+C$.

4) Galicia. ABAU Ordinaria 2024. 4. Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{x^2}$

Solución: a) ½. b) 0.

5) Galicia. ABAU Extraordinaria 2023. 3. Análisis.

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.
b) Explique si $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

Solución: a) b) El valor buscado es $c=+\frac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1)$

6) Galicia. ABAU Extraordinaria 2023. 4. Análisis.

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int(\sin x)^5\cos x dx$ y $\int(\ln x)/x dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x dx = 3/2$.

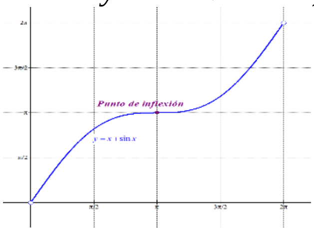
Solución: a) $\int (\sin x)^5 \cos x dx = \frac{(\sin x)^6}{6} + K$. $\int (\ln x)/x dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + K$ *b) Los valores buscados son* $B = e^2$ *y* $B = e^{-2}$.

7) Galicia. ABAU Ordinaria 2023. 3. Análisis.

a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0,2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

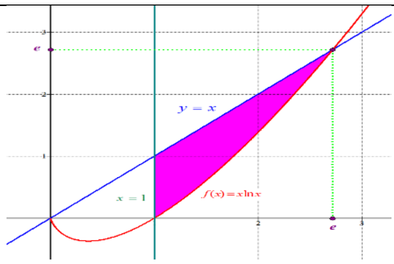
Solución: a) Los valores buscados son a = 3 y b = –3. b) No tiene máximos ni mínimos.



Tiene un punto de inflexión en x = π.

8) Galicia. ABAU Ordinaria 2023. 4. Análisis.

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1, y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota**: ln$x$ es el logaritmo neperiano de x.



Solución: Área = $\frac{e^2 - 3}{4} \simeq 1.097 u^2$.

9) Galicia. ABAU Extraordinaria 2022. 3. Análisis.

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \leq 1 \\ ax^2 + bx & si \;\; x > 1 \end{cases}$, sea derivable.

Solución: a) Las coordenadas de los vértices del triángulo son A(1, 0), B(3, 0) y C(3, 8).
b) Los valores buscados son a = –1, b = 2.

10) Galicia. ABAU Extraordinaria 2022. 4. Análisis.

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ b) $\int (\sin x)\sin(\cos x)\,dx$ c) $\int x^2 \sin x dx$ d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$

Solución: a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+K$ *b)* $\int (\sin x)\sin(\cos x)\,dx = \cos(\cos x)+K$

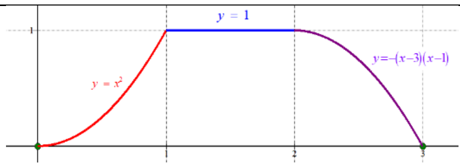
c) $\int x^2 \sin x dx = -x^2\cos x + 2x senx + 2\cos x + K$ *d)* $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + K$

11) Galicia. ABAU Ordinaria 2022. 3. Análisis.

a) Calcule los límites $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$, donde *lnx* es el logaritmo neperiano de *x*.

b) Dibuje la gráfica de una función *f* continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0)=0$, *f(3) = 0, f ´´ > 0* en el intervalo (0, 1), *f ´´ < 0* en el intervalo (2, 3) y *f* es constante en el intervalo (1, 2).

Solución: a) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\sin x} = 1$; $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ *b)*



12) Galicia. ABAU Ordinaria 2022. 4. Análisis.
Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

Solución: $f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 2x$

13) Galicia. ABAU Extraordinaria 2021. 3. Análisis.
a) Enuncie el teorema de Bolzano.
b) Obtenga los valores de *a*, *b* y *c* que hacen que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpla $f(0) = 1$ y tenga extremos relativos en $x = \pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

Solución: b) Los valores buscados son a = 1, b = 0 y c = 1. En x = 1 hay un mínimo relativo y en x = –1 hay un máximo relativo

14) Galicia. ABAU Extraordinaria 2021. 3. Análisis
a) Enuncie el teorema de Rolle.
b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = x + 6$ y

$$g(x) = \begin{cases} -2x & si \quad x < 0 \\ x^2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Solución: b) El área es 19.5 u²

15) Galicia. ABAU Ordinaria 2021. Análisis. 3. De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

Solución: El vértice C que hace máxima el área del rectángulo es C(2, 1). El resto de vértices son A(0, 0), B(2, 0) y D(0, 1)

16) Galicia. ABAU Ordinaria 2021. Análisis. 4. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si \quad x\le 0 \\ -x^2-x-1 & si \quad x>0 \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y=4x-7$ e $y=1$.

Solución: Área = 6 u^2.

17) Galicia. ABAU Extraordinaria 2020. 3. Análisis

Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a-\cos x}{x} & si \quad x<0 \\ bx & si \quad x\ge 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

Solución: a = 1 y b = 1/2.

18) Galicia. ABAU Extraordinaria 2020. 4. Análisis:

a) Calcule el área encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}x+1 & si \quad x<0 \\ (x-1)^2 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$.

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Solución: a) Área = $\frac{11}{6}u^2$; *b)* $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}+K$

19) Galicia. ABAU Ordinaria 2020. Análisis. 3.

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f.

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}=\dfrac{1}{2}$. *b) La función decrece en* $(0,1)$ *y crece en* $(1,+\infty)$.
Tiene un mínimo en el punto P(1, –1). No tiene máximos relativos.

20) Galicia. ABAU Ordinaria 2020. Análisis. 4.

a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & si \quad x\le 0 \\ x^2+bx+c & si \quad x>0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable en $x=0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)\,dx$.

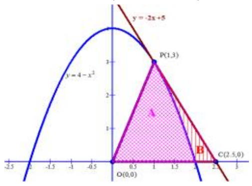
Solución: a) b = 2, c = 1. b) $\int_1^2 x(\ln x-1)\,dx=-0.8637$

21) Galicia. ABAU Julio 2019. Opción A. 2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x)=x^2\ln x$

b) Consideremos un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen O (0,0) y el punto P (1,3), uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en P (1,3) a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

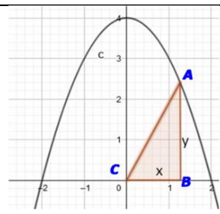
Solución: a) Su dominio es $(0, +\infty)$. *La función presenta un mínimo local en* $x = e^{-\frac{1}{2}}$. *Decrece en* $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ *y crece en* $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$

b) 

Área de recinto B $= 0,583\, u^2$ Área del recinto A $= 3,1667\, u^2$

22) Galicia. ABAU Julio 2019. Opción B. 2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a. De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.
b. Enuncia el teorema de Bolzano y Rolle.



Solución: a) Los catetos son $x = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$ *;* $y = \dfrac{8}{3}$. *La hipotenusa es* $\dfrac{\sqrt{76}}{3}$

23) Galicia. ABAU Junio 2019. Opción A. 2. Da respuesta a los siguientes apartados:

a. Mediante integración por partes demuestra que $\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.
b. Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ ax + b & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$, di que relación debe existir entre a y b para que *f* sea continua y que valores deben tener para que *f* sea derivable.
c. Calcular el área encerrada entre el eje X, la recta $x = 4$ y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ \dfrac{x}{e} & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$

Solución: b) b = 0 y $a = \dfrac{1}{e}$ *c)* $1 + \dfrac{8}{e} - \dfrac{e}{2} u^2$

24) Galicia. ABAU Junio 2019. Opción B. 2. Considérese la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, se pide:

a. Calcular los límites $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
b. Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c. Calcular $\int f(x)dx$.

Solución: a) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ *b. La función crece en* $(0,2)$ *y decrece en* $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$. *Tiene un mínimo relativo en x = 0 y un máximo relativo en x = 2. En x = 0,58 y x = 3,41 son puntos de inflexión. c)* $\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$

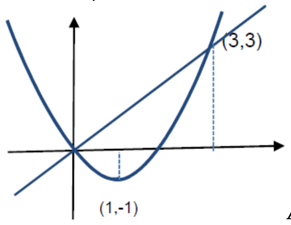
25) Galicia. ABAU Septiembre 2018. A.2.

a) Enuncia o teorema de Rolle. Calcula a, b e c para que a función $f(x)=\begin{cases}2x^2+ax & se\ x<1\\ bx+c & se\ x\geq 1\end{cases}$ cumpra as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo [0,2] e calcula o punto no que se cumpre o teorema.

b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = x^2 - 2x$ e a recta $y = x$. (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes de coordenadas, o vértice e concavidade ou convexidade).

Solución: a) a = –3, b = 1, c = –2

b)



Área = 9/2 u^2.

26) Galicia. ABAU Septiembre 2018. B.2.

a) Calcula, si existe, el valor de m para que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x+mx^2-1}{sen\left(x^2\right)}=3$

b) Calcula los valores de a, b, c y d para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0,5)$ y la tangente a su gráfica en el punto (1,1) sea paralela al eje X.

c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx$

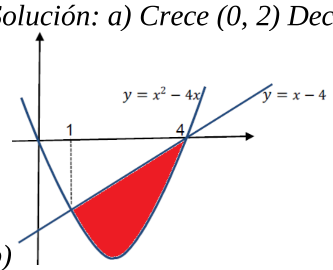
Solución: a) m = 5 b) a = 2; b = 0; c = –6; d = 5 c) $\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx=\frac{2}{9}\left(e\sqrt{e}+2\right)$

27) Galicia. ABAU Junio 2018. A. 2. a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos de $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y=x^2-4x$ y la recta $y=x-4$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte, el vértice y concavidad o convexidad)

Solución: a) Crece (0, 2) Decrece (–∞, 0)∪(2, +∞). Máximo en x=2 y Mínimos no hay.

b)



Área=9/2 u^2

28) Galicia. ABAU Junio 2018. B. 2.

a) Calcula a e b para que a función $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+ax+b & si \quad x<0 \\ \frac{1}{2}\left(x^2+2\right) & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ sexa continua ederivable en $x=0$.

b) Calcula os vértices do rectángulo de área máxima que se pode construír, se un dos vértices éo (0,0), outro está sobre o eixe X, outro sobre el eixe Y eo outro sobre a recta $2x + 3y = 8$.

c) Calcula $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$

Solución: a) a = –2, b = 0 b) (0, 0), (2, 0), (0, 4/3), (2, 4/3)

29) Galicia. ABAU Septiembre 2017. A. 2.

a) Calcula: i) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$ ii) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$

b) A derivada dunha función $f(x)$, que ten por dominio $(0, \infty)$, é $f'(x) = 1 + \ln x$. Determina a función $f(x)$ tendo en conta que a súa gráfica pasa polo punto (1,4).

c) Determina, se existen, os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

Solución: a) i) 1 ii) 3 b) $f(x)=x\ln x+4$ c) Mínimo relativo de coordenadas (1/e, 4 – 1/e)

30) Galicia. ABAU Septiembre 2017. B. 2. Dada a función $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$

a) Estuda, en $x = 0$, a continuidade e derivabilidade de $f(x)$.

b) Determina os puntos da gráfica de $f(x)$ nos que a recta tanxente é paralela á recta $x - 4y = 0$ e determina as ecuacións desas rectas tanxentes.

c) Calcula $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

Solución: a) Es continua y derivable en x = 0 b) En x = –1 la recta tangente es $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$, en x = 1 la recta tangente es $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ c) $\int_{-1}^{0} f(x)dx=\ln 2-1$

31) Galicia. ABAU Junio 2017. A. 2.

a) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x-3x^2}{e^{x^2}-\cos 2x}$

b) Deséxase construír unha caixa de base cadrada, con tapa e cunha capacidade de 80 dm^3. Para a tapa e a superficie lateral quérese utilizar un material que custa 2 €/dm^2 e para a base outro que custa 3 €/dm^2. Calcula as dimensións da caixa para que o seu custo sexa mínimo

c) Calcula $\int_0^1 x\ln(1+x)dx$

Solución: a) –2/3 b) La base cuadrada de lado 4 dm y la altura de 5 dm c) 1/4

32) Galicia. ABAU Junio 2017. B. 2.

a) Calcula os valores a, b para que a función $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & se \quad x<3 \\ \ln(x-2) & se \quad x\geq 3 \end{cases}$ sexa derivable en $x = 3$ e determina o punto no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á recta $x + 3y = 0$.

b) Se $P(x)$ é un polinomio de terceiro grao, cun punto de inflexión no punto (0,5) e un extremo relativo no punto (1,1), calcula $\int_0^1 P(x)\,dx$

Solución: a) a = 1/6, b = –3/2. Punto (–1, –4/3)   b) 5/2

La Rioja

1) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2024. 1.- (2 puntos) Escribe, si existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x)=|x|\exp(-x).$$

en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -1$.

Solución: No existe la recta tangente a la curva en x = 0. La recta tangente a la curva en x = –1 tiene ecuación $y=-2ex-e$.

2) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2024. 2.- (2 puntos) Un nadador se encuentra a 2 km de la playa enfrente del puesto de la Cruz Roja. Desea ir a la caseta de las duchas que está en la misma playa a 3 km de distancia del puesto de la Cruz Roja. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, determinar a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a las duchas en el menor tiempo posible.

Solución: El nadador para minimizar el tiempo que tarda en llegar a las duchas debe nadar hasta el punto situado a mitad de distancia entre duchas y cruz roja (a 1.5 km de la cruz roja).

3) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2024. 3.- (2 puntos) Dada la función

$$f(x)=(1-x^2)\tan(x).$$

Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $(0,\pi/2)$.

Solución: La función $f(x)=(1-x^2)\tan(x)$ *es continua en* $[0,1]$, *derivable en* $(0,1)$ *y* $f(0)=f(1)=0$, *por lo que aplicando el teorema de Rolle existe* $c\in(0,1)$ *tal que* $f'(x)=0$. *Este valor x = c es un punto crítico de la función.*

4) La Rioja. EBAU Ordinaria 2024. 1.- (2 puntos) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y=1/x$ en el punto (3, 1/3). Comprueba que el segmento de esta recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

Solución: La recta tangente a la curva en x = 3 tiene ecuación $y=\frac{-1}{9}x+\frac{2}{3}$.

5) La Rioja. EBAU Ordinaria 2024. 2.- (2 puntos) En una finca con forma de semicírculo de radio 20 m se quiere poner un jardín rectangular, de tal manera que uno de lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte de la curva. Calcula las dimensiones del jardín para que su área sea máxima.

Solución: El área del jardín rectangular cumpliendo las condiciones pedidas es máxima cuando tiene las dimensiones $20\sqrt{2}$ *metros de largo y* $10\sqrt{2}$ *metros de ancho.*

6) La Rioja. EBAU Ordinaria 2024. 3.- (2 puntos) Halla la función *f* sabiendo que

$$\int f(x)dx=\ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}+k$$

Analiza la continuidad de la función *f* en las abscisas $x = -2$ y $x = 1$.

Solución: $f\left(x\right)=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}$. *Esta función no existe ni en x = –2 ni en x = 1. La función no es continua en ninguno de estos valores..*

7) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2023. 1.- (2 puntos) Sea

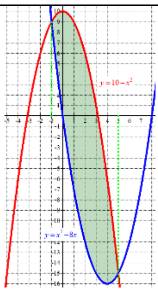
$$f(x)=\frac{1+4x^4-x^2}{x}$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función *f* en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Solución: (i) Dominio = $\mathbb{R}-\{0\}$. $x=0$ *es asíntota vertical. No tiene asíntota horizontal. No tiene asíntota oblicua. (ii) La función decrece en* $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},0\right)\cup\left(0,+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ *y crece en* $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\cup\left(+\sqrt{\frac{1}{3}},+\infty\right)$. *La función presenta un máximo relativo en* $x=-\sqrt{\frac{1}{3}}$ *y un mínimo relativo en* $x=+\sqrt{\frac{1}{3}}$.

8) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2023. 2.- (2 puntos) Dibuja el recinto limitado por las parábolas $y=x^2-8x$ e $y=10-x^2$. Calcula su área.

Solución: 

El área tiene un valor de 72 unidades cuadradas.

9) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2023. 3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{3}{x^2}}$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución: (i) e^{-6} *(ii) 1*

10) La Rioja. EBAU Ordinaria 2023. 1.- (2 puntos) Sea

$$f(x)=\frac{x}{\left(x-2\right)\left(x-1\right)}$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función *f*, en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Solución: (i) El dominio es $\mathbb{R}-\{1,2\}$. *La función tiene dos asíntotas verticales:* $x=1$, $x=2$ *y una asíntota horizontal* $y=0$. *(ii) La función decrece en* $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(+\sqrt{2},2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$ *y crece en* $\left(-\sqrt{2},1\right)\cup\left(1,+\sqrt{2}\right)$. *La función presenta un mínimo relativo en* $x=-\sqrt{2}$ *y un máximo relativo en* $x=+\sqrt{2}$

.

11) La Rioja. EBAU Ordinaria 2023. 2.- (2 puntos) Halla el área del recinto encerrado por las gráficas de las parábolas $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -2x^2 + 2x$.

Solución: El área tiene un valor de $\frac{4}{27} \simeq 0.1489$ *unidades cuadradas.*

12) La Rioja. EBAU Ordinaria 2023. 3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x \to 0} \left(e^x + x^3\right)^{\frac{1}{x}}$

(ii) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2} \right)$

Solución: (i) e (ii) –4

13) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2022. 1.- (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{x^3}{(1 + x)^2}$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función *f*, en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión si los hubiera.

Solución: a) $Do\min io f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$ *;* $x = -1$ *es asíntota vertical;* $y = x - 2$ *es la asíntota oblicua.*

b) La función crece en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ *y decrece en* $(-3, -1)$*.La función tiene un punto de inflexión en x = 0 y un máximo relativo en x = –3.*

14) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2022. 2.- (2 puntos) Halla el valor de *a* y *b* para que la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tenga en el punto $(x_0, -1)$ un punto de inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

Solución: Los valores buscados son a = 3 y b = 4.

15) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2022. 3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{tgx - x}{x - senx}$

(ii) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{x}}$

Solución: i) 2 ii) $e^{-3/2}$

16) La Rioja. EBAU Ordinaria 2022. 1.- (2 puntos) Dada la curva $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$

(i) Halla los puntos de la curva en los que la recta tangente a ésta pase por el punto (0, 0).

(ii) Da las ecuaciones de las rectas tangentes.

Solución: (i) A(–4, –8) y B(4, 24) (ii) $y = 2x$ *recta tangente en x = –4.* $y = 6x$ *recta tangente en x = 4.*

17) La Rioja. EBAU Ordinaria 2022. 2.- (2 puntos) Halla el área de la región que delimita la gráfica de la función $g(x) = xsenx$ y el eje de abscisas en el intervalo que va de *x = 0* al menor valor *b > 0* tal que $g(b) = 0$.

Solución: $Área = \pi u^2$

18) La Rioja. EBAU Ordinaria 2022. 3.- (2 puntos) Determina, si existe, el valor de *a* de tal manera que:

(i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=2$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x = e$

Solución: (i) a = 6 (ii) a = 2

19) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2021. 1.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{2-e^{-x}}$$

Determinar el dominio, extremos relativos y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

Solución: $Dominio\ f(x) = \mathbb{R} - \{-\ln 2\}$. *Presenta un mínimo relativo en x = 0. x = –ln2 es asíntota vertical. Tiene asíntota horizontal en –∞ con ecuación* $y = 0$. *No tiene asíntota oblicua.*

20) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2021. 2.- (2 puntos) Sea la función $f(x) = \cos x$

Hallar el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $x = -\frac{\pi}{4}$, la gráfica de *f* y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución: Área = 1.9218 u^2.

21) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2021. 3.- (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}$.

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^x$

Solución: a) 1 b) $e^{-\frac{1}{4}}$

22) La Rioja. EBAU Ordinaria 2021. 1.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = xe^{1/x^3}$$

Determinar el dominio y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

Solución: El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ *La asíntota* $x = 0$ *solo lo es por la derecha. No hay asíntotas horizontales. La asíntota oblicua tiene ecuación* $y = x$

23) La Rioja. EBAU Ordinaria 2021. 2.- (2 puntos) Sea *f* una función continua cuya derivada viene dada de la siguiente manera:

$$f'(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ e^x, & x\geq 0 \end{cases}$$

Hallar la expresión de la función *f* y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de *f* en el punto $x=0$.

Solución: $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}+x+K, & x<0, \\ e^x-1+K, & x\geq 0 \end{cases}$, *siendo K una constante real cualquiera.*

Las rectas tangentes son $y=x+K$

24) La Rioja. EBAU Ordinaria 2021. 3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x)=\dfrac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje *OX* y las rectas $x=0$ y $x=5$.

Solución: $Área=\ln\frac{7}{2}+\frac{5}{14}\simeq 1.61\,u^2$

25) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2020. 1.- (2 puntos) Calcular los valores de los parámetros reales *a* y *b* para que la función: $f(x)=\begin{cases} a(x^2-9)+\frac{bx}{3}-b, & x<3, \\ \ln(b(x-2)), & x\geq 3, \end{cases}$ sea derivable.

Solución: Los parámetros son $a=\frac{1}{9}$ *y* $b=1$.

26) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2020. 2.- (2 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de la función

$$f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}$$

Calcular la recta tangente en su punto de inflexión.

Solución: El dominio es $\mathbb{R}-\{-2\}$. *La asíntota vertical es* $x=-2$. *La asíntota horizontal es* $y=0$. *La recta tangente a la gráfica de f(x) en x = –5 tiene ecuación* $x+27y+11=0$

27) La Rioja. EBAU Extraordinaria 2020. 3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las funciones *f* y *g*, siendo éstas:

$$f(x)=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}-2, \quad g(x)=(x-2)^2-1.$$

y las rectas *x = 3*, *x = 5*.

Solución: $Área=4.37\,u^2$

28) La Rioja. EBAU Ordinaria 2020. 1.- (2 puntos)

a) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1-senx\cos x}{1+senx\cos x}\right)^{\frac{1}{senx}}$

b) Determinar el valor de la constante real *a* para que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 4}\frac{tg\left(\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\sqrt{x}-2\right)}{x^2-16+ax}=\frac{1}{32}$$

Solución: a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-senx\cos x}{1+senx\cos x}\right)^{\frac{1}{senx}}=e^{-2}$ *b) a = 8*

29) La Rioja. EBAU Ordinaria 2020. 2.- (2 puntos) Determinar los valores de los parámetros reales a y b para que las funciones $f(x)=ax^2+b$ y $g(x)=x^2+x+a$, sean tangentes en el punto de abscisa $x=-1$. Para los valores obtenidos de a y b, calcular la recta tangente a las curvas en $x=-1$.

Solución: $a=\frac{1}{2}$; $b=0$; *la recta tangente es* $y=-x-\frac{1}{2}$

30) La Rioja. EBAU Ordinaria 2020. 3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las rectas $x=-2$, $x=2$, el eje OX y la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ x, & x\geq 0\end{cases}$$

Solución: $Área=\frac{14}{3}=4,66\,u^2$

31) La Rioja. EBAU Julio 2019. Propuesta A. 3.- = B. 3.- (3 puntos) Sea la función

$$f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abscisas en el intervalo $\left[\frac{3}{2},4\right]$

Solución: (I) La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. *Es derivable en* $\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$ *(III) Área =* $\frac{1}{2}\ln 12\,u^2$

32) La Rioja. EBAU Junio 2019. Propuesta A. 3.- = B. 3.- (3 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\leq 0 \\ -x^2+ax+b, & x>0\end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea continua y derivable en $x=0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x=0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},1\right]$

Solución: (I) a = 0 y b = 1. (II) La función presenta un mínimo relativo en x = 0. (III) 5/3 u^2.

33) La Rioja. EBAU Julio 2018. A. 2. (3 puntos) Sea la función

$$f(x)=2-\cos x-3x$$

(I) Determine, si existen, las asíntotas oblicuas de f.

(II) Calcule

$$\int f(x)\cos x dx.$$

(III) Demuestre que la función $f(x)$ solo corta una vez el eje horizontal.
Nota. Puede ser útil el teorema de Rolle.

Solución: (I) No existen (II) $\int f(x)\cos x dx = 2senx - \dfrac{\cos x senx + x}{2} - 3xsenx - 3\cos x + C$ *(III)* $f'(x) = senx - 3$ *y no se puede anular.*

34) La Rioja. EBAU Julio 2018. B. 2. (2 puntos)
I) Hallar, si existe, el valor de *a* para el cual:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=2$$

II) Determine, si existe, $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'$

donde $\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'$ representa la derivada de $\sqrt{9x^2+12x+1}$

Solución: I) a = 6 II) 3

35) La Rioja. EBAU Junio 2018. A. 3. = B. 3. (2 puntos) Sea

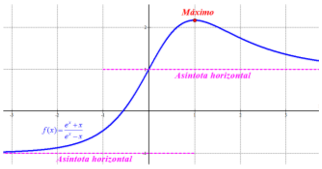
$$f(x) = xe^{-ax}$$

(I) Calcule, según los valores de *a*, las asíntotas de *f(x)*.
(II) Halle el valor de *a* para que *f* tenga en *x = 1* un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo?

Solución: I) No existen asíntotas verticales. Si $a \neq 0$ *la asíntota horizontal es* $y = 0$*, solo en la rama de x > 0. Si* $a = 0$ *no hay asíntota horizontal. Si a < 0 la asíntota horizontal es* $y = 0$*. Solo en la rama de x < 0. No hay asíntota oblicua. II) a = 1. En x = 1 hay un máximo.*

36) La Rioja. EBAU Julio 2017. A. 4. = B. 4. (3 puntos) Sea $f(x) = \dfrac{e^x + x}{e^x - x}$. Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real *x*, para la función *f* estudie:
(I) El dominio y las asíntotas.
(II) La monotonía y los extremos relativos.
(III) Dibuje la gráfica de *f* destacando los elementos anteriores.

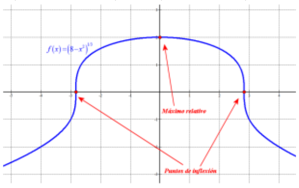
Solución: (I) $\text{Dominio} = \mathbb{R}$*. No tiene asíntotas verticales ni oblicuas. La asíntota horizontal en +∞ es* $y = 1$*. La asíntota horizontal en −∞ es* $y = -1$ *(II) La función presenta un máximo relativo en x = 1. La función crece en* $(-\infty, 1)$ *y decrece en* $(1, +\infty)$.

(III) 

37) La Rioja. EBAU Junio 2017. A. 4. = B. 4. (3 puntos) Sea la función $f(x) = \left(8 - x^2\right)^{1/3}$.
Para ella estudie:
(I) El dominio, la continuidad y las asíntotas.
(II) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

(III) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de *f* destacando los elementos anteriores.

Solución: I) El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$. *Es continua en todo* $\mathbb{R}$. *No existen asíntotas verticales ni horizontales ni oblicuas. (II) La función es derivable en* $\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{8}\right\}$, *tiene un máximo relativo en x = 0. La función crece en* $\left(-\infty,0\right)$ *y decrece en* $\left(0,+\infty\right)$ *(III) La función es convexa (∪) en* $\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)\cup\left(\sqrt{8},+\infty\right)$ *y cóncava (∩) en* $\left(-\sqrt{8},+\sqrt{8}\right)$. *Los puntos de inflexión están en* $x=-\sqrt{8};\ x=+\sqrt{8}$



Madrid

1) Madrid. EVAU Extraordinaria 2024. A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
a) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto (0, 0).
b) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto (1, 1).
c) (0.5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

Solución: a) $f(x) = x^2 + x$. *b)* $f(x) = -x^2 + 2x$. *c)* www.ebaumatematicas.com

2) Madrid. EVAU Extraordinaria 2024. B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:
a) (0.75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
b) (1.75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de *f(x)* y de $g(x) = x(x-3)$.

Solución: a) La función es impar. La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ *y decrece en* $(-1,1)$.
b) Área = $\frac{1}{12} \simeq 0.0833$ *unidades cuadradas.*

3) Madrid. EVAU Ordinaria 2024. A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:
a) (0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en *x* = *π*.
b) (1 punto) Probar que *f(x)* tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.
c) (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de *f(x)* y *g(x)* en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución: a) La recta tangente tiene ecuación $y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$. *b)* www.ebaumatematicas.com
c) El área tiene un valor aproximado de 459.03 unidades cuadradas.

4) Madrid. EVAU Ordinaria 2024. B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Calcule:
a) (1.25 puntos) $\int_1^e (x+2)\ln x\,dx$.
b) (1.25 puntos) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$.

Solución: a) $\int_1^e (x+2)\ln x dx = \frac{e^2}{4}+\frac{9}{4}$. *b)* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)} = \boxed{\frac{1}{e}}$

5) Madrid. EVAU Extraordinaria 2023. A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v)=\begin{cases}\frac{5v}{3} & si \quad 0\le v<3\\ 14-4v+\frac{v^2}{3} & si \quad v\ge 3\end{cases}$$

a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?
b) (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1\le v\le 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Solución: a) Para que el consumo sea mínimo debe de ir a 60 km/h. b) El mínimo consumo se obtiene con v = 1. Este consumo es de $1.667\,litros/100\,km$. *El máximo consumo se produce con* $v=3$. *Este consumo es de* $5\,litros/100\,km$.

6) Madrid. EVAU Extraordinaria 2023. B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dadas las funciones

$$f(x)=2+2x-2x^2 \text{ y } g(x)=2-6x+4x^2+2x^3,$$

se pide:
a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x)=|f(x)|$.
b) (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=0$ y $x=2$.

Solución: a) La función h(x) es derivable en $\mathbb{R}-\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. *b) Área = 11 u*^{2}.

7) Madrid. EVAU Ordinaria 2023. A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$, se pide:
a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.
b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.
c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Solución: a) La función es par. b) No es derivable en x = 1. c) La función presenta un máximo relativo en x = 0 y dos mínimos relativos en x = –1 y x = 1. La función no tiene máximo absoluto. La función tiene dos mínimos absolutos en los puntos (–1, 0) y (1, 0).

8) Madrid. EVAU Ordinaria 2023. B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2+x^2} & si \quad x\le -1\\ \frac{2x^2}{3-3x} & si \quad x>-1\end{cases}$

, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en R.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución: a) La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$. *b)* $\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}=e^{-4}$. *c)* $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{3}$

9) Madrid. EVAU Extraordinaria 2022. A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x} & si \quad x<0\\ x^2-4x+3 & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de *f(x)* en $\mathbb{R}$.
b) (0.25 puntos) ¿Es *f(x)* derivable en *x = 0*? Justifique la respuesta.
c) (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.
d) (0.75 puntos) Determine para $x\in(0,\infty)$ el punto de la gráfica de *f(x)* en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza *f(x)* algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

Solución: a) La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ *b) No es derivable pues no es continua.*

c) $x=0$ *es asíntota vertical por la izquierda.* $y=2$ *es asíntota horizontal cuando x tiende a –∞.*

d) En x = 2 la función presenta un mínimo relativo. La recta tangente en dicho punto es $y=-1$.

10) Madrid. EVAU Extraordinaria 2022. B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}x & si \;\; x\leq 0\\ x\ln(x) & si \;\; x>0\end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f(x)* en *x = 0.*
b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x), así como los máximos y mínimos relativos.
c) (1 punto) Calcule $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

Solución: a) la función es continua, pero no es derivable en x = 0.

b) La función crece en $(-\infty,0)\cup(e^{-1},+\infty)$ *y decrece en* $(0,e^{-1})$. *El máximo relativo es (0, 0) y el mínimo relativo* $(e^{-1},-e^{-1})$. *c)* $\int_{1}^{2} f(x)\,dx=\ln 4-\frac{3}{4}$

11) Madrid. EVAU Ordinaria 2022. A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=\begin{cases}x^3e^{-1/x^2} & si \quad x\neq 0\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f(x)* en *x = 0*.
b) (0.5 puntos) Estudie si *f(x)* presenta algún tipo de simetría par o impar.
c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}dx$

Solución: a) La función es continua y derivable en $\mathbb{R}$. b) La función presenta simetría impar. c) 1/2e

12) Madrid. EVAU Ordinaria 2022. B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

a) (0.5 puntos) Compruebe si *f(x)* verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$

b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de *f(x)* en $\mathbb{R}$.

c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje OX en el intervalo $[-1,1]$.

Solución: a) Si las verifica. b) El mínimo relativo tiene coordenadas $\left(-1,\dfrac{-1}{2}\right)$ *y el máximo relativo* $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$. *c)* $\acute{A}rea=\ln 2\approx 0.693u^2$

13) Madrid. EVAU Extraordinaria 2021. A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) 1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1) (0.5 puntos) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-senx}$ a.2) (0.75 puntos) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{sen\dfrac{1}{x}}\right)$

(**Indicación**: use el cambio de variable *t = 1/x* donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1) (0.5 puntos) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-1}dx$ b.2) (0.75 puntos) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx$

Solución: a.1) –1/2 a.2) –2 b.1) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+K$ *b.2) 2 – 5/e*

14) Madrid. EVAU Extraordinaria 2021. B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x)=x^3-|x|+2$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f* en *x = 0*.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de *f(x)* en la recta real.

c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas $y=0$, y las rectas *x = –1* y *x = 1*.

Solución: a) La función es continua en x = 0, pero no es derivable en x = 0
b) La función tiene un máximo relativo en (0, 2) y un mínimo relativo en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},2-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ *c) Área = 3* u^2.

15) Madrid. EVAU Ordinaria 2021. A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x)=2+x-x^2,\quad g(x)=2x^2-4x$$

Solución: Área = 343/54 ≈ 6.35 u^2.

16) Madrid. EVAU Ordinaria 2021. B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} senx & si \quad x<0 \\ xe^x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f* en *x = 0*.
b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f* restringida a *(−π, 2)*. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0,1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.
c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

Solución: a) Es continua y derivable en x = 0 b) La función decrece en $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ *y crece en* $\left(-\frac{\pi}{2},2\right)$.

En el intervalo $[0,1]$ *nuestra función es* $f(x)=xe^x$*, que es continua en el intervalo, además* $f(0)=0$ *y* $f(1)=e$*, como* $2\in[0,e]$ *por el teorema de los valores intermedios existe un* $c\in(0,1)$ *tal que f(c) = 2.*
c) 0

17) Madrid. EVAU Extraordinaria 2020. A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & si \quad x<1, x\neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular *f(0)* y $(f\circ f)(0)$.
b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de *f(x)* en *x = 1* y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

Solución: a) $f(0)=1$; $(f\circ f)(0)=\frac{1}{2}$ *b) La función es continua en x = 1. No es derivable en x = 1. En x = 1 hay un mínimo relativo. c) La asíntota vertical es* $x=-1$. *La asíntota horizontal en −∞ es* $y=0$. *La asíntota oblicua en +∞ es* $y=\frac{1}{4}x$

18) Madrid. EVAU Extraordinaria 2020. B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t)=25te^{-t^2/4}$, donde *t > 0* es el tiempo de funcionamiento.
a) (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.
b) (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.
c) (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante *t*, *E(t)*, se relaciona con la potencia mediante $E'(t)=P(t)$, con $E(0)=0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante *t = 0* y el instante *t = 2*.

Solución: a) La potencia generada por la pila tiende a cero. b) La potencia presenta un máximo valor en $t=\sqrt{2}$. *Siendo esta potencia máxima de* $P(\sqrt{2})=25\sqrt{\frac{2}{e}}$ *c)* $\int_0^2 P(t)dt=\frac{-50}{e}+50$

19) Madrid. EVAU Ordinaria 2020. A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x)=x^3+3x^2-1$ y $g(x)=6x$, se pide:

a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1,10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva *y = f(x)* con pendiente mínima.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}dx$

Solución: a) Teorema de Bolzano b) $y=-3x-2$ *c)* $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{41}{36}-\frac{1}{6}\ln 2$

20) Madrid. EVAU Ordinaria 2020. B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & si \quad x\le 1\\ (x-1)^3 & si \quad x>1\end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en [–4; 4].

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en [–4; 4].

c) (1 punto) Determine si la función $g(x)=f\,'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x=1$.

Solución: a) La función es continua en todo su dominio y en particular en [–4, 4]. b) La función es derivable y decrece en $(-4,1)$ *y crece en* $(1,4)$. *c) La función g(x) es continua. No es derivable en x = 1.*

21) Madrid. EVAU Julio 2019. Opción A. <u>Ejercicio 2</u> :

a) (1.25 puntos) Sean *f* y *g* dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

f(1) = 1; f ´(1) = 2; g(1) = 3; g ´(1) = 4:

Dada $h(x)=f\left((x+1)^2\right)$, use la regla de la cadena para calcular *h ´(0)*. Dada $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1.25 puntos) Calcule la integral $\int (senx)^4(\cos x)^3\,dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = sen\ x$.)

Solución: a) h ´(0)=4; k ´(1)=2/9. *b)* $\frac{sen^5 x}{5}-\frac{sen^7 x}{7}+C$

22) Madrid. EVAU Julio 2019. Opción B. <u>Ejercicio 2</u> :

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos *t* días después de iniciarse el brote viene dado por una función *F(t)* tal que $F\,'(t)=t^2(10-t)$.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función F(t).

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Solución: a) $F(t)=20\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+6$ *b) Al cabo de 10 días se alcanza el máximo de enfermos, y esta cantidad es 839 enfermos.c) El brote acaba a los 14 días.*

23) Madrid. EVAU Junio 2019. Opción A. Ejercicio 2:

Dada $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para x > 0, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva ***y = f(x)***.

b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva ***y = f(x)*** en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva ***y = f(x)*** y las rectas $y=0$ y $x=e$.

Solución: a) $y=0$ *b) máximo relativo en x = e c) 1/2 u*^{2}*.*

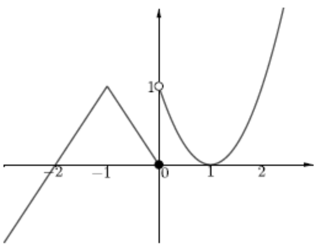
24) Madrid. EVAU Junio 2019. Opción B. Ejercicio 2:
Dada la función $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$, se pide:
a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.
b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c) (0.5 puntos) Calcular los limites laterales $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$

Solución: a) $[-2,2]$ b) Crece en $\left(-2,-\sqrt{2}\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(\sqrt{2},2\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=2$. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=-2$

25) Madrid. EVAU Julio 2018. Opción A. Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera la función $f(x)=\begin{cases}8e^{2x-4} & si \quad x\le 2\\ \dfrac{x^3-4x}{x-2} & si \quad x>2\end{cases}$ y se pide:
a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de *f* en $x=2$.
b) (1 punto) Calcular las asíntotas de *f(x)*. ¿Hay alguna asíntota vertical?
c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^2 f(x)dx$

Solución: a) La función es continua en x = 2 b) No tiene asíntota vertical, y = 0 es la asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua c) $\int_0^2 f(x)dx=4-\frac{4}{e^4}$

26) Madrid. EVAU Julio 2018. Opción B. Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.



El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función *y = f(x)*. Usando la información de la figura, se pide:
a) Indicar los valores de *f(–1)* y *f´(1)*.
b) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos x = –1 y x = 0.
c) Determinar el valor de $\int_{-2}^{0} f(x)dx$

Solución: a) f(–1)=1 y f´(1)=0 b)En x= –1 es continua pues los limites laterales valen $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$ *y en x=0 no es continua pues sus límites laterales son distintos* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ *y* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$
c) La integral pedida es el área del triángulo que tiene base 2 y altura 1 y por tanto área =1 u^2

27) Madrid. EVAU Junio 2018. Opción A. Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1.5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92$; $m_2 = 0.94$; $m_3 = 0.89$; $m_4 = 0.90$; $m_5 = 0.91$.
Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x)=(x-m_1)^2+(x-m_2)^2+(x-m_3)^2+(x-m_4)^2+(x-m_5)^2$ alcanza el mínimo.
Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2 \ln(x)\,dx$, donde ln significa logaritmo neperiano.

Solución: a) x = 0,912 b) $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$

28) Madrid. EVAU Junio 2018. Opción B. Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de *f(x)*.
b) (0.75 puntos) Calcular $f'(4)$.
c) (1.25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la curva *y = f(x)*, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Solución: a) La asíntota horizontal es $y=1$ *b) 9/125 c)* $Área=2\sqrt{10}-6\,u^2=0,32\,u^2$

29) Madrid. EVAU Septiembre 2017. Opción A. Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x)=\begin{cases} xe^{2x} & si \quad x<0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$, donde *ln* significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de *f(x)* en *x = 0*.
b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

Solución: a) La función es continua y derivable en x = 0 b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

c) $\int_{-1}^{0} f(x)dx=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4e^2}$

30) Madrid. EVAU Septiembre 2017. Opción B. Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función $f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.
b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.
c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Solución: a) y = –x +1 b) No tiene asíntota vertical, y = 0 es la asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$. *No existe asíntota horizontal cuando* $x\to-\infty$

c) La función decrece en todo su dominio. No presenta extremos relativos.

31) Madrid. EVAU Junio 2017. Opción A. Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t)=te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de *c(t)* e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Solución: La concentración siempre toma valores por debajo del máximo pues la función es continua y todos sus valores son inferiores a 0,735 mg/ml. No hay riesgo para el paciente en ningún momento.

32) Madrid. EVAU Junio 2017. Opción A. Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x+6}{x-2}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar su dominio y asíntotas verticales.

b) (0,5 puntos) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

c) (1 punto) Calcular $\int_3^5 f(x)dx$.

Solución: a) Dominio = $\mathbb{R}-\{2\}$ $x=2$ *es asíntota vertical.* *b) 1* *c)* $\int_3^5 f(x)dx=14+12\ln 3$

33) Madrid. EVAU Junio 2017. Opción B. Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2}{x}$ y $g(x)=sen(x)$, se pide:

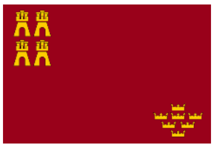
a) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-\dfrac{2}{g(x)}\right)$.

b) (0,75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $\left(\dfrac{1}{2},4\right)$.

c) (1,25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva $y=f(x)$ y la recta $y=-x+3$.

Solución: a) 0 b) y = –8x + 8 c) $Área=\dfrac{3}{2}-\ln 4=0.113\,u^2$

Murcia



1) Murcia. EBAU Extraordinaria 2024. 3: Considere la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-2x+3}$, definida para todo valor $x\in\mathbb{R}$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función *f (x)* y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) **[0,5]** Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

Solución: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ *b) La función crece en* $(0,3)$ *y decrece en* $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$*. Tiene un mínimo relativo en (0, 0) y un máximo relativo en (3, 3). c) Tiene un mínimo absoluto en (0, 0) y un máximo absoluto en (3, 3).*

2) Murcia. EBAU Extraordinaria 2024. 4: Considere la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor de $x>0$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)dx$.

c) **[0,5]** Determine el valor de $a>0$ para el cual se cumple que $\int_1^a f(x)dx=4$.

Solución: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ *b)* $\int f(x)dx=2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$ *c)* $a=e^2$.

3) Murcia. EBAU Ordinaria 2024. 3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1]** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}$

b) **[0,75]** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}$

c) **[0,75]** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Solución: a) –2.5 b) 0 c) 0

4) Murcia. EBAU Ordinaria 2024. 4:

a) **[1,5]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 senx dx$.

b) **[1]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=x^2 senx$.

Solución: a) $\int x^2 senx dx=(2-x^2)\cos x+2xsenx+C$ *b) El área del recinto tiene un valor aproximado de 2.28 unidades cuadradas*

5) Murcia. EBAU Extraordinaria 2023. 3: Considere la función $f(x)=xe^{-x}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$.

a) **[0,75 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[0,75 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función *f(x)* y sus extremos relativos (máximos y/o mínimos).

c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

Solución: a) 0. b) $f'(x)=(1-x)e^{-x}$. *La función crece en* $(-\infty,1)$ *y decrece en* $(1,+\infty)$. *La función presenta un máximo relativo en x = 1.* *c)* $\int f(x)\,dx=-xe^{-x}-e^{-x}+K$

6) Murcia. EBAU Extraordinaria 2023. 4: Considere la función $f(x)=\dfrac{senx}{1+\cos^2 x}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$, donde $\cos^2 x=(\cos x)^2$.

a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

b) **[0,75 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

c) **[0,75 p.]** Determine la primitiva de *f(x)* que pasa por el punto $(\pi,1)$

Solución: a) $\int f(x)\,dx=-\,arctg(\cos x)+K$ *b)* $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx=\dfrac{\pi}{4}$ *c)* $F(x)=-arctg(\cos x)+1-\dfrac{\pi}{4}$

7) Murcia. EBAU Ordinaria 2023. 3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos(2x)-1}{xsen(x)}$

b) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}$

Solución: a) –2 b) 1/9

8) Murcia. EBAU Ordinaria 2023. 4: Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$.

a) **[0,5 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función.

c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

d) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de *f(x)* que pasa por el punto (1, 1).

Solución: a) 1 b) $f'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. *La función decrece en* $(-\infty,0)$ *y crece en* $(0,+\infty)$.

c) $F(x)=x-arctg(x)+\dfrac{\pi}{4}+K$ d) $F(x)=x-arctg(x)+\dfrac{\pi}{4}$

9) Murcia. EBAU Extraordinaria 2022. 3: Considere la función *f(x)* dada por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & si \quad x>0 \ y \ x\neq 1 \\ a & si \quad x=1 \end{cases}$$

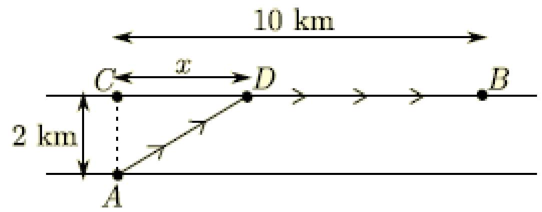
a) **[0,5 p.]** Calcule el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a $+\infty$.
b) **[1 p.]** Determine el valor de *a* para que la función *f(x)* sea continua en *x = 1*.
c) **[1 p.]** Estudie si, para dicho valor de *a*, la función *f(x)* es derivable en *x = 1*. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de *f* en *x = 1*.

Solución: a) 0 b) a = 1 c) La función es derivable en x = 1 y su valor es $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

10) Murcia. EBAU Extraordinaria 2022. 4: Considere la función $f(x)=x^2e^{-x}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$.
a) **[1 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.
c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función *f(x)* cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(0,1)$.

Solución: a) $f'(x)=xe^{-x}(2-x)$. *La función decrece en* $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ *y crece en* $(0,2)$.
b) $F(x)=-e^{-x}(x^2+2x+2)+K$ *c)* $F(x)=-e^{-x}(x^2+2x+2)+3$

11) Murcia. EBAU Ordinaria 2022. 3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).
Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 kilómetros de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 kilómetros del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



a) **[1 p.]** Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\dfrac{10-x}{12}$, donde *x* denota la distancia de C a D.
b) **[1,5 p.]** Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

Solución: b) El punto D debe estar situado a 707 metros del punto C. Tardaría 1 hora y 18 minutos.

12) Murcia. EBAU Ordinaria 2022. 4: Considere la función $f(x)=x\ ln(x)$, definida para $x>0$.
a) **[1 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función *f(x)* cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1,0)$.

Solución: a) $f'(x)=\ln(x)+1$. *La función decrece en* $(0,1/e)$ *y crece en* $(1/e,+\infty)$.

b) $\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}+C$ *c)* $F(x)=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}$

13) Murcia. EBAU Extraordinaria 2021. 3: Dada la función $f(x)=x^2e^{-x}$ definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$, se pide:

a) **[1,5 p.]** Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Solución: a) La función crece en $(0,2)$ *y decrece en* $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$. *Tiene un mínimo relativo en P(0, 0) y un máximo relativo en* $Q\left(2,\frac{4}{e^2}\right)$ *b)* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ***y*** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

14) Murcia. EBAU Extraordinaria 2021. 4: a) [1,5 p.] Calcule la integral indefinida $\int x sen\left(x^2\right)dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) [1 p.] Determine el menor valor de a > 0 para el cual se cumple $\int_0^a x sen\left(x^2\right)dx=1$

Solución: a) $\int x sen\left(x^2\right)dx=-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)+K$ *b)* $a=\sqrt{\pi}$

15) Murcia. EBAU Ordinaria 2021. 3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior y superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2.

a) **[1 p.]** Si denotamos por *x* el radio de las tapas y por *y* la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por $10\pi x^2+6\pi xy$.

b) **[1,5 p.]** Si el volumen de la lata es 90π cm^3, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) El cilindro de 90π *cm^3 con dimensiones que minimizan el coste es el que tiene como radio 3 cm y como altura 10 cm*

16) Murcia. EBAU Ordinaria 2021. 4: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

a) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

b) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x^2\ln(x)dx$. Determine la primitiva de la función $f(x)=x^2\ln(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas (1, 0).

Solución: a) 0 b) $\int x^2\ln(x)dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+K$. $F(x)=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{1}{9}$

17) Murcia. EBAU Extraordinaria 2020. 3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x}$

b) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)$

Solución: a) 1/3 b) 0

18) Murcia. EBAU Extraordinaria 2020. 4:

a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$.

Solución: a) $\int \ln\left(1+x^2\right)dx = x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2arctg(x)+\mathrm{K}$ *b)* $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx = \frac{\pi}{2}-2+\ln 2$

19) Murcia. EBAU Ordinaria 2020. 3: [2,5 p.] De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

Solución: Un triángulo rectángulo con área máxima tiene catetos iguales a $\sqrt{8}$ *e hipotenusa 4. El área máxima tiene un valor de* $4\,u^2$.

20) Murcia. EBAU Ordinaria 2020. 4:

a) **[2 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, la gráfica de la función $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ y la recta vertical $x=1$.

Solución: a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = x-2\sqrt{x}+\ln\left(1+\sqrt{x}\right)^2+C$ *b)* $Área = -1+\ln 4 = 0,38\,u^2$

21) Murcia. EBAU Septiembre 2019. A.2:

a) **[1,5 p.]** Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)=\frac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Solución: a) La función tiene un mínimo relativo en $x=-\sqrt{2}$ *y un máximo relativo en* $x=+\sqrt{2}$ *. La función decrece en* $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(+\sqrt{2},+\infty\right)$ *y crece en* $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$*. b)1/2*

22) Murcia. EBAU Septiembre 2019. B.2:

a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto (1,2).

c) **[1 p.]** Calcule el límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$.

Solución: a) $\int\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}dx = 2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}$ *b)* $F(x)=2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{2}$ *c) 0*

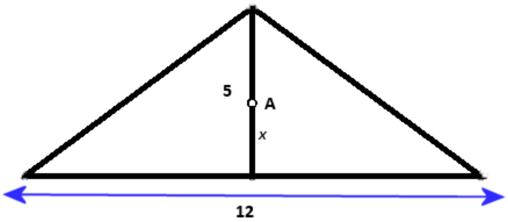
23) Murcia. EBAU Junio 2019. A.2:

a) **[1,5 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2\cos x\,dx$.

b) **[1 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x)=x^2\cos x$.

Solución: a) $\int x^2\cos x\,dx = x^2\cdot senx + 2x\cdot\cos x - 2senx + K$ *b)* $\dfrac{\pi^2}{2}+2\pi-4\,u^2$

24) Murcia. EBAU Junio 2019. B.2: Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



a) **[0,5 p.]** Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión: $f(x)=5-x+2\sqrt{x^2+36}$

b) **[1,5 p.]** Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) **[0,5 p.]** Calcule dicha cantidad mínima.

Solución: b) $x=\sqrt{12}$ *c)* $f(\sqrt{12})=5+6\sqrt{3}$

25) Murcia. EBAU Septiembre 2018. Cuestión A.2: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 p.]** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)$.

b) **[1 p.]** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x+senx)}{x}$.

Solución: a) 0 b) 1

26) Murcia. EBAU Septiembre 2018. Cuestión A.3:

a) [1 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int senx\,e^{\cos x}dx$

b) [0,5 p.] Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x=0$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=senx\,e^{\cos x}$.

Solución: a) $F(x)=-e^{\cos x}+K$ *b)* $Área = e-1$

27) Murcia. EBAU Septiembre 2018. Cuestión B.2: [2 p.]

Considere la función $f(x)=x\sqrt{18-x^2}$ con $-4<x<4$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.

b) **[1 p.]** Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.

Solución: a) $f'(x)=\dfrac{18-2x^2}{\sqrt{18-x^2}}$ *, sus puntos críticos son x=–3 y x=3 b) x =–3 es mínimo y x=3 es máximo*

28) Murcia. EBAU Septiembre 2018. Cuestión B.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x\ln x\,dx$

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x)=x\ln x$ que pasa por el punto de coordenadas (1, 0).

Solución: a) $F(x)=\dfrac{x^2\cdot\ln x}{2}-\dfrac{x^2}{4}+K$ *b)* $F(x)=\dfrac{x^2\cdot\ln x}{2}-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{4}$

29) Murcia. EBAU Junio 2018. Cuestión A. 2:

a) **[1,5 p.]** Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo (neperiano) del otro sea máxima.

b) **[0,5 p.]** Calcule dicha suma máxima.

Solución: a) Los números son 2 y 8 b) La suma máxima es 9,386.

30) Murcia. EBAU Junio 2018. Cuestión A. 3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x=0$ y $x=2$, y la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

Solución: a) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+C$ *b) Área=1* u^2.

31) Murcia. EBAU Junio 2018. Cuestión B. 2: [2 p.] Considere la función dada por:

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si \quad x<0 \\ a+b\,senx & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros ***a*** y ***b*** para los cuales la función ***f(x)*** es continua y derivable en ***x = 0***.

Solución: a = b = 1

32) Murcia. EBAU Junio 2018. Cuestión B. 3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int xe^x dx$

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x)=xe^x$ que pasa por el punto de coordenadas (0,1).

Solución: a) $F(x)=x\cdot e^x-e^x+C$ *b)* $F(x)=x\cdot e^x-e^x+2$

33) Murcia. EBAU Septiembre 2017. Cuestión A.3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 punto]** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x}$.

b) **[1 punto]** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Solución: a) e^{-4} *b) 1/2*

34) Murcia. EBAU Septiembre 2017. Cuestión A. 4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\cos x\, sen^2 x}{1+sen^2 x}dx$.

b) **[0'5 puntos]** Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $\frac{\cos x\, sen^2 x}{1+sen^2 x}$ que cumpla la condición $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Solución: a) $F(x)=senx-arctg(senx)+C$ *b)* $F(x)=senx-arctg(senx)+\frac{\pi}{4}$

35) Murcia. EBAU Septiembre 2017. Cuestión B. 3: Dada la función $f(x)=xe^{-x^2}$ se pide:

a) **[0,5 puntos]** Calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) **[1,5 puntos]** Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

Solución: a) 0 b) f(x) es decreciente en $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{1}{2}},+\infty\right)$ *y es creciente en el intervalo* $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. *Presenta un mínimo relativo en* $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ *y un máximo relativo en* $x=+\sqrt{\frac{1}{2}}$

36) Murcia. EBAU Septiembre 2017. Cuestión B. 4: [2 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$.

Solución: $F(x)=\frac{-\ln(1+x^2)}{x}+2arctgx+C$

37) Murcia. EBAU Junio 2017. Cuestión A.3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 punto]** $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)$.

b) **[1 punto]** $\lim_{x\to 0}\frac{senx-x\cos x}{x-senx}$.

Solución: a) 1/4 b) 2

38) Murcia. EBAU Junio 2017. Cuestión A.4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$.

b) **[0’5 puntos]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=1$, y la gráfica de la función $f(x)=xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Solución: a) $F(x)=-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)+C$ *b)* $Área=\frac{4}{\pi^2}$ u^2

39) Murcia. EBAU Junio 2017. Cuestión B.3: [2 puntos] La producción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P=2LK^2$ (en millones), donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamiento (en millones de euros). La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total L+ K?

Solución: Los valores para los que se minimiza el coste son K = 2 millones de euros y L = 1 millón de euros

40) Murcia. EBAU Junio 2017. Cuestión B.4: [2 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{x^2+x-6}dx$.

Solución: $F(x)=\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{3}{5}\ln|x+3|+C$

Navarra

1) Navarra. EvAU Extraordinaria 2024. P5) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ (1.25 puntos)

b) $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{2x}{x-1}}$ (1.25 puntos)

Solución: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}=0$. b) $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{2x}{x-1}}=e^2$

2) Navarra. EvAU Extraordinaria 2024. P6) Se considera la función $f(x)=\cos(\pi x)+\sin(\pi x)$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo [0, 1]. (0,5 puntos)

b) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

Solución: : a) La función es continua en el intervalo [0, 1]. b) La función tiene un máximo absoluto en el punto $\left(\frac{1}{4},\sqrt{2}\right)$ *y un mínimo absoluto en* $(1,-1)$

3) Navarra. EvAU Extraordinaria 2024. P7) Se considera la función $f(x)=\sqrt{2x^2+2x+3}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1,3]$ y derivable en $(-1,3)$. (1.25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.25 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) www.ebaumatematicas.com

4) Navarra. EvAU Extraordinaria 2024. P8) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=\ln x \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Solución: El área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas tiene un valor de $\dfrac{3-e}{2}\simeq 0.14$ *unidades cuadradas.*

5) Navarra. EvAU Ordinaria 2024. P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

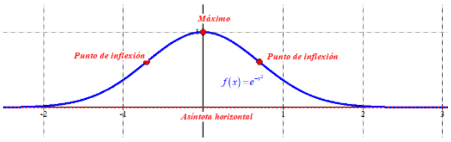
a) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\cos x}$ (1.25 puntos)

b) $g(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$ (1.25 puntos)

Solución: a) $f'(x)=x^{-\cos x}\left(senx\cdot\ln x-\dfrac{\cos x}{x}\right)$ *b)* $g'(x)=\dfrac{6}{(x+2)^3}$

6) Navarra. EvAU Ordinaria 2024. P6) Halla los máximos y mínimos (relativos y absolutos), los puntos de inflexión y las asíntotas de la función $f(x)=e^{-x^2}$. Representa, de manera aproximada, la gráfica de *f*. (2.5 puntos)

Solución: El máximo absoluto tiene coordenadas (0, 1). Los puntos de inflexión tienen coordenadas $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},e^{-1/2}\right)$ *y* $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},e^{-1/2}\right)$*. No tiene asínotas verticales. La recta* $y=0$ *es asíntota horizontal. No tiene asíntota oblicua.*



7) Navarra. EvAU Ordinaria 2024. P7) Se considera la función $f(x)=x^2+e^{\frac{x}{4}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2,4]$. (1.25 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores reales α y β en $(-2,4)$ tales que $f(\alpha)=2=f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.25 puntos)

Solución: a) La función es suma y composición de funciones continuas. La función es continua en $\mathbb{R}$.
b) www.ebaumatematicas.com

8) Navarra. EvAU Ordinaria 2024. P8) Calcula los puntos del plano en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=\frac{9}{x} \quad \text{y} \quad g(x)=10x-x^3$$

Tomando los dos puntos de corte con $x>0$, calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas en el semiplano de abcisa positiva. (2.5 puntos)

Solución: Se cortan en x = 1 y x = 3. El área tiene un valor de $20-9\ln 3\simeq 10.11$ *unidades cuadradas.*

9) Navarra. EvAU Extraordinaria 2023. P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto *x = 0.*

a) $f(x)=\ln\left[\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}\right]$ (1.25 puntos)

b) $g(x)=\arctan\sqrt{1+2x+e^{2x}}$ (1.25 puntos)

Solución: a) $f'(x)=2x+2-\pi tg(\pi x)$; $f'(0)=2$. *b)* $g'(x)=\dfrac{1+e^{2x}}{\left(2+2x+e^{2x}\right)\sqrt{1+2x+e^{2x}}}$; $g'(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

10) Navarra. EvAU Extraordinaria 2023. P6) Se considera la función $f(x)=\dfrac{\cos\left[\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2-6x+10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo [1, 4]. (0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo (1, 4) tales que $f(\alpha)=\dfrac{-1}{2}=f(\beta)$.

Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.75 puntos)

Solución: : a) www.ebaumatematicas.com b) www.ebaumatematicas.com

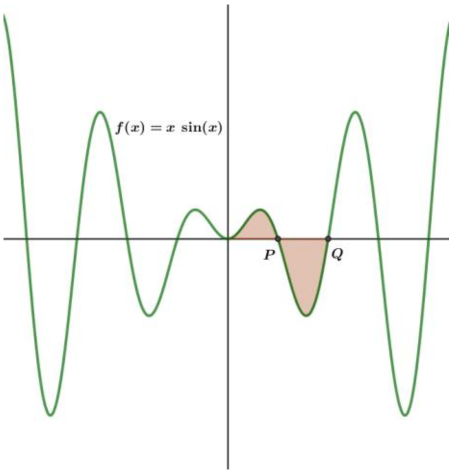
11) Navarra. EvAU Extraordinaria 2023. P7) Se considera la función $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}-\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo [7, 11] y derivable en (7, 11). (1.25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha\in(7,11)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1,25 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) www.ebaumatematicas.com

12) Navarra. EvAU Extraordinaria 2023. P8) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x)=x\cdot\sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada. (2.5 puntos)

Solución: El área total es $4\pi\ u^2$.

13) Navarra. EvAU Ordinaria 2023. P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int\frac{2x-5}{x^2+x-2}dx$ (1.25 puntos)

b) $\int x\ln x dx$ (1.25 puntos)

Solución: a) $\int\frac{2x-5}{x^2+x-2}dx=-\ln|x-1|+3\ln|x+2|+K$ *b)* $\int x\ln x dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+K$

14) Navarra. EvAU Ordinaria 2023. P6) Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos^2(\pi x)-1}{1-x} & x<1\\ \ln\left(x\cdot e^{x+1}\right)-2x & x\geq 1\end{cases}.$$

(2.5 puntos)

Solución: La función es continua en $\mathbb{R}$.

15) Navarra. EvAU Ordinaria 2023. P7) Se considera la función $f(x)=(x+1)\sin(\pi x)$.

a) Demuestra que es continua en $\mathbb{R}$ (2 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (0,1)$ tal que $f(\alpha)=\frac{3}{4}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) www.ebaumatematicas.com

16) Navarra. EvAU Ordinaria 2023. P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=2-2x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=x^4-x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Solución: Área = 44/15 = 2.93 unidades cuadradas.

17) Navarra. EvAU Extraordinaria 2022. P5)

Sea la función $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\ln\frac{1}{x}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e},e\right]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in \left(\frac{1}{e},e\right)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) utilizado(s). y justifica su uso. (1.75 puntos)

Solución: a) La función f(x) es composición de funciones continuas la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e},e\right]$. *b) Utilizamos el teorema de Darboux o de los valores intermedios en el intervalo* $\left[\frac{1}{e},e\right]$.

18) Navarra. EvAU Extraordinaria 2022. P6) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} \qquad \text{(1.25 puntos)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\ln(x+1)-x} \qquad \text{(1.25 puntos)}$$

Solución: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=e^{-2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\ln(x+1)-x}=-2$

19) Navarra. EvAU Extraordinaria 2022. P7) Sea la función $f(x)=\ln\left(\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{6}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2,4]$. (1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (2,4)$ tal que $f(\alpha)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.5 puntos)

Solución: a) La función es continua pues es composición de funciones continuas.

b) Aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x)=\ln\left(\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{6}\right)$ *en el intervalo* $[2,4]$.

20) Navarra. EvAU Extraordinaria 2022. P8) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones:

$$f\left(x\right)=x^3-3x-2 \quad \text{y} \quad g\left(x\right)=x-2$$ (2.5 puntos)

Solución: El área de la región del plano limitada por las dos gráficas es igual a 8 u²

21) Navarra. EvAU Ordinaria 2022. P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$$ (1.25 puntos)

$$\int \left(3-2x\right)e^{-2x}dx$$ (1.25 puntos)

Solución: $\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} = arctg\left(\sqrt{x-1}\right)+K \quad \int \left(3-2x\right)e^{-2x}dx = -e^{-2x}+xe^{-2x}+K$

22) Navarra. EvAU Ordinaria 2022. P6) Se considera la función $f(x)=e^{\frac{1}{\sin x+\cos x}}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $\left[0,\pi\right]$ (0.75 puntos)

b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo. (1.75 puntos)

Solución: a) La función es continua en $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ *b) El mínimo relativo es* $\left(\frac{\pi}{4},e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$

23) Navarra. EvAU Ordinaria 2022. P7) Se considera la función $f(x)=\frac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[-2,-1\right]$. (0.75 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha\in\left(-2,-1\right)$ tal que $f\,'(\alpha)=e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.75 puntos)

Solución: b) Aplicando el teorema de los valores intermedios a la función $f\,'(x)=\frac{\left(2x^2-1\right)e^{x^2-2}}{x^2}$ *en el intervalo* $\left[-2,-1\right]$

24) Navarra. EvAU Ordinaria 2022. P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f\left(x\right)=2-\left|x\right| \quad \text{y} \quad g\left(x\right)=x^2-10$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Solución: Se cortan en x = –3 y x = 3. Área = 22.5 u².

25) Navarra. EvAU Extraordinaria 2021. P5)

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}$$ (1.25 puntos)

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}$$ (1.25 puntos)

Solución: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}=\sqrt{3} \qquad \lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}=1$

26) Navarra. EvAU Extraordinaria 2021. P6)

Se considera la función $f(x)=\log_2\left[\sin\frac{\pi(x+1)}{4}+2^{\frac{x-5}{2}}\right]$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo [6, 7]. (1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(6,7)$ tal que $f(\alpha)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.5 puntos)

Solución: a) $\sin\frac{\pi(x+1)}{4}+2^{\frac{x-5}{2}}$ *es positivo en el intervalo [6, 7] b) Aplicamos el teorema de Bolzano al intervalo (6, 7). f(6) < 0 y f(7) > 0*

27) Navarra. EvAU Extraordinaria 2021. P7)

Se considera la función $f(x)=\sqrt{x+\sin\frac{\pi x}{2}}$.

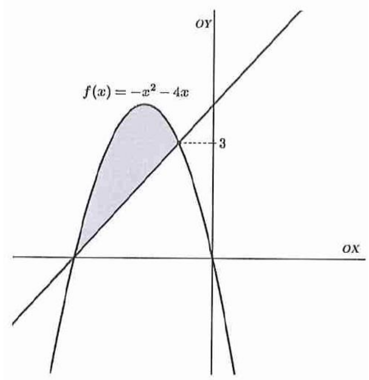
a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existen dos valores $\alpha\in(1,2)$ y $\beta\in(2,3)$ tal que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.75 puntos)

Solución: a) b) Aplicamos el teorema de Rolle a los intervalos (1, 2) y (2, 3).

28) Navarra. EvAU Extraordinaria 2021. P8)

Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el siguiente gráfico, calcula el área de la región sombreada. (2.5 puntos)



Solución: 4.5 u².

29) Navarra. EvAU Ordinaria 2021. P5)

Sea la función $f(x)=\left(x^2-3x+10\right)^{\log\left[2^{x-1}\sin\frac{\pi(x+2)}{6}\right]}$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo [1, 3] (1.25 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha\in(1,3)$ tal que $f(\alpha)=\frac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.25 puntos)

Solución: a) el contenido del logaritmo es positivo y la función está bien definida y es composición y producto de funciones continuas. Luego es continua.
b) Aplicamos el teorema de los valores intermedios al intervalo (1, 3)

30) Navarra. EvAU Ordinaria 2021. P6)

Calcula las asíntotas de esta función y estudia la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x)=\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}$$ (2.5 puntos)

Solución: Las asíntotas verticales son x = –2 y x = 2. No existen asíntotas horizontales. La asíntota oblicua es $y=x$. *A la asíntota oblicua la función se acerca por debajo, tanto en el +∞ como en el –∞.*

En las asíntotas verticales tenemos que $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ *;* $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ *y además* $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ *;* $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

31) Navarra. EvAU Ordinaria 2021. P7)

Sea la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x - 2 - x\sin\dfrac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6}\right)$.

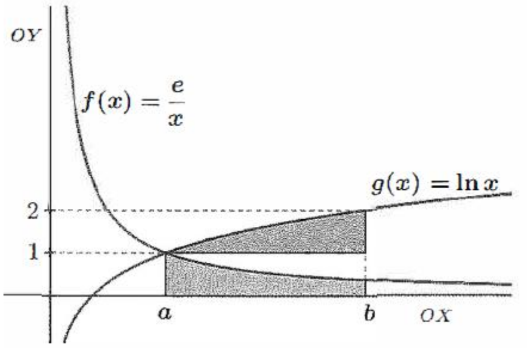
a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$. (1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f\,'(\alpha) = 3/2\ln 2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.5 puntos)

Solución: a) Está bien definida la función en el intervalo [1, 3] y es composición, producto y división de funciones continuas que no se anulan, por lo que es continua b) Usamos el teorema del valor medio (Lagrange) para nuestra función en el intervalo [1, 3]

32) Navarra. EvAU Ordinaria 2021. P8)

Calcula los valores de las abcisas *a* y *b* que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



(2.5 puntos)

Solución: a = e; b = e^2. Ambas áreas valen e u^2.

33) Navarra. EvAU Extraordinaria 2020. P3) Calcula las integrales indefinidas:

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx$$ (1.25 puntos)

$$\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx$$ (1.25 puntos)

Solución: $\displaystyle\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx = -\ln|x-2| + 2\ln|x+3| + C$

$$\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx = \frac{e^{2x}}{4}\left(\sin(2x+1) - \cos(2x+1)\right) + C$$

34) Navarra. EvAU Extraordinaria 2020. P7) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x) = e^{\pi x}\cdot\sin\pi x$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: El máximo relativo $x = \frac{3}{4}$ *es máximo absoluto en el intervalo* $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. *El mínimo relativo* $x = \frac{7}{4}$ *también lo es absoluto.*

35) Navarra. EvAU Extraordinaria 2020. P8) Sean las funciones $f(x)=\frac{x}{2}+1$ y $g(x)=\sqrt{x-2}+2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Solución: Se cortan en (6, 4) y en (2, 2). $\acute{A}rea=\frac{4}{3}u^2$

36) Navarra. EvAU Ordinaria 2020. P3) Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}} \quad \text{(1.25 puntos)} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right) \quad \text{(1.25 puntos)}$$

Solución: $\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}=1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)=\frac{-1}{2}$

37) Navarra. EvAU Ordinaria 2020. P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=\sin(\pi x) \text{ y } g(x)=\left|x^2-x\right|$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Solución: Se cortan en x = 0 y x = 1. $\acute{A}rea=0,47\,u^2$

38) Navarra. EvAU Julio 2019. A3) Demuestra que existe $\alpha\in(1,e)$ tal que $f'(\alpha)=e+1$, siendo

$$f(x)=(x+ex-e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

Solución: Aplicamos el teorema de Rolle a f(x) en el intervalo (1, e)

39) Navarra. EvAU Julio 2019. A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=1+\cos x$ y $g(x)=\frac{-2x^2}{\pi^2}+2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos).

Solución: $x=-\pi$; $x=\pi$ y $x=0$. $\acute{A}rea=\frac{2}{3}\pi$

40) Navarra. EvAU Julio 2019. B3) Calcula el valor del parámetro real *a* para que la siguiente función sea continua en todo R:

$$f(x)=\begin{cases}\log\left(x^2+9\right) & x\le 1\\ \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{a\cdot(1-x)} & x>1\end{cases} \qquad \text{(2 puntos)}$$

Solución: $a=\frac{\pi}{2}$

41) Navarra. EvAU Junio 2019. A3) Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}}$$ (1 punto)

$$g(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{-x}$$ (1 punto)

Solución: $f\,'(x)=\dfrac{1}{sin2x}$; $g'(x)=x^x\left(1+\ln x\right)$

42) Navarra. EvAU Junio 2019. B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=5-x$ y $g(x)=\dfrac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos)

Solución: Se cortan en P(3, 2) y Q(4, 1). Área $= 1{,}5-2\ln 2=0{,}11\,u^2$

43) Navarra. EvAU Julio 2018. A.3. Demuestra que existe $\alpha\in(0,2)$ tal que $f\,'(\alpha)=1$, siendo

$$f(x)=sen\left(\frac{\pi+\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln\left(2e^x+2x-x^2\right)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

Solución: Aplicamos el teorema de Lagrange pues f es continua en [0,2] y derivable en (0,2).

44) Navarra. EvAU Julio 2018. B.3. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int\frac{x+1}{x^2+3x-4}dx$$ (1 punto)

$$\int\frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}dx$$ (1 punto)

Solución: $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+3x-4}dx=\frac{2}{5}\ln|x-1|+\frac{3}{5}\ln|x+4|+C$ $\displaystyle\int\frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}dx=\frac{-1}{1+e^x}+C$

45) Navarra. EvAU Junio 2018. A.3. Calcula el valor de las siguientes integrales:

$$\int e^{\cos 3x}sen3x\,dx$$ (1 punto)

$$\int\frac{sen2x}{1+\cos^2(2x)}dx$$ (1 punto)

Solución: $\displaystyle\int e^{\cos 3x}sen3x\,dx=-\frac{e^{\cos 3x}}{3}+K$ $\displaystyle\int\frac{sen2x}{1+\cos^2(2x)}dx=-\frac{1}{2}arctg\left(\cos(2x)\right)+K$

46) Navarra. EvAU Junio 2018. A.4. Halla las asíntotas (no es necesario hacer el estudio de la posición de la curva respecto a ellas) y los extremos relativos de la función

$$y=\frac{2x^2+6}{x-1}$$ (3 puntos)

Solución: x = 1 es asíntota vertical; y = 2x + 2 es asíntota oblicua. En (–1, –4) hay un máximo relativo; en (3, 12) hay un mínimo relativo

47) Navarra. EvAU Junio 2018. B.3. Demuestra que existe $\alpha\in(2,3)$ tal que *f(α)=–3/2*, siendo

$$f(x)=\cos(\pi x)\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2-1}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 Puntos)

Solución: Consideramos g(x) = f(x) –3/2 y aplicamos el teorema de Bolzano a g(x) en el intervalo (2, 3)

48) Navarra. EvAU Junio 2018. B.4. Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 3x$ y $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & x \le 2 \\ 3 - x & x > 2 \end{cases}$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos)

Solución: Se cortan en x = 0 y en x = 3. Área = 3 u^2.

49) Navarra. EvAU Julio 2017. A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} \qquad \text{(1 punto)}$$

$$\int x^2 e^{2x} dx \qquad \text{(1 punto)}$$

Solución: $\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + C$ $\qquad \int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$

50) Navarra. EvAU Julio 2017. A4) Demuestra que existe $a \in (0,2)$ tal que $f\,'(\alpha) = \frac{-1}{3}$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (3 puntos)

Solución: La función es continua en [0, 2] y derivable en (0, 2). Aplicamos el teorema de Lagrange.

51) Navarra. EvAU Julio 2017. B3) Demuestra que existe $a \in (0,1)$ tal que $f\,'(\alpha) = 3$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x+1)}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2 puntos)

Solución: La función es continua en [0, 1] y derivable en (0, 1). Aplicamos el teorema de Lagrange.

52) Navarra. EvAU Julio 2017. B4) Dadas las funciones $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $g(x) = x^3 - 4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

Solución: Los puntos de corte están en x = –2, x = 0 y en x = 2. Área = $\frac{8+8\pi}{\pi}u^2$

53) Navarra. EvAU Junio 2017. A3) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1} - \sqrt{2x^2-5x+7}\right) \qquad \text{(1 punto)}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\cos(\pi x) + 2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}} \qquad \text{(1 punto)}$$

Solución: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1} - \sqrt{2x^2-5x+7}\right) = 2\sqrt{2}$ $\qquad \lim_{x\to 1}\left(\cos(\pi x) + 2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = 4$

54) Navarra. EvAU Junio 2017. A4) Demuestra que la función $f\left(x\right)=sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo (1, 3). Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

Solución: Aplicamos el teorema de Bolzano a la función f ´(x) en el intervalo (1, 3) y encontramos un valor donde la derivada se anula y como la derivada es positiva a la izquierda y negativa a la derecha este valor es un máximo relativo de la función.

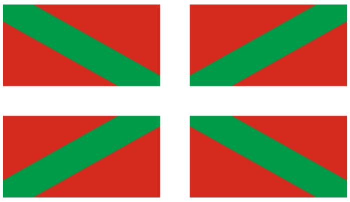
55) Navarra. EvAU Junio 2017. B3)
Encuentra los extremos absolutos de la función $f\left(x\right)=\left(x^2-3\right)e^{-x+2}$ en el intervalo [–2, 4]. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

Solución: Aplicamos el teorema de Weierstrass y la función tiene un máximo absoluto en x = –2 y un mínimo absoluto en x = –1.

56) Navarra. EvAU Junio 2017. B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f\left(x\right)=\cos\frac{\pi x}{4}$ y $g\left(x\right)=\frac{x^2}{4}-1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos)

Solución: Se cortan en x = –2 y en x = 2. El área vale $\frac{24+8\pi}{3\pi}u^2$

País Vasco



1) País Vasco. EAU Extraordinaria 2024. Ejercicio A3

Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Las rectas tangentes a la gráfica de la función *f* en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=2$ son paralelas. Además, *f* tiene un extremo relativo cuando $x=1$ y $f(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) **(1 p)** Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$ para los valores de los parámetros A = –3, B = 0 y C = 4.

Solución: (a) Los parámetros son $A=\dfrac{-3}{2}$, $B=0$ *y* $C=2$. *(b)* $y=9x+9$

2) País Vasco. EAU Extraordinaria 2024. Ejercicio B3

Sea $f(x)=2xe^{-2x^2}$.

(a) **(1 p)** Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.

(b) **(1 p)** Encuentra los extremos relativos de *f* y razona si son máximos o mínimos.

(c) **(0,5 p)** Calcula las asíntotas de *f*.

Solución: (a) La función decrece en $\left(-\infty,\dfrac{-1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ *y crece en* $\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. *(b) El mínimo relativo tiene coordenadas* $\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{-1}{\sqrt{e}}\right)$ *y el máximo relativo es* $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$. *(c) La recta* $y=0$ *es asíntota horizontal. No tiene asíntota vertical ni oblicua.*

3) País Vasco. EAU Extraordinaria 2024. Ejercicio A4

(2,5 p) Calcula la siguiente integral, y explica el método empleado:

$$\int x\ln^2 x\,dx$$

Solución: $\displaystyle\int x\ln^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\cdot\ln x+\frac{x^2}{4}+K$

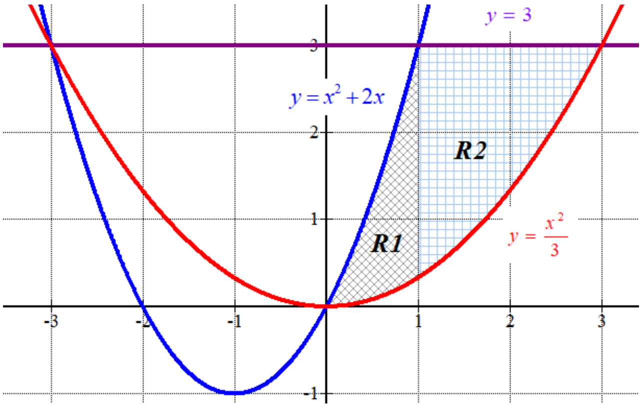
4) País Vasco. EAU Extraordinaria 2024. Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y=\dfrac{x^2}{3}$, $y=x^2+2x$ e $y=3$.

(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por dichas curvas.

(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

Solución: (a)



(b) $\frac{13}{3} \simeq 4.33u^2$

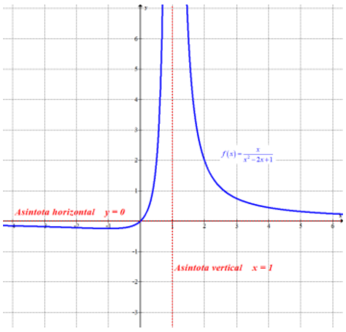
5) País Vasco. EAU Ordinaria 2024. Ejercicio A3

Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

(a) **(0,5 p)** Encuentra las asíntotas de *f*.
(b) **(1 p)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
(c) **(0,5 p)** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 0$.
(d) **(0,5 p)** Haz una representación aproximada de la gráfica de la función *f*.

Solución: (a) $x = 1$ *es asíntota vertical. La recta* $y = 0$ *es una asíntota horizontal. No tiene asíntota oblicua. (b) La función decrece en* $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ *y crece en* $(-1, 1)$. *(c)* $y = x$.

(d)



6) País Vasco. EAU Ordinaria 2024. Ejercicio B3

Se sabe que la función $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$ tiene un extremo relativo cuando *x* = 1/2 y la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa *x* = 1 es *y* = 6*x* − 2.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros *A*, *B* y *C*.
(b) **(1 p)** Encuentra todos los extremos relativos de la función *f* y razona si son máximos o mínimos.

Solución: (a) Los valores buscados son A = 2, B = –1 y C = 3. (b) La función tiene dos mínimos relativos: en $x = \frac{-1}{2}$ *y en* $x = \frac{1}{2}$. *La función tiene un máximo relativo en x = 0.*

7) País Vasco. EAU Ordinaria 2024. Ejercicio A4

Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 p)** $\int \frac{2 - 3x + x^3}{x^2 + 2x + 1} dx$ (b) **(1,25 p)** $\int \frac{2 - 3x}{x^2 + 2x + 1} dx$

Solución: (a) $\int \frac{2 - 3x + x^3}{x^2 + 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{4}{x+1} + K$ *.(b)* $\int \frac{2 - 3x}{x^2 + 2x + 1} dx = -3\ln|x+1| - \frac{5}{x+1} + K$

8) País Vasco. EAU Ordinaria 2024. Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y = x$.

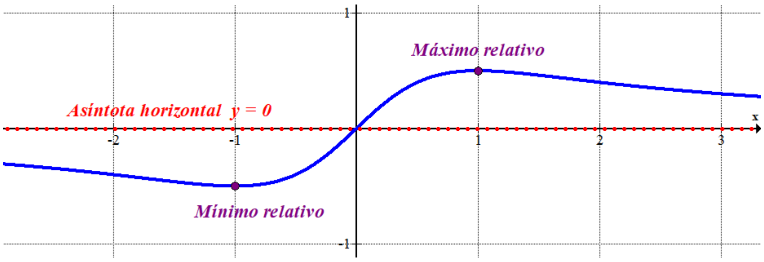
(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.
(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

Solución: $\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}dx = x - \ln(x+2)^4 - \frac{8}{x+2} + K,\quad \int (x+2)\sin(3x)dx = \frac{-x-2}{3}\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x) + K$

9) País Vasco. EAU Extraordinaria 2023. Ejercicio A3

Sea $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 0. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función *f*.

Solución: a) La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ *y crece en* $(-1,1)$. *b) No tiene asíntotas verticales.* $y = 0$ *es asíntota horizontal. No tiene asíntota oblicua. La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0 tiene ecuación* $y = x$.



10) País Vasco. EAU Extraordinaria 2023. Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ Encuentra los valores de los parámetros *A*, *B* y *C* para que $f(0) = 2$, las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa *x* = 1 y *x* = 3 sean paralelas y *f* tenga un extremo relativo en el punto *x* = −1. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si *f* tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

Solución: Los valores buscados son $A = -6,\ B = -15,\ C = 2$. $x = -1$ *es máximo relativo. Tiene un mínimo relativo en x = 5.*

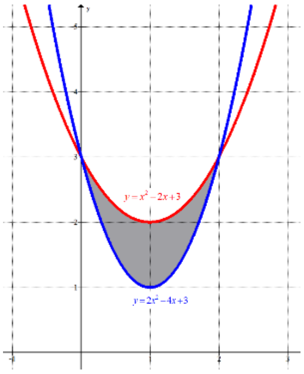
11) País Vasco. EAU Extraordinaria 2023. Ejercicio A4

Calcula $\int (x^2+1)e^{x+1}dx$ explicando el método utilizado.

Solución: $\int (x^2+1)e^{x+1}dx = (x^2-2x+3)e^{x+1} + K$

12) País Vasco. EAU Extraordinaria 2023. Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = 2x^2 - 4x + 3$ e $y = x^2 - 2x + 3$ y calcula el área de ese recinto.

Solución: 

El área tiene un valor de 4/3.

13) País Vasco. EAU Ordinaria 2023. Ejercicio A3

Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución: La función decrece en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *y crece en* $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$. *La función presenta un máximo relativo en x = 1/2 y dos mínimos relativos: uno en x = 0 y otro en x = 1. La recta tangente es* $y = 12x - 20$.

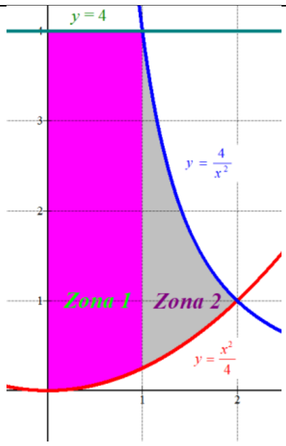
14) País Vasco. EAU Ordinaria 2023. Ejercicio B3

La función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 2$ es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$ y $f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. Calcula los valores de los parámetros A, B y C.

Solución: Los valores buscados son $A = \frac{-1}{2},\ B = 1,\ C = 1$.

15) País Vasco. EAU Ordinaria 2023. Ejercicio A4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y = \frac{4}{x^2}$ e $y = 4$. Calcula el área de ese recinto.

Solución: 

El valor del área es 16/3 = 5.33 unidades cuadradas.

16) País Vasco. EAU Ordinaria 2023. Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}dx, \quad \int (x+2)\sin(3x)\,dx$$

Solución: $\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}dx = x - \ln(x+2)^4 - \frac{8}{x+2} + K, \quad \int (x+2)\sin(3x)\,dx = \frac{-x-2}{3}\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x) + K$

17) País Vasco. EAU Extraordinaria 2022. Ejercicio A3

Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 3x - 2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.

Solución: la recta tangente en x = –1 es $y = 3x + 5$*. La recta tangente en x = 1 es* $y = 3x - 3$.

La función crece en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ *y decrece en* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

18) País Vasco. EAU Extraordinaria 2022. Ejercicio B3

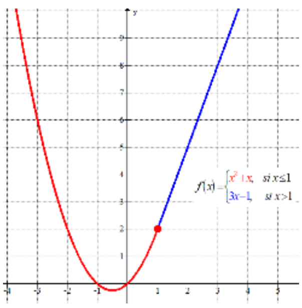
Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax, & si\ x \le 1 \\ Bx - A, & si\ x > 1 \end{cases}$$

(a) Encuentra los valores de *A* y *B* para que *f* sea derivable en toda la recta real.

(b) Haz la representación gráfica de la función *f* con los valores de *A* y *B* obtenidos en el apartado (a).

Solución: (a) A = 1 y B = 3. (b)



19) País Vasco. EAU Extraordinaria 2022. Ejercicio A4

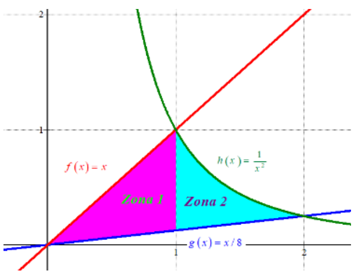
Calcula $\int \ln(x^2-1)\,dx$.

Solución: $\int \ln(x^2-1)\,dx = x\ln(x^2-1) - 2x - \ln|x-1| + \ln|x+1| + K$

20) País Vasco. EAU Extraordinaria 2022. Ejercicio B4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x/8$ y $h(x) = \frac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.

Solución:



Área = 0.75 u².

21) País Vasco. EAU Ordinaria 2022. Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=(x-1)^2 e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

Solución: La función decrece en $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ *y crece en* $(1,2)$. *La función presenta un máximo en x = 2 y un mínimo en x =1.*

22) País Vasco. EAU Ordinaria 2022. Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que f se anule en el punto de abscisa $x = 1$ y las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x = 3$ sean paralelas a la recta $y=2x+1$.

Solución: Los valores buscados son A = –3, B = –7 y C = 9.

23) País Vasco. EAU Ordinaria 2022. Ejercicio A4

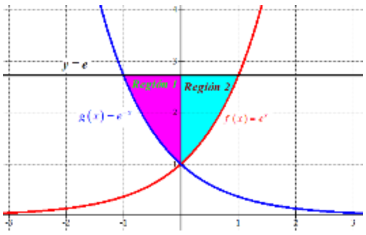
Calcula $\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}dx$.

Solución: $\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}dx = 3\ln|x-2|-3\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}+K$

24) País Vasco. EAU Ordinaria 2022. Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.

Solución:



Área total = 2 u^2

25) País Vasco. EAU Extraordinaria 2021. Ejercicio A3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\frac{x-4}{x^2-4}$ y calcular sus máximos y sus mínimos.

Solución: La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(-2,4-\sqrt{12})\cup(4+\sqrt{12},+\infty)$ *y crece en* $(4-\sqrt{12},2)\cup(2,4+\sqrt{12})$.

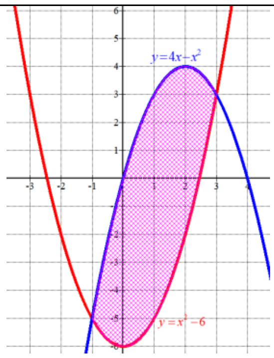
La función presenta un mínimo relativo en $x=4-\sqrt{12}$ *y un máximo relativo en* $x=4+\sqrt{12}$

26) País Vasco. EAU Extraordinaria 2021. Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^4+Ax^2+Bx+C$. Obtener los valores de A, B y C para que en el punto de abscisa $x=0$ la recta tangente a la gráfica de f sea $y = 2x – 1$ y en el punto de abscisa $x = 1$ la recta tangente a la gráfica de f sea horizontal. El extremo situado en el punto de abscisa $x = 1$, ¿es máximo o mínimo?

Solución: Los valores buscados son A = –3, B = 2, C = –1. la función tiene un mínimo relativo en x = 1

27) País Vasco. EAU Extraordinaria 2021. Ejercicio A4
Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las parábolas $y = 4x - x^2$ e $y = x^2 - 6$ y calcular su área.

Solución: 

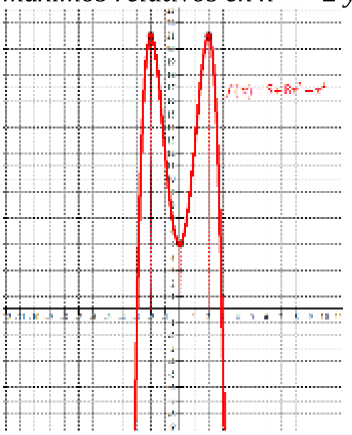
El área del recinto es 64/3 u².

28) País Vasco. EAU Extraordinaria 2021. Ejercicio B4
Calcular $\int x\ln(x+1)dx$, explicando el método utilizado.

Solución: $\frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} + K$

29) País Vasco. EAU Ordinaria 2021. Ejercicio A3 Estudiar los máximos, mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$. Representa la gráfica de *f*.

Solución: La función crece en $(-\infty,-2)\cup(0,2)$ *y decrece en* $(-2,0)\cup(2,+\infty)$*.La función presenta dos máximos relativos en x = –2 y en x = 2 y un mínimo relativo en x = 0.*



30) País Vasco. EAU Ordinaria 2021. Ejercicio B3 Sea la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.

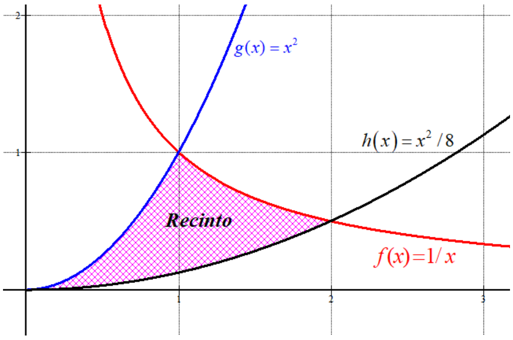
a) Obtener los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de *f* pase por el punto (0, 1) y tenga un mínimo en el punto (1, 1).
b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

Solución: a) A = 1, B = –2 y C = 1 b) La función presenta un máximo relativo en x = 1/3

31) País Vasco. EAU Ordinaria 2021. Ejercicio A4 Sean las funciones $f(x) = 1/x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^2/8$.

a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.
b) Calcular el área de dicho recinto.

Solución:



Área = ln2 = 0.69 u².

32) País Vasco. EAU Ordinaria 2021. Ejercicio B4 Calcular, explicando los métodos utilizados,

$$I=\int(x+2)\sin(2x)dx \quad y \quad J=\int\frac{x+7}{x^2-4x-5}dx$$

Solución: $I=-\frac{1}{2}(x+2)\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+K \quad y \quad J=2\ln|x-5|-\ln|x+1|+K$

33) País Vasco. EAU Extraordinaria 2020. Ejercicio A3

Sea f la función definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x, & x\le 2 \\ x^2-bx-4, & x>2 \end{cases}$$

Calcular a y b razonadamente, sabiendo que f es derivable en toda la recta real.

Solución: Los valores buscados son: a = 2 y b = –7.

34) País Vasco. EAU Extraordinaria 2020. Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^2e^{2x}$.

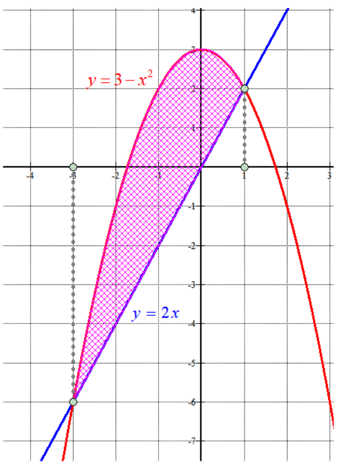
Encontrar sus extremos.

Solución: La función crece en $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ *y decrece en* $(-1,0)$. *Tiene un punto máximo en x = –1 y un mínimo en x = 0.*

35) País Vasco. EAU Extraordinaria 2020. Ejercicio A4

Representar la región finita del plano limitada por la curva $y=3-x^2$ y por la recta $y=2x$. Calcular su área.

Solución:



$Área=\frac{32}{3}=10.66\,u^2$

36) País Vasco. EAU Extraordinaria 2020. Ejercicio B4

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular la integral $\int x\cos(3x)dx$

Solución: $\int x\cos(3x)dx = \frac{xsen(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C$

37) País Vasco. EAU Ordinaria 2020. Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por $(0,2)$ y tenga un extremo en $(1,-1)$. ¿Tiene f más extremos?

Solución: a = 6; b = –9; c = 2. En x = 0 hay un máximo relativo.

38) País Vasco. EAU Ordinaria 2020. Ejercicio B3

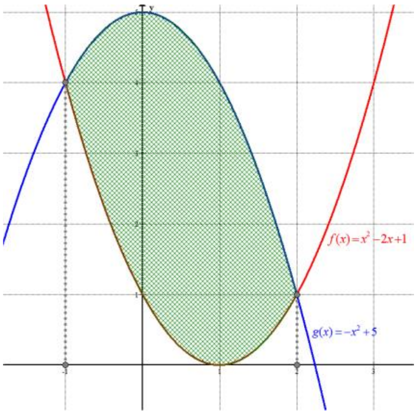
Sea $f(x) = x^2 + 9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas $P = (0, 0)$. Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto P.

Solución: $y = -6x$; $y = 6x$

39) País Vasco. EAU Ordinaria 2020. Ejercicio A4

Dibujar la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Solución:



$Área = 9\,u^2$

40) País Vasco. EAU Ordinaria 2020. Ejercicio B4

Calcular las integrales indefinidas I y J explicando los métodos usados para su resolución.

$$I = \int x\cos(2x)dx, \qquad J = \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$$

Solución: $I = \frac{xsen(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + C$ $\qquad J = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$

41) País Vasco. EAU Julio 2019. Ejercicio A3

Sea f la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

a) Obtener los valores de A, B y C para que su gráfica contenga al punto P(0,1) y para que f tenga un mínimo local en el punto Q(2,0).

b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?

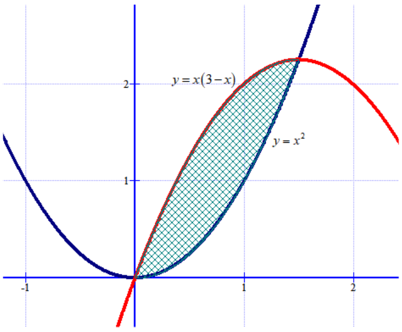
Solución: a) A = –15/4; B = 3; C = 1 b) En x = 1/2 hay un máximo local.

42) País Vasco. EAU Julio 2019. Ejercicio A4

Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3-x)$ y por $y = x^2$.

Dibujar R y calcular su área.

Solución:

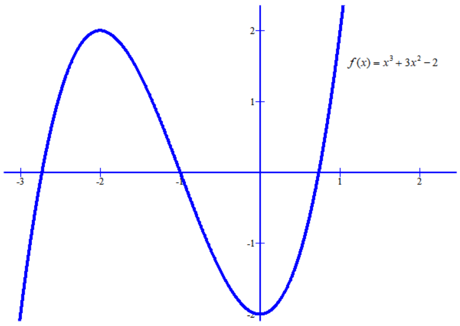


Área= $\frac{9}{8}u^2$

43) País Vasco. EAU Julio 2019. Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representar *f*.

Solución: La función crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ *y decrece en* $(-2,0)$. *Tiene un máximo local en x = –2 y un mínimo local en x = 0.*



44) País Vasco. EAU Julio 2019. Ejercicio B4

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

Solución: $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{17}{2}\ln|x+3| + C$

45) País Vasco. EAU Junio 2019. Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el **punto exterior** a su gráfica P(6,0), encontrar la recta o rectas tangentes a *f* que pasen por *P*.

Solución: Las rectas tangentes son: $y = -8x + 48$; $y = 32x - 192$

46) País Vasco. EAU Junio 2019. Ejercicio A4

Calcula $\int xe^{-4x}dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

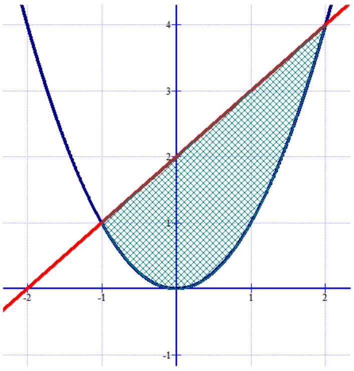
Solución: $\int xe^{-4x}dx = \frac{-xe^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16} + C$

47) País Vasco. EAU Junio 2019. Ejercicio B3

Sea *f* la función $f(x) = x^2e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de *f*. Hallar los máximos y mínimos de *f*.

Solución: $f'(x)=2xe^{-4x}-4x^2e^{-4x} \Rightarrow f''(x)=16x^2e^{-4x}-16xe^{-4x}+2e^{-4x}$. *x = 0 es mínimo; x = 1/2 es máximo.*

48) País Vasco. EAU Junio 2019. Ejercicio B4
Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y=x+2$ y por la parábola $y=x^2$. Calcular su área.

Solución: 

Área = 9/2 u^2.

49) País Vasco. EAU Julio 2018. Ejercicio A3
Dada la función $f(x)=x^2e^{-x}$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.

Solución: Decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ *y creciente en (0, 2). Mínimo en x =0 y máximo en x = 2. No tiene asíntotas verticales, y = 0 es la asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.*

50) País Vasco. EAU Julio 2018. Ejercicio A4
Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int x^2e^{-3x}dx$$

Solución: $\int x^2e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}x^2e^{-3x}-\frac{2}{9}xe^{-3x}-\frac{2}{27}e^{-3x}+C$

51) País Vasco. EAU Julio 2018. Ejercicio A5
Calcular el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 8.

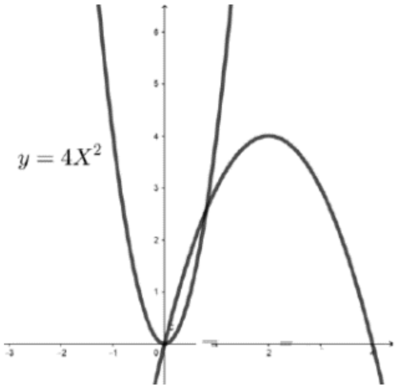
Solución: 16 unidades cuadradas.

52) País Vasco. EAU Julio 2018. Ejercicio B3
De la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ se sabe que su gráfica pasa por el punto (1, 0) y que tiene un extremo en x = 0 de valor 1.
a) Hallar A, B y C.
b) ¿El extremo situado en el punto $x = 0$ es máximo o es mínimo?

Solución: a) A = –2, B = 0 y C = 1 b) Máximo

53) País Vasco. EAU Julio 2018. Ejercicio B4
La curva $y = 4x^2$ y la curva $y = 4x - x^2$ delimitan un recinto finito del plano. Dibujar dicho recinto y calcular su área.

Solución:



Área = 32/75 unidades cuadradas

54) País Vasco. EAU Julio 2018. Ejercicio B5
Hallar razonadamente el último dígito del número $P = (2018)^{2018}(3)^{2018}$

Solución: 6

55) País Vasco. EAU Junio 2018. A3
Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2, & x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax}, & x > 1 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad en función de a.

Solución: La función no es continua si a = 0. Si a es distinto de 0 entonces es continua si a = 2 o a = 1. Es derivable en x = 1 si a = 1.

56) País Vasco. EAU Junio 2018. A4
Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\,dx$$

Solución: $\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\,dx = -\ln(x) + \ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C$

57) País Vasco. EAU Junio 2018. A5 De todos los números positivos x e y tales que $x + y = 10$ encontrar aquellos cuyo producto $P = x^2 y$ es máximo.

Solución: x = 20/3, y = 10/3.

58) País Vasco. EAU Junio 2018. B3 Dada la función $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-4}$, se pide:

a) Las asíntotas de f
b) Hallar los intervalos en donde es creciente y en donde es decreciente
c) ¿Tiene extremos la función *f*?. En caso afirmativo ¿en qué puntos?

Solución: a) x=2; x=–2; y=1 b) Crece (–∞, 0) Decrece (0, +∞) c) Máximo en x=0

59) País Vasco. EAU Junio 2018. B4 Representar el recinto plano limitado por $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y por la recta x = 1. Calcular su área

Solución: $\text{Área} = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} u^2$

60) País Vasco. EAU Junio 2018. B5

Si llamamos P a la suma de todos los números pares menores que 1001 y T a la suma de todos los múltiplos de 3 menores que 1001, ¿cuánto vale $P - T$?

Solución: 83667

61) País Vasco. EAU Julio 2017. A3

Sabemos que la recta $y = 2x - 10$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1$ en el punto P(1, –8).

a) Calcula los valores de A y B.

b) Calcular los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta de ecuación $y = -15x - 1$.

Solución: a) A = 7 y B = –15   b) x = 0 y x = –7

62) País Vasco. EAU Julio 2017. A4

Resolver la siguiente integral $\int (x+5)e^{3x}dx$

Solución: $\int (x+5)e^{3x}dx = (x+5)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$

63) País Vasco. EAU Julio 2017. A5

La suma de 45 números seguidos nos da 1890. ¿Cuál es el menor y el mayor de los números que componen esa suma?

Solución: 20 es el menor y 64 el mayor

64) País Vasco. EAU Julio 2017. B3

Dada la función $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

a) Razonar la existencia de máximos y mínimos de la función. Si existen hallarlos.

b) ¿Para qué intervalos es creciente la función?

c) Hallar todas las asíntotas de la función.

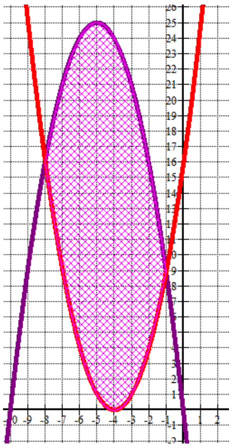
Solución: a) Mínimo en x = 2   b) Es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ *c) x = 1 es asíntota vertical,* $y = x$ *es asíntota oblicua, no tiene asíntota horizontal.*

65) País Vasco. EAU Julio 2017. B4

Calcular el área del recinto limitado por las siguientes parábolas, realizando un dibujo del mismo.

$$y = -x^2 - 10x, \; y = (x+4)^2.$$

Solución:



Área = 343/3 unidades cuadradas.

66) País Vasco. EAU Julio 2017. B5

Dado el número $N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ sea $Z = N^{2017}$.

Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿es Z múltiplo de 10?

Solución: No es múltiplo de 10.

67) País Vasco. EAU Junio 2017. A3

Dada la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$

a) Calcula A, B, y C sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal, que además la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y que corta al eje OX en $x = 1$.

b) Para los valores obtenidos calcula los máximos y los mínimos de la función.

Solución: a) A = 0, B = –8 b) Máximo en x = 0 y mínimos en x = 2 y x = –2

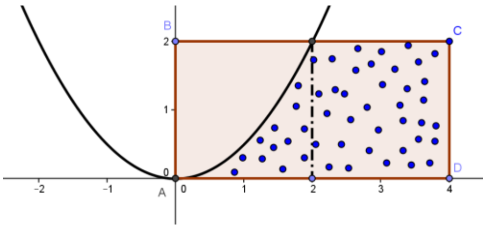
68) País Vasco. EAU Junio 2017. A4

La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo A(0,0), B(0, 2), C(4,2) , D(4, 0) en dos recintos.

a) Dibuja la gráfica de la función y el rectángulo ABCD.

b) Calcula el área de cada uno de los recintos.

Solución:



El recinto sin puntos tiene 8/3 u² de área y el punteado 16/3 u².

69) País Vasco. EAU Junio 2017. B3

Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

a) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Para qué intervalos es creciente?

b) Razonar si tiene máximos y mínimos. En caso afirmativo hallarlos.

c) Calcula la recta tangente a dicha curva en el punto cuya abcisa es $x = 0$.

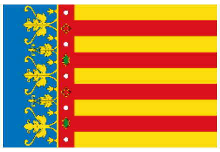
Solución: a) $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$*. Es creciente en todo su dominio b) No tiene c) y = x*

70) País Vasco. EAU Junio 2017. B4

Resolver la siguiente integral: $\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx$

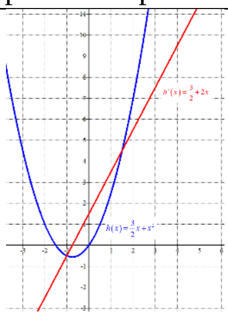
Solución: $\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx = 5\ln|x| - 4\ln|x-1| - \frac{6}{x-1} + C$

Valencia



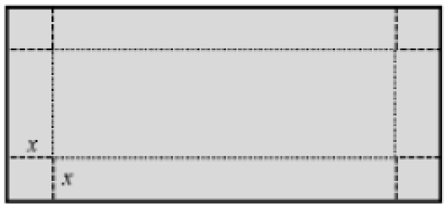
1) Valencia. PAU Extraordinaria 2023. Problema 5. Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:
a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$. (3 puntos)
b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. (2 puntos)
c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Solución: a) $a = \frac{3}{2}$. *b)*



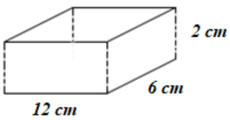
c) Área $= \frac{125}{48} \simeq 2.6\ u^2$.

2) Valencia. PAU Extraordinaria 2023. Problema 6. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:



a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)
b) Dicho volumen. (2 puntos)

Solución: a)



b) El volumen máximo es de 144 cm^3.

3) Valencia. PAU Ordinaria 2024. Problema 5. Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:
a) Obtener el dominio y las asíntotas de *f(x)*. (3 puntos)
b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. (5 puntos)
c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo [–1, 1]. (2 puntos)

Solución: a) El dominio son todos los números reales. La función solo tiene una asíntota horizontal cuando x tiende a +∞: $y = 0$. *Suponiendo k distinto de 0. b) Si* $k > 0$ *la función crece en* $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ *y* *decrece en* $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$*. Si* $k<0$ *la función decrece en* $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ *y crece en* $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$*. Si* $k>0$ *la función tiene un máximo relativo en* $x=\frac{1}{2}$*. Si* $k<0$ *la función tiene un mínimo relativo en* $x=\frac{1}{2}$*. c) Aplicando el teorema de Bolzano.*

4) Valencia. PAU Ordinaria 2024. Problema 6. Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=a, 0<a<1$, contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R. (10 puntos)

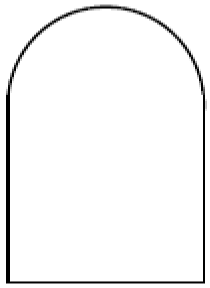
Solución: El valor buscado es $a=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

5) Valencia. PAU Extraordinaria 2023. Problema 5. Consideramos la función $f(x)=\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comprobar que $x=-\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. (2 puntos)
b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (4 puntos)
c) Obtener $\int f(x)\,dx$. (4 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com *b) La función es decreciente en todo su dominio* $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},-2\right\}$. *c)* $\int f(x)\,dx=3\ln|x+2|-x+K$

6) Valencia. PAU Extraordinaria 2023. Problema 6. Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:
a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x. (3 puntos)
b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. (5 puntos)
c) Calcular el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

Solución: a) $A(x)=10x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)x^2$ *b) Las dimensiones de la ventana con superficie máxima son* $x=\frac{40}{4+\pi}\simeq 5.6$ *metros en la base, en la parte recta vertical vale* $y=10-\frac{20}{4+\pi}-\frac{10\pi}{4+\pi}\simeq 2.8$ *metros y el semicírculo superior de radio* $\frac{20}{4+\pi}\simeq 2.8$ *metros. c)* $A\left(\frac{40}{4+\pi}\right)=\frac{200}{4+\pi}\simeq 28.005$ *metros cuadrados.*

7) Valencia. PAU Ordinaria 2023. Problema 5. Considerar la función $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)$.

Obtener:

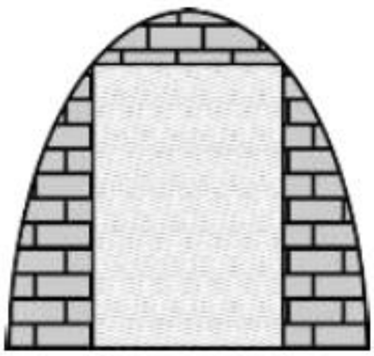
a) El dominio y las asíntotas de *f(x)*. (2 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*, y sus máximos y mínimos.(4 puntos)

c) El área comprendida entre la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=1$ y $x=2$. (4 puntos)

Solución: a) Dominio $f(x)=(-1,0)\cup(0,+\infty)$. *Tiene dos asíntotas verticales:* $x=0$ *y* $x=-1$. *No tiene asíntota horizontal ni oblicua. b) La función crece en* $\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ *y decrece en* $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. *La función presenta un máximo relativo en* $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *y un mínimo relativo en* $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *c) El área de la región tiene un valor aproximado de 1.603 unidades cuadradas.*

8) Valencia. PAU Ordinaria 2023. Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y=-x^2+12$, donde x e y se miden en metros e $y=0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:



a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)

Solución: a) La puerta de dimensiones 4 metros de base y 8 metros de altura tiene un área máxima.

b) El área de la parte frontal de la puerta es 32 metros cuadrados. El área de la parte recubierta de piedra es $16\sqrt{12}-32\simeq 23.4256$ *metros cuadrados*

9) Valencia. PAU Extraordinaria 2022. Problema 5.

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: (5 puntos)

$$\int \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx\,.$$

b) Determinar, en función de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$. (2 puntos)

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$ sea igual a $\ln\frac{25}{4}$.(3 puntos)

Solución: a) $\int \frac{18}{x^2-5x-14}dx=\ln\left(\frac{x-7}{x+2}\right)^2+K$ *b)* $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}dx=\ln\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2+\ln 100$ *c) t = 10*

10) Valencia. PAU Extraordinaria 2022. Problema 6. Considerar la función $f(x)=e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M=(x,f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

a) Determinar el área del rectángulo en función de x. (3 puntos)
b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)

Solución: a) $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ *b) El área máxima es* $\frac{1}{\sqrt{2e}} \simeq 0.429 u^2$ *y se alcanza en* $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$.

11) Valencia. PAU Ordinaria 2022. Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$.
Obtener:
a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
b) Las asíntotas de la función. (2 puntos)
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)
d) La primitiva de la función $f(x)$. (4 puntos)

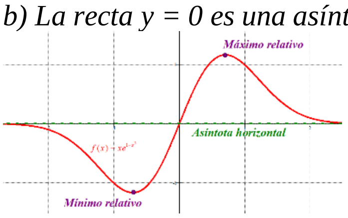
Solución: a) Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$. *Punto de corte* $A\left(0, \frac{-3}{4}\right)$ *b)* $x = 2$ *y* $x = -2$ *son asíntotas verticales.* $y = 1$ *es asíntota horizontal. c) La función crece en* $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ *y decrece en* $(0, 2) \cup (2, +\infty)$ *y presenta un máximo relativo en* $x = 0$. *d)* $\int f(x)dx = x + \frac{7}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{4}\ln|x+2| + K$

12) Valencia. PAU Ordinaria 2022. Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.
a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)
b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)

Solución: a) $f(x) = \left(\frac{240-3x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ *b) Hará falta* $\frac{2160}{9+4\sqrt{3}} \simeq 135.609$ *metros de cable. El valor mínimo de la suma de las áreas de triangulo y cuadrado es:* $\frac{172800+129600\sqrt{3}}{\left(9+4\sqrt{3}\right)^2} \simeq 1565.872\ m^2$

13) Valencia. PAU Extraordinaria 2021. Problema 3. Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:
a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. (4 puntos)
b) Las asíntotas y la gráfica de f. (3 puntos)
c) La integral $\int f(x)dx$. (3 puntos)

Solución: a) $Dominio\ f(x) = \mathbb{R}$ *La función decrece en* $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ *y crece en* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. *La función presenta un mínimo relativo en* $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *y un máximo relativo en* $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
b) La recta y = 0 es una asíntota horizontal y no tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

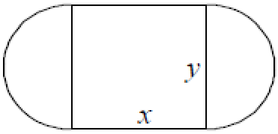


c) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + K$

14) Valencia. PAU Extraordinaria 2021. Problema 6. Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4 + \pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. (5 puntos)

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. (5 puntos)



Solución: a) $P(y)=\frac{8+2\pi}{y}+\frac{\pi}{2}y+2y$ *b) x = y = 2*

15) Valencia. PAU Ordinaria 2021. Problema 3. Consideramos la función $f(x)=\frac{x-1}{x(x+2)}$, obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función. (2 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)

c) La integral $\int f(x)dx$. (4 puntos)

Solución: a) Dominio de f(x) = $\mathbb{R}-\{-2,0\}$. *Las rectas x = 0 y x = –2 son asíntotas verticales.* $y=0$ *es asíntota horizontal. No tiene asíntota oblicua.*

b) La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(-2,1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3},+\infty)$ *y crece en* $(1-\sqrt{3},0)\cup(0,1+\sqrt{3})$.

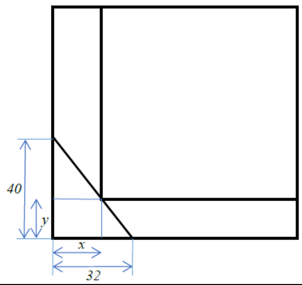
c) $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{(x+2)^3}{x}\right|\right)+K$

16) Valencia. PAU Ordinaria 2021. Problema 6. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0\le x\le 32$. (4 puntos)

b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. (4 puntos)

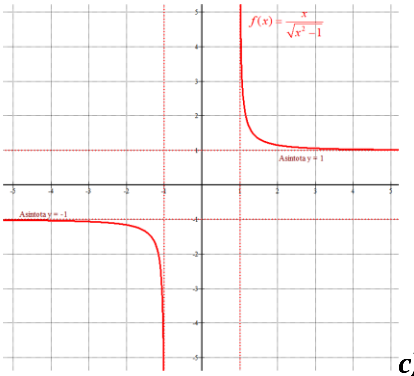
c) Calculad el valor de dicha área máxima. (2 puntos)



Solución: a) $f(x)=-\frac{5}{4}x^2+60x+3200$ *b) 56 cm y 70 cm* *c) 3920 cm*^{2}

17) Valencia. PAU Extraordinaria 2020. Problema 3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$,
obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. (3+1 *puntos*)
c) El valor de $\int_2^3 f(x)dx$. (3 *puntos*)

Solución: a) El dominio es $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. *Las asíntotas verticales son* $x=-1$ *y* $x=1$. *Las asíntotas horizontales son* $y=1$ *en* $+\infty$ *e* $y=-1$ *en* $-\infty$. *b) La función siempre decrece.*



c) $\sqrt{8}-\sqrt{3}$

18) Valencia. PAU Extraordinaria 2020. Problema 6. Los vértices de un triángulo son A(0, 12), $B(-5,\ 0)$ y C(5, 0). Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas *(–x, 0)*, *(x, 0)*, siendo $0\le x\le 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) La expresión *f(x)* del área del rectángulo anterior. (4 *puntos*)
b) El valor de *x* para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. (3 *puntos*)
c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 *puntos*)

Solución: a) $Área(x)=-\dfrac{24}{5}x^2+24x$. *b) El rectángulo de base 5 unidades y altura 6 unidades tiene área máxima de 30 unidades cuadradas. c) El rectángulo tiene de área la mitad del triángulo.*

19) Valencia. PAU Ordinaria 2020. Problema 3. Se da la función real f definida por
$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}.$$
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) El dominio y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)
b) La integral $\int f(x)dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto (2, 0). (3+1 *puntos*)
c) El área de la región limitada por la curva $y=(x)$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=4$. (3 *puntos*)

Solución: a) El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0,1\}$. $x=0$ *y* $x=1$ *son asíntotas verticales.* $y=0$ *es asíntota horizontal. b)* $F(x)=-\ln|x|+\ln(x-1)^2+\frac{1}{x}+K$. *La primitiva es* $F(x)=\ln\frac{2(x-1)^2}{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$.

c) $\acute{A}rea=\ln\frac{9}{2}-\frac{1}{4}=1.254\,u^2$

20) Valencia. PAU Ordinaria 2020. Problema 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) La expresión del área (x) del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 *puntos*)
b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función (x), $0\le x\le 20$. (4 *puntos*)
c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área. (2 *puntos*)

Solución: a) $\acute{A}rea(x)=\frac{x\sqrt{400-x^2}}{4}$. *b) En* $\left(0,\sqrt{200}\right)$ *la función crece y en* $\left(\sqrt{200},20\right)$ *decrece.*
c) En $x=\sqrt{200}$ *hay un máximo relativo del área del triángulo. Dicho valor máximo es 50* cm^2

21) Valencia. PAU Julio 2019. Problema A.3. Se da la función real *h* definida por
$h(x)=\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) El dominio de la función *h*. Los límites $\lim_{x\to+\infty}h(x)$ y $\lim_{x\to 0}h(x)$. (1 + 2 *puntos*)
b) La asíntota de la curva $y=h(x)$. (2 *puntos*)
c) La primitiva de la función *h* (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas y = 0, x = 1, x = 5 y la curva $y=h(x)$. (3 + 2 *puntos*)

Solución: a) El dominio es $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ *y* $\lim_{x\to 0}h(x)=\frac{-3}{5}$ *b)* $y=x-1$

c) $\frac{x^2}{2}-x+\ln\left(x^2+2x+5\right)+C$. *Área =* $8+\ln 5\,u^2$

22) Valencia. PAU Julio 2019. Problema B.3. Un proyectil está unido al punto (0, 2) por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y=4-x^2$ de extremos (−2,0) y (2,0).
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**
a) La función de la variable *x* que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x,4-x^2)$ de la curva $y=4-x^2$ y el punto (0, 2). (2 *puntos*)
b) Los puntos de la curva $y=4-x^2$ a mayor distancia absoluta del punto (0,2) para −2 ≤ x ≤ 2. (2 *puntos*)
c) Los puntos de la curva $y=4-x^2$ a menor distancia absoluta del punto (0, 2) para −2 ≤ x ≤ 2. (2 *puntos*)
d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y=4-x^2$ e $y=2-|x|$ cuando −2 ≤ x ≤ 2. (4 *puntos*)

Solución: a) $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}$ *b) En los puntos (2,0) y en (–2,0). c)* $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)$ *y* $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)$ *d) 20/3* u^2

23) Valencia. PAU Junio 2019. Problema A.3. Se considera la función $f(x)=xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

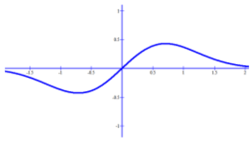
a) Las asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. *(3 puntos)*

b) La representación gráfica de la curva $y=f(x)$. *(2 puntos)*

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x)=f(x)+ax$. *(1 punto)*

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)dx$, $\int xe^{-x}dx$. *(4 puntos)*

Solución: a) La asíntota horizontal es $y=0$. *La función presenta un mínimo en* $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ *y un máximo en* $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$. *Decrece en los intervalos* $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ *y* $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},+\infty\right)$. *Crece en el intervalo* $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

b)  *c)* $a=\frac{-1}{e}$ *d)* $\int f(x)dx=\frac{1}{-2}e^{-x^2}+C$. $\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

24) Valencia. PAU Junio 2019. Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0,0) y (250,0), respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1,0) y (0,1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0,\frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del a tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 puntos)

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función **f** a lo largo del trayecto. (4 puntos)

c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su recorrido y el valor de dicha distancia. (4 puntos)

Solución: a) $f(t)=50\sqrt{t^2-8t+25}$ *b) El móvil A tarda T = 6 horas y cuarto. El móvil B tarda T = 6 horas y cuarto. La función decrece de 0 a 4 horas y crece de 4 a 6,25 horas*
c) La distancia es mínima en t = 4 horas y esa distancia es de 150 km. La distancia máxima se produce a las 0 h (al comenzar) y es de 250 Km.

25) Valencia. PAU Julio 2018. Problema A.3. Consideramos la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx\cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que *f(x)* toma el valor 22 cuando *x = 1*. (2 puntos)

b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva *y = f(x)* en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es *x = 1*. (4 puntos)

c) $\int_0^1 x cos(\pi x)\, dx$ (4 puntos)

Solución: a) a + b – c = 22 b) 3 a + 2 b – c = 0 c) $\int_0^1 x cos(\pi x)\, dx = -\frac{2}{\pi^2}$

26) Valencia. PAU Julio 2018. Problema B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que:
Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R. (3 puntos)
b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima. (5 puntos)
c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima. (3 puntos)

Solución: a) $A(x) = 624 + 6x + \frac{2400}{x}$ *b) x = 20 cm c) 24 cm de ancho y 36 cm de alto*

27) Valencia. PAU Junio 2018. Problema A.3.
Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ se pide obtener, **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)*. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. (4 puntos)
c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.(4 puntos)

Solución: a) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0,1\}$. *Las asíntotas son x = 0, x = 1 (verticales) e y = 0 (horizontal)*
b) Es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$ *y decreciente en* $(1/2, 1) \cup (1, +\infty)$ *c) Área =* $(2\ln 2 - \ln 3) \simeq 0.287\, u^2$

28) Valencia. PAU Junio 2018. Problema B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \le x \le 100$. (4 puntos)
b) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor. (3 puntos)
c) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido. (3 puntos)

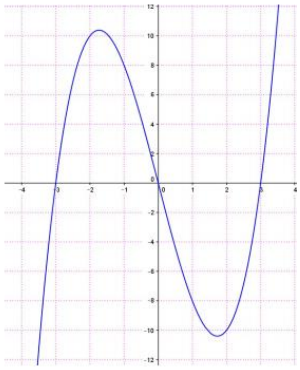
Solución: a) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(100-x)^2}{16}$ *b)* $x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9} \simeq 56.5\, cm$
c) x = 0 en este caso todo el alambre se usa para construir un cuadrado de 25 cm de lado

29) Valencia. PAU Julio 2017. Problema A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = a\,x$ y la función $f(x) = x^3 - a\,x$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente,escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. (1 + 2 puntos)
b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. (3 puntos)

c) Calcular en función del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = a\,x$, cuando $a > 1$. (2 puntos)

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (2 puntos)

Solución: a) (0, 0), $\left(\sqrt{a},0\right)$ *y* $\left(-\sqrt{a},0\right)$. *Creciente en* $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$ *y decreciente en* $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}},\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$

b) 

c) Área = $\frac{a^2}{4}u^2$ *d) a = 4*

30) Valencia. PAU Julio 2017. Problema B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O=(0,0)$, $A=(x,y)$ y $B=(0,y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo T en función de x. (3 puntos)

b) El valor de x para el que dicha área es máxima. (5 puntos)

c) El valor de dicha área máxima. (2 puntos)

Solución: a) $A(x)=\frac{x\sqrt{900-60x}}{2},\ 0<x<15$ *b) x = 10* *c) Área máxima =* $5\sqrt{300}\simeq 86.6\,u^2$

31) Valencia. PAU Junio 2017. Problema A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El costo total C de los dos cables en función de la abcisa x del punto P, cuando $0 \le x \le 18$. (3 puntos)

b) El valor de x, con $0 \le x \le 18$, para el que el costo total C es mínimo. (4 puntos)

c) El valor de dicho costo total mínimo. (3 puntos)

Solución: a) $C(x)=10\sqrt{x^2+36}+5(18-x);\quad 0\le x\le 18$ *b)* $x=\sqrt{12}\simeq 3.464\,m$ *c) 141.96 €*

32) Valencia. PAU Junio 2017. Problema B.3. Dada la función f definida por $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, (2 puntos)
y los extremos relativos de la función f. (1 punto)

b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. (3 puntos)

c) El área de la región plana limitada por la curva $y = \frac{x^2+1}{x}, 1 \le x \le e$, el segmento que une los puntos (1,0) y (e,0), y las rectas $x = 1$ y $x = e$. (4 puntos)

Solución: a) Creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ *y decreciente en* $(-1,1)$. *Máximo relativo en (–1, –2) y mínimo relativo en (1, 2) b) x = 0 es asíntota vertical, no tiene asíntota horizontal e y = x es la asíntota oblicua c) Área =* $\left(\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\right) \simeq 4.19\, u^2$