Ecuaciones de primer grado y de segundo grado

Ecuaciones de primer grado

La forma reducida de una ***ecuación de primer grado*** con una incógnita es una igualdad del tipo $ax+b=0$, donde a y b son números reales con $a\neq 0$.
Para resolverla despejamos la ***incógnita***:

$$ax+b=0\Rightarrow ax=-b\Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

Por regla general la ecuación hay que reducirla, para ello se siguen los siguientes pasos:

1. ***Eliminar corchetes y paréntesis***.
2. ***Eliminar denominadores***.
3. ***Trasponer términos***, es decir, presentar los términos en los que aparece la incógnita en uno de los miembros de la igualdad, y los términos que no tienen incógnita en el otro.
4. ***Reducir términos semejantes.***
5. ***Despejar la incógnita.***

Resolver la ecuación:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{4}\right)-5\frac{2x-3}{3}=x\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{x-1}{4}$$

Eliminamos paréntesis:

$$\frac{2x-2}{6}-\frac{2}{12}-\frac{10x-15}{3}=x-\frac{2x}{3}+\frac{x-1}{4}$$

Eliminamos denominadores multiplicando todos los términos por el mcm de los denominares, que es 12:

$$2(2x-2)-1\cdot 2-4(10x-15)=12x-4\cdot 2x+3(x-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-4-2-40x+60=12x-8x+3x-3$$

Trasponemos términos, reducimos términos semejantes y despejamos la incógnita:

$$4x-40x-12x+8x-3x=-3+4+2-60\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -43x=-57\Rightarrow x=\frac{-57}{-43}\Rightarrow x=\frac{57}{43}$$

Ecuaciones de segundo grado

La forma reducida de una ***ecuación de segundo grado*** con una incógnita es una igualdad del tipo

$$ax^2+bx+c=0$$

donde a, b y c son números reales con $a\neq 0$ (llamados coeficientes). Para su resolución distinguiremos tres casos.

Caso 1: $b=0$. En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma $ax^2+c=0$.

Para resolverlas se despeja x^2 y luego se extrae la raíz cuadrada para despejar finalmente la incógnita.

$$3x^2-24=0\Rightarrow 3x^2=24\Rightarrow x^2=8\Rightarrow\begin{cases}x_1=\sqrt{8}\\ x_2=-\sqrt{8}\end{cases};$$

$6x^2+12=0\Rightarrow 6x^2=-12\Rightarrow x^2=-2$ (que no tiene solución ya que no se puede extraer la raíz cuadrada de un número negativo).

Caso 2: $c=0$. En este caso la ecuación de segundo grado toma la forma $ax^2+bx=0$.

El proceso de resolución consiste en extraer factor común la incógnita x pues ésta aparece en ambos términos. Una de las soluciones siempre es $x=0$. La otra solución se obtiene de igualar a cero el otro factor y de resolver la correspondiente ecuación de primer grado.

$$3x^2-18x=0\Rightarrow x(3x-18)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ 3x-18=0\Rightarrow 3x=18\Rightarrow x=\dfrac{18}{3}\Rightarrow x_2=6\end{cases}$$

Caso 3 o caso general: En este caso vamos a suponer que los tres coeficientes a, b y c son todos distintos de cero. Este caso es el más general y la ecuación de segundo grado queda, en su forma reducida, así:

$$ax^2+bx+c=0$$

La solución se obtiene de sustituir los coeficientes a, b y c en la siguiente fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Para resolver $2(3x^2+5x)=2-x$ eliminamos el paréntesis y pasamos todos los términos al primer miembro. Luego aplicamos la fórmula: $2(3x^2+5x)=2-x\Rightarrow 6x^2+10x=2-x\Rightarrow$

$$\Rightarrow 6x^2+10x-2+x=0\Rightarrow 6x^2+11x-2=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6}=\frac{-11\pm\sqrt{121+48}}{12}=$$

$$=\frac{-11\pm\sqrt{169}}{12}=\frac{-11\pm 13}{12}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-11+13}{12}\Rightarrow x_1=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}\\ x_2=\dfrac{-11-13}{12}\Rightarrow x_2=-2\end{cases}$$

En general, las ecuaciones de segundo grado hay que reducirlas a uno de los tres casos anteriores, dando los pasos que se han descrito para las de primer grado.

Ecuaciones bicuadradas y de grado superior a dos

Ecuaciones bicuadradas

La forma reducida de una ***ecuación bicuadrada*** con una incógnita es de la forma

$$ax^4+bx^2+c=0\,.$$

Para resolverla se aplica el cambio de variable $x^2=z$, con lo que se convierte en una de segundo grado:

$$ax^4+bx^2+c=0\Rightarrow a\left(x^2\right)^2+bx^2+c=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow az^2+bz+c=0$$

Ahora se resuelve esta última. Una vez despejada la incógnita z se sustituyen sus valores en el cambio $x^2=z$ para obtener los valores de la incógnita x.

Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$x^4-10x^2+9=0$$

aplicamos el cambio $x^2=z$: $z^2-10z+9=0$. Resolvemos esta última y, una vez obtenidos los valores de z, sustituimos en el cambio para obtener los de x:

$$x=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=$$

$$=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm8}{2}=\begin{cases}z_1=\dfrac{18}{2}=9\\[2mm] z_2=\dfrac{2}{2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=9\Rightarrow x=\pm3\\ x^2=1\Rightarrow x=\pm1\end{cases}$$

Ecuaciones de grado superior a dos

Una ***ecuación de grado superior a dos*** con una incógnita, se expresa de manera reducida de la forma

$$p(x)=0$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado mayor que dos.

El procedimiento para resolverlas consiste en extraer las raíces del $p(x)$:

$$x \text{ es raíz de } p(x)\Leftrightarrow x \text{ es solución de } p(x)=0$$

Por tanto debemos factorizar el polinomio $p(x)$ utilizando la regla de Ruffini.

Las raíces del polinomio serán las soluciones de la ecuación.

En el caso de que al factorizar el polinomio aparezca algún factor de segundo grado, tendremos que hallar las últimas soluciones de la ecuación resolviendo la correspondiente ecuación de segundo grado.

Por ejemplo, resolvamos la ecuación:

$$6x^5-19x^4-14x^3+67x^2-52x+12=0$$

Aplicamos Ruffini probando con los divisores del término independiente:

	6	−19	−14	67	−52	12
1		6	−13	−27	40	−12
	6	−13	−27	40	−12	0
−2		−12	50	−46	12	
	6	−25	23	−6	0	
3		18	−21	6		
	6	−7	2	0		

Puedes comprobar que ya no existen más raíces enteras. Por tanto la ecuación queda de la forma:

$$(x-1)(x+2)(x-3)\left(6x^2-7x+2\right)=0$$

Resolviendo la ecuación $6x^2-7x+2=0$ se obtiene las dos últimas raíces y soluciones de la ecuación original.

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot6\cdot2}}{2\cdot6}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{12}=$$

$$=\frac{7\pm\sqrt{1}}{12}=\frac{7\pm1}{12}=\begin{cases}x_1=\dfrac{7+1}{12}\Rightarrow x_1=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}\\[2mm] x_2=\dfrac{7-1}{12}\Rightarrow x_2=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son

$$x=1,\ x=-2,\ x=3,\ x=\frac{2}{3},\ x=\frac{1}{2}$$