TEMA 1. NÚMEROS ENTEROS. DIVISIBILIDAD

1.1. Reglas de divisibilidad

Múltiplos y divisores

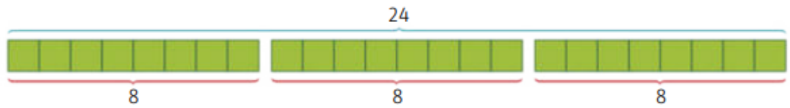
Ejemplo ▸ Kika va a comprar pilas para los 6 mandos de su videoconsola.

- Si Kika compra paquetes de 5 pilas, tendrá: 5, 10, 15, 20, … pilas.
- Si Kika compra paquetes de 8 pilas, tendrá: 8, 16, 24, 32, … pilas.

Kika compró 3 paquetes de 8 pilas porque necesitaba 24.

- Un número es **múltiplo** de otro si es el resultado de multiplicar el segundo por algún número natural.
- Un número es **divisor** o **factor** de otro si se puede dividir el segundo entre el primero de forma exacta.

Ejemplo ▸ 24 es múltiplo de 8 porque 24 es el resultado de multiplicar 8 por 3.



Además, 8 es divisor de 24, porque al dividir 24 entre 8 el resultado es exacto.

Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad permiten saber si un número es divisible entre otro sin hacer la división. Los más utilizados aparecen en la siguiente tabla:

Por	Criterio	Ejemplos
2	El número termina en cifra par.	8, 14, 42, 76, 120
3	La suma de sus cifras es múltiplo de 3.	3, 9, 15, 42, 84, 111
4	Sus dos últimas cifras son 0 o forman múltiplo de 4.	12, 84, 100, 124, 512
5	El número acaba en 0 o en 5.	10, 25, 40, 95, 135
9	La suma de sus cifras es múltiplo de 9.	45, 72, 108, 225, 333
10	El número acaba en 0.	10, 20, 70, 200, 520
11	- Se suman las cifras que ocupan posiciones pares. - Se suman las cifras que ocupan posiciones impares. - Se restan ambos resultados. - El número inicial es divisible por 11 si el resultado obtenido es 0 o es múltiplo de 11.	66, 121, 396, 572, 1001
25	Sus dos últimas cifras son 0 o forman un múltiplo de 25.	50, 100, 175, 325, 500
100	Sus dos últimas cifras son 0.	100, 300, 700, 2400

Ejemplo ▸ Para comprobar si el número 85 327 es divisible por 11:

- Sumamos las cifras que ocupan las posiciones pares: $5 + 2 = 7$
- Sumamos las cifras que ocupan las posiciones impares: $8 + 3 + 7 = 18$
- Restamos ambos resultados: $18 - 7 = 11$

El resultado es 11, por tanto 85 327 es divisible por 11.

Números primos y compuestos

Un número es **primo** si solo tiene dos divisores, el 1 y él mismo.

Un número es **compuesto** si tiene más de dos divisores.

El 1 no es primo ni compuesto. Solo tiene un divisor, él mismo.

Para determinar si un número es primo o compuesto en pocos pasos, se pueden utilizar los criterios de divisibilidad.

Ejemplo ▸ Vamos a comprobar si el número 29 es primo o compuesto.

- No es múltiplo de 2, ya que no acaba en cifra par. Por tanto, tampoco lo será de ningúno de sus múltiplos.
- No es múltiplo de 3, ya que sus cifras suman 11, que no es múltiplo de 3.
- No es múltiplo de 5, no acaba en 0 ni en 5.

Como no es múltiplo de 6, ya que no lo es ni de 2 ni de 3, y $6 \cdot 6 = 36 > 29$, no es necesario seguir, 29 es primo.

1.2. Descomposición factorial

Descomposición en factores primos

Para **descomponer un número en factores primos**, se siguen tres pasos:

1.º Se busca un divisor primo del número. Conviene empezar por los números primos más pequeños: 2, 3, 5, 7, 11...

2.º Se divide el número entre el divisor primo encontrado.

3.º Se repite el proceso hasta que el cociente que obtengamos sea 1.

Ejemplo ▸ Calcula la descomposición en factores primos de 56.

El primer divisor primo de 56 es 2:	$56 : 2 = 28$	56	2	factores primos
El primer divisor primo de 28 es 2:	$28 : 2 = 14$	28	2	
El primer divisor primo de 14 es 2:	$14 : 2 = 7$	14	2	
El primer divisor primo de 7 es 7:	$7 : 7 = 1$	7	7	
Termina el proceso porque el cociente es 1.		1		

La descomposición de 56 es: $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$

Ejemplo ▸ Al descomponer en factores primos un número, hemos obtenido el resultado $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. ¿De qué número se trata?

Realizamos las operaciones que se indican:

$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 3 \cdot 25 = 600$

El número es el 600.

Múltiplos y divisores de números descompuestos en factores

Los **múltiplos** de un número contienen todos los factores primos de dicho número.

Ejemplo ▸ Los múltiplos de 35 los obtenemos multiplicando 35 por otro número:

$35 \cdot 2 = 7 \cdot 5 \cdot 2 = 70$

$35 \cdot 3 = 7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$

$35 \cdot 4 = 7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$

Los **divisores** de un número están formados por los factores primos de dicho número y los productos de estos factores entre sí.

Ejemplo ▸ Los divisores de $175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$ son:

- 1, 5 y 7
- $5 \cdot 5 = 25$, $5 \cdot 7 = 35$
- $5 \cdot 5 \cdot 7 = 175$

Los divisores de 175 son 1, 5, 7, 25, 35 y 175.

Número de divisores de un número natural

Ejemplo ▸ Han llegado 18 cajas al almacén. ¿De cuántas maneras distintas se pueden apilar de manera que en todos los montones haya el mismo número de cajas?

Las posibilidades que tiene para apilar las cajas son:

- Una columna con 18 cajas: $1 \cdot 18 = 18$
- Dos columnas con 9 cajas en cada una: $2 \cdot 9 = 18$
- Tres columnas con 6 cajas en cada una: $3 \cdot 6 = 18$
- Seis columnas de 3 cajas en cada una: $6 \cdot 3 = 18$
- Nueve columnas con 2 cajas en cada una: $9 \cdot 2 = 18$
- Dieciocho columnas con 1 caja en cada una: $18 \cdot 1 = 18$

Hay tantas maneras distintas cómo divisores tiene el número 18, que en este caso son 6: 1, 2, 3, 6, 9 y 18.

Para calcular el **número total de divisores** de un número, se suma una unidad a cada uno de los exponentes de su descomposición en factores primos y se multiplican los resultados.

Ejemplo ▸ Calcula el número de divisores del número 18.

Descomponemos 18 en factores primos:	$18 = 2 \cdot 3^2$
Tomamos los exponentes de los factores:	$2^1 \cdot 3^2 \Rightarrow 1$ y 2
Sumamos una unidad a cada uno de los exponentes:	$1 + 1 = 2$ y $2 + 1 = 3$
Multiplicamos los resultados:	$2 \cdot 3 = 6$. Seis son los divisores de 18.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

1.3. Máximo común divisor (M.C.D) y Mínimo común múltiplo (m.c.m)

Ejemplo ▸ En el taller de repostería han horneado 36 cruasanes, 24 napolitanas y 60 palmeritas de chocolate. Quieren colocarlos en bandejas iguales, sin mezclar dulces y sin que sobre ninguno. ¿Cuál es el mayor tamaño que pueden tener las bandejas?

Como todas las bandejas tienen que tener el mismo número de dulces, ese número debe ser divisor común de 36, 24 y 60. Hallamos todos sus divisores:

- Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
- Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
- Divisores de 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Los divisores comunes a los tres números son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12. El mayor divisor común es 12.

Las bandejas tendrán un tamaño de 12 bollos.

Ten en cuenta

Dos números siempre tienen al menos un divisor común, el 1.

Si no tienen más, se dice que son **primos entre sí**.

El **máximo común divisor (m.c.d.)** de varios números es el mayor de sus divisores comunes.

Para calcular el máximo común divisor de forma rápida, se puede utilizar la descomposición en factores primos.

El **máximo común divisor** de varios números es igual al producto de sus factores primos comunes elevados a los menores exponentes.

Ejemplo ▸ Calcula el m.c.d. de 24, 36 y 60.

Primero, descomponemos los números en factores primos:

- $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$
- $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$
- $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Los divisores comunes son 2 y 3 (el 5 solo lo es de 60).

Por tanto, el m.c.d.$(24, 36, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$

Ejemplo ▸ El coche de Luis tarda 80 s en dar la vuelta al circuito, el de Ana, 60 s, y el de Rocío, 72 s. Si salen a la vez, ¿cuándo vuelven a coincidir en la salida?

Hallamos los múltiplos de 80, 60 y 72 hasta encontrar el primero común a los tres:

- Múltiplos de 80: 160, 240, 320, 400, 480, 560, 640, 720, 800...
- Múltiplos de 60: 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, 660, 720...
- Múltiplos de 72: 144, 216, 288, 360, 432, 504, 576, 648, 720, 792...

El primer múltiplo común a 80, 60 y 72 es 720. Por tanto, volverán a coincidir en la salida cuando pasen 720 segundos, es decir, a 12 minutos.

Ten en cuenta

Si dos números son primos entre sí, su mínimo común múltiplo coincide con su producto.

El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de varios números es el menor de sus múltiplos comunes.

Se puede utilizar la descomposición factorial para calcular el m.c.m. de varios números.

El **mínimo común múltiplo** de varios números es igual al producto de todos sus factores primos comunes y no comunes, elevados a los mayores exponentes.

Ejemplo ▸ Calcula el m.c.m. de 60, 72 y 80.

Primero, descomponemos los números en factores primos:

- $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$
- $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5$

Los múltiplos comunes son el 2, 3 y 5.
Por tanto, el m.c.m.$(60, 72, 80) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

1.4. Los números enteros

Existen situaciones en la vida diaria en donde la utilización de los números naturales no es suficiente. Necesitamos, entonces, utilizar números enteros.

Los **números enteros** comprenden:

- Los números enteros positivos: +1, +2, +3, +4...
- Los números enteros negativos: –1, –2, –3, –4...
- El cero.

El conjunto de todos los números enteros se representa con la letra $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{... -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4...\}$$

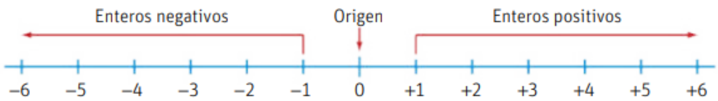
RECUERDA:
Los números negativos se obtienen cuando restamos un número grande a otro más pequeño:
$3 - 7 = -4$

Representación de números enteros

Para representar los números enteros en la recta, realizamos los siguientes pasos:

1.º Señalamos el 0, indicando el **origen**, y el 1 a su derecha a cualquier distancia.

2.º Usamos dicha distancia para situar los demás números. Los números enteros positivos se sitúan a la derecha del cero, y los negativos, a su izquierda.



Valor absoluto de un número entero

El **valor absoluto** de un número entero a, $|a|$, es igual al número natural que se obtiene al eliminar el signo.

Ejemplo ▸ Calcula el valor absoluto de los números +4 y –6.

- $|+4| = 4$
- $|-6| = 6$

Opuesto de un número entero

El **opuesto** de un número entero a, **op(a)**, es otro número entero con el mismo valor absoluto y signo contrario.

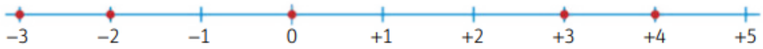
Ejemplos

▸ El opuesto de 4 es op(4) = –4.
▸ El opuesto de –6 es op(–6) = +6.

Ordenación de números enteros

Un número entero es mayor que otro si está situado más a la derecha en la recta numérica.

Ejemplo ▸ Ordena de menor a mayor los números 4, -2, -3, 3 y 0.



Por tanto, $-3 < -2 < 0 < 3 < 4$.

- Cualquier número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo.
- El 0 es menor que cualquier número entero positivo y mayor que cualquier número entero negativo.
- Dados dos números enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- Dados dos números enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.

1.5. Operaciones con números enteros

Para **sumar números enteros del mismo signo**, se suman sus valores absolutos y se deja el mismo signo.

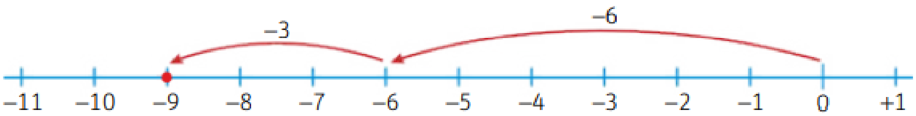
Ejemplo ▸ A las 6.00 el termómetro marcaba 6 °C bajo cero, y 2 horas después había descendido 3 °C más. ¿Qué temperatura había a las 8.00?

Tenemos que realizar la suma: $(-6) + (-3)$.

Como los dos números son negativos sumamos sus valores absolutos ($6 + 3 = 9$) y ponemos el signo menos:

$$(-6) + (-3) = -9$$

A las 8.00 había 9 °C bajo cero.



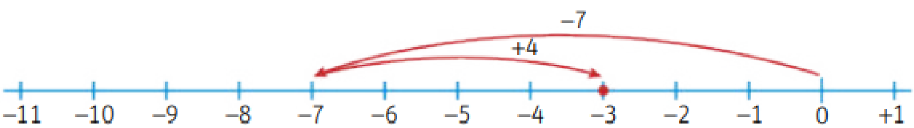
Para **sumar números enteros de distinto signo**, se restan sus valores absolutos y se deja el signo del sumando que tenga mayor valor absoluto.

Ejemplo ▸ Al día siguiente, a las 6.00, el termómetro marcaba 7 °C bajo cero, y después de 2 horas había ascendido 4 °C más. ¿Qué temperatura había a las 8.00?

Tenemos que realizar la suma: $(-7) + (+4)$.

Como tienen signos contrarios primero restamos sus valores absolutos ($7 - 4 = 3$). Como $7 > 4$ y tiene el signo negativo, el resultado es negativo: $(-7) + (+4) = -3$

A las 08:00 había 3 °C bajo cero.



La **suma de más de dos números enteros** se puede realizar de dos formas.

- Sumamos paso a paso en el orden en que aparecen los números.

$$(-12) + (+5) + (-13) + (+21) = (-7) + (-13) + (+21) = (-20) + (+21) = +1$$

- Sumamos por separado los números positivos y negativos.

$$(-12) + (+5) + (-13) + (+21) = (+26) + (-25) = +1$$

Resta de números enteros

Para **restar dos números enteros** se suma al primero el opuesto del segundo.

Ejemplos

- $(+3) - (-7) = (+3) + \text{op}(-7) = (+3) + (+7) = +10$
- $(-5) - (+4) = (-5) + \text{op}(4) = (-5) + (-4) = -9$

Sumas y restas combinadas

Para realizar **sumas y restas dentro de un paréntesis**, se puede eliminar el paréntesis teniendo en cuenta que:

- Si al paréntesis le precede un signo +, los sumandos conservan el signo.
- Si al paréntesis le precede un signo –, los sumandos cambian de signo.

Ejemplo Resuelve la operación: $-(6 - 12) + (3 - 4 + 2) - (11 + 9 - 3)$.

Si en una operación combinada aparecen sumas y restas dentro de un paréntesis, se puede resolver de dos formas.

- Resolviendo primero las operaciones dentro del paréntesis:

  $-(6 - 12) + (3 - 4 + 2) - (11 + 9 - 3) = -(-6) + (+1) - (17) = 6 + 1 - 17 = -10$

- Eliminando los paréntesis, cambiando los signos cuando sea preciso:

  $-(6 - 12) + (3 - 4 + 2) - (11 + 9 - 3) = -6 + 12 + 3 - 4 + 2 - 11 - 9 + 3 = -10$

Ten en cuenta

Para determinar el signo del producto, se utiliza la **regla de los signos**:

$+ \cdot + = +$	$- \cdot + = -$
$+ \cdot - = -$	$- \cdot - = +$

Para **multiplicar dos números enteros**, se multiplican sus valores absolutos.

- Si los dos factores tienen el mismo signo, el resultado es positivo.
- Si tienen signos opuestos, el resultado es negativo.

Ejemplos

- $(-6) \cdot (+15) = -90$
- $(-20) \cdot (-4) = +80$

La **multiplicación de varios números enteros** se puede realizar de dos formas:

- Multiplicamos de dos en dos de forma sucesiva.

Ejemplo ▸ $\underbrace{(+12)\cdot(-5)}\cdot(-4)\cdot(-10)\cdot(+3)=$

$=\underbrace{(-60)\cdot(-4)}\cdot(-10)\cdot(+3)=$

$=\underbrace{(240)\cdot(-10)}\cdot(+3)=$

$=(-2400)\cdot(+3)=-7200$

- Determinamos primero el signo del resultado y multiplicamos todos los valores absolutos:

Ejemplo ▸ $(+12)\cdot(-5)\cdot(-4)\cdot(-10)\cdot(+3)$

- El signo del producto es negativo: $(+)\cdot(-)\cdot(-)\cdot(-)\cdot(+)=(-)$, porque tenemos tres signos negativos: $(-)\cdot(-)\cdot(-)=(+)\cdot(-)=(-)$
- El producto de los valores absolutos es $12\cdot 5\cdot 4\cdot 10\cdot 3=7200$

Por tanto, el resultado de la operación es -7200.

Ejemplo ▸ Indica, sin hacer la operación el signo de la siguiente multiplicación:

$$(+1)\cdot(+7)\cdot(-6)\cdot(-2)\cdot(-10)\cdot(+5)\cdot(-12)\cdot(-11)$$

En la operación hay 5 números negativos: $(-6)\cdot(-2)\cdot(-10)\cdot(-12)\cdot(-11)$

Al ser un número impar el resultado final es negativo.

Ten en cuenta

En la división también se utiliza la **regla de los signos**:

+ : + = +	− : + = −
+ : − = −	− : − = +

smSaviadigital.com

División de números enteros

Para **dividir dos números enteros** se dividen sus valores absolutos.

- Si los dos números tienen el mismo signo, el resultado es positivo.
- Si tienen signos opuestos, el resultado es negativo.

Ejemplos

▸ $(-36):(+6)=-6$

▸ $(-32):(-8)=+4$

Múltiplos y divisores de números enteros

Los **múltiplos de un número entero** se obtienen al multiplicar dicho número por un segundo número entero positivo o negativo.

Ejemplo ▸ Calcula dos múltiplos positivos y dos negativos de 12.

$(+12)\cdot(+2)=+24$ $\quad$ $(+12)\cdot(-2)=-24$

$(+12)\cdot(+3)=+36$ $\quad$ $(+12)\cdot(-3)=-36$

Los **divisores de un número entero** están formados por sus divisores naturales y sus opuestos.

Ejemplo ▸ Indica los divisores enteros de los siguientes números.

Número	Divisores positivos	Divisores negativos
24	+1, +2, +3, +4, +6, +8, +12, +24	−1, −2, −3, −4, −6, −8, −12, −24
−45	+1, +3, +5, +9, +15, +45	−1, −3, −5, −9, −15, −45

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y multiplica y divide números enteros.

Jerarquía de operaciones

Para operar con números enteros se resuelven primero las operaciones de dentro de los **paréntesis y corchetes** y después el resto, siguiendo este orden:

1.º Se realizan las **multiplicaciones y divisiones**, de izquierda a derecha.

2.º Se realizan las **sumas y restas**.

Ejemplo ▸ $85 + 7 \cdot [-2 + 4 \cdot (-3)] + (-12) : [3 \cdot (-2)] =$

$= 85 + 7 \cdot [-2 + (-12)] + (-12) : (-6) =$

$= 85 + 7 \cdot [-2 - 12] + (-12) : (-6) =$

$= 85 + 7 \cdot (-14) + (-12) : (-6) =$

$= 85 + (-98) + (+2) =$

$= 85 - 98 + 2 = -11$

Ten en cuenta

En las operaciones combinadas se suelen suprimir los signos o paréntesis que no son necesarios.

$(-5) + (+30) = -5 + 30$

Propiedad distributiva

Propiedad distributiva. El producto de un número entero por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada sumando.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ejemplo ▸ La operación $(-12) \cdot [5 + (-8)]$ se puede resolver aplicando la propiedad distributiva, multiplicando (-12) por cada uno de los sumandos y sumando luego los resultados.

$$(-12) \cdot [5 + (-8)] = (-12) \cdot 5 + (-12) \cdot (-8) = (-60) + (+96) = +36$$

Ten en cuenta

La propiedad distributiva también se cumple para las restas, ya que restar un número equivale a sumar su opuesto.

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Extraer factor común

Extraer factor común consiste en expresar en forma de producto una suma o resta en la que hay un factor que se repite en todos los sumandos.

Ejemplo ▸ Extrae factor común y calcula: $-120 + 180 + 60 - 30$

Como todos los sumandos son múltiplos de 10, el factor común a todos ellos es 10.

$(-12) \cdot 10 + 18 \cdot 10 + 6 \cdot 10 - 3 \cdot 10 = (-12 + 18 + 6 - 3) \cdot 10 = (+9) \cdot 10 = +90$

El resultado es el mismo si realizamos directamente la operación:

$$-120 + 180 + 60 - 30 = +90$$

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y practica las operaciones combinadas.