1. Expresiones algebraicas

En matemáticas es muy común utilizar letras para expresar un resultado general. Por ejemplo, el área de un triángulo es "base por altura dividido por dos" y se expresa así: $\frac{b\cdot h}{2}$, donde b es la base del triángulo y h su altura.

Este tipo de lenguaje se denomina **lenguaje algebraico**. Una expresión en la que aparecen tanto números como letras, junto con las operaciones aritméticas, recibe el nombre de **expresión algebraica**.

Ejemplo 1:
Son expresiones algebraicas las siguientes:

- La suma de un número y su doble: $x+2x$
- El cuadrado de la diferencia de dos números: $(x-y)^2$
- El $k\%$ de un número c: $\frac{k\cdot c}{100}$

1.1. Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que resulta de sustituir las letras de la expresión por los números propuestos y realizar las operaciones que se indican.

Ejemplo 2:
Calcular el valor numérico de la expresión $2x^2-3xy-y^2$ para los números $x=-2$, $y=3$.
Lo que hacemos es sustituir en la expresión algebraica la letra x por el número -2 y la letra y por el número 3:

$$2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)\cdot 3-3^2=2\cdot 4+3\cdot 2\cdot 3-9=8+18-9=17$$

2. Monomios

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número y una o varias letras. El número recibe el nombre de **coeficiente**, y el conjunto de todas las letras con sus exponentes, son la **parte literal**. El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes a los que están elevados las letras que lo forman.

Ejemplo 3:
Observa la siguiente tabla, en la que se escribe el coeficiente, la parte literal y grado de tres monomios.

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$-3x^3yz^2$	-3	x^3yz^2	6
$7a^2b^3c^8$	7	$a^2b^3c^8$	13
$-5pq$	-5	pq	2
$\frac{4}{5}t^4wz^3$	$\frac{4}{5}$	t^4wz^3	8

2.1. Monomios semejantes y opuestos

Dos monomios son **semejantes** cuando tienen la misma parte literal.

Dos monomios son **opuestos** si son semejantes y además sus coeficientes son números opuestos.

Ejemplo 4:
Los monomios $7a^2b$ y $-2a^2b$ son semejantes porque tienen exactamente la misma parte literal, que es a^2b.

Los monomios $2x^3$ y $-2x^3$ son opuestos porque son semejantes (tienen la misma parte literal, que es x^3) y, además, los coeficientes son números opuestos: 2 y -2.

3. Operaciones con monomios

3.1. Suma y resta de monomios

Solamente se pueden sumar o restar monomios que sean semejantes. En este caso la suma (o resta) se realiza sumando (o restando) los coeficientes y dejando la misma parte literal.

Si los monomios no son semejantes, la suma o la resta se deja indicada.

Ejemplo 5:

Realizar las siguientes operaciones: $2x^3y+5x^3y$, $4ab^4-7ab^4$, $3x^2-2x$

- $2x^3y+5x^3y=(2+5)x^3y=7x^3y$ (en este caso, ambos se pueden sumar porque tienen la misma parte literal: x^3y).
- $4ab^4-7ab^4=(4-7)ab^4=-3ab^4$ (en este caso, ambos se pueden restar porque tienen la misma parte literal: ab^4).
- $3x^2-2x$ (no se pueden restar, se deja indicado tal cual, ya que no tienen la misma parte literal).

3.2. Multiplicación y división de monomios

Para multiplicar monomios, por un lado, multiplicamos sus coeficientes y, por otro, sus partes literales. Las partes literales se simplifican utilizando la propiedad de las potencias que dice que "producto de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes".

Para dividir monomios, por un lado, dividimos sus coeficientes y, por otro, sus partes literales. Las partes literales se simplifican utilizando la propiedad de las potencias que dice que "cociente de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes". Normalmente, la división de monomios la escribiremos usando la línea de fracción en vez de los dos puntos, para indicar la división.

Ejemplo 6:

Realiza las siguientes operaciones con monomios: $-3x^3\cdot 4x^6$, $6ab^2\cdot 5a^2b$, $(12x^5):(-4x^3)$, $\dfrac{24a^2b^3c}{8ab^2c}$

- $-3x^3\cdot 4x^6=(-3\cdot 4)(x^3\cdot x^6)=-12x^{3+6}=-12x^9$
- $6ab^2\cdot 5a^2b=(6\cdot 5)(a\cdot b^2\cdot a^2\cdot b)=30a^{1+2}b^{2+1}=30a^3b^3$
- $(12x^5):(-4x^3)=(12:(-4))\cdot(x^5:x^3)=-3x^{5-3}=-3x^2$
- $\dfrac{24a^2b^3c}{8ab^2c}=\dfrac{24}{8}\dfrac{a^2b^3c}{ab^2c}=3a^{2-1}b^{3-2}c^{1-1}=3a^1b^1c^0=3ab$ (hay que recordar que cualquier número elevado a cero es uno).

4. Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o la resta de dos o más monomios no semejantes. Cada uno de los monomios se llama **término**. Al término que no tenga parte literal (o sea, solamente un número) se le llama **término independiente**. El mayor de los grados de todos sus términos se denomina **grado del polinomio**. Al coeficiente del término o monomio de mayor grado se le llama **coeficiente líder** del polinomio.

Por cierto, si en un polinomio todos los términos tienen parte literal, es porque el término independiente es cero.

Ejemplo 7:

Polinomio	Número de términos	Término independiente	Grado	Coeficiente líder
$3a^3-4a^5+6a^2-8a-5$	5	-5	3	-4
$2x-4x^2-6x^7-5x^5$	4	0	7	-6
$4x^2y-5x^2y^2+6y^2x-7$	4	-7	4	-5

Nosotros consideraremos polinomios con una sola variable, es decir, sus términos tendrán, a lo sumo, una letra (a partir de ahora la llamaremos variable). En general nombraremos a los polinomios con letras mayúsculas seguidas de, entre paréntesis, la variable en cuestión. Así, $P(x)$ designa un polinomio cuya variable es x, y $T(a)$ designa un polinomio cuya variable es a. Como muestra de lo que se quiere decir, en el ejemplo anterior podríamos haber puesto $P(x)=2x-4x^2-6x^7-5x^5$, así como $T(a)=3a^3-4a^5+6a^2-8a-5$.

Se llama **polinomio opuesto** de un polinomio $P(x)$ a otro polinomio, que designaremos como $-P(x)$, y que se obtiene cambiando de signo los coeficientes de todos los términos de $P(x)$.

4.1. Valor numérico de un polinomio

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ para un número cualquiera $x=a$, lo expresaremos como $P(a)$. El valor numérico $P(a)$ se obtiene sustituyendo la variable x por el número a en el polinomio $P(x)$ y haciendo las operaciones indicadas.

Ejemplo 8:
El valor numérico del polinomio $P(x)=3x^5+2x^4-x^3-x^2+16$, para $x=-2$ es:

$$P(-2)=3(-2)^5+2(-2)^4-(-2)^3-(-2)^2+16=3\cdot(-32)+2\cdot16-(-8)-4+16=$$
$$=-96+32+8-4+16=-44$$

5. Operaciones con polinomios

5.1. Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios sumamos sus monomios semejantes, dejando indicada la suma de los monomios no semejantes. Para restarlos sumamos al primer polinomio el polinomio opuesto del segundo.

Ejemplo 9:
Sumar los polinomios $P(x)=3x^3-2x^2+6x-5$; $Q(x)=-7x^4-9x^3+5x^2-4x-2$

$$P(x)+Q(x)=\left(3x^3-2x^2+6x-5\right)+\left(-7x^4-9x^3+5x^2-4x-2\right)=$$
$$=3x^3-2x^2+6x-5-7x^4-9x^3+5x^2-4x-2=-7x^4-6x^3+3x^2+2x-7$$

Restar los polinomios $R(x)=6x^5-4x^3+10x^2-5x+1$; $S(x)=7x^4-3x^3+9x^2-2x-6$

$$R(x)-S(x)=\left(6x^5-4x^3+10x^2-5x+1\right)-\left(7x^4-3x^3+9x^2-2x-6\right)=$$
$$=\left(6x^5-4x^3+10x^2-5x+1\right)+\left(-7x^4+3x^3-9x^2+2x+6\right)=$$
$$=6x^5-4x^3+10x^2-5x+1-7x^4+3x^3-9x^2+2x+6=6x^5-7x^4-x^3+x^2-3x+7$$

5.2. Producto de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Ejemplo 10:
Multiplica el polinomio $P(x)=3x^4-2x^3+4x^2-11x+1$ por el monomio $-6x^2$:

$$-6x^2\cdot P(x)=-6x^2\cdot\left(3x^4-2x^3+4x^2-11x+1\right)=-6x^2\cdot3x^4+6x^2\cdot2x^3-6x^2\cdot4x^2+6x^2\cdot11x-6x^2\cdot1=$$
$$=-18x^6+12x^5-24x^4+66x^3-6x^2$$

5.3. Producto de dos polinomios

El producto de dos polinomios se halla multiplicando cada uno de los monomios de uno de los polinomios por el otro polinomio, y sumando después los polinomios obtenidos en las multiplicaciones.

Ejemplo 11:

Halla el producto de los polinomios $P(x)=-3x^2+2x-5$ y $Q(x)=2x^2-6$

$$P(x)\cdot Q(x)=\left(-3x^2+2x-5\right)\cdot\left(2x^2-6\right)=\left(-3x^2\right)\cdot\left(2x^2-6\right)+(2x)\cdot\left(2x^2-6\right)+(-5)\left(2x^2-6\right)=$$

$$=-6x^4+18x^2+4x^3-12x-10x^2+30=-6x^4+4x^3+8x^2-12x+30$$

5.4. División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio, dividimos cada término del polinomio entre el monomio.

Ejemplo 12:

Divide el polinomio $P(x)=12x^5-3x^4+6x^3-18x^2$ entre el monomio $2x^2$

$$P(x):Q(x)=\left(12x^5-3x^4+6x^3-18x^2\right):\left(2x^2\right)=12x^5:2x^2-3x^4:2x^2+6x^3:2x^2-18x^2:2x^2=$$

$$=6x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-9$$

5.5. División de polinomios

Al igual que ocurre al dividir números, dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, al dividirlos, obtenemos otros dos polinomios, $C(x)$ y $R(x)$, que cumplen:

$$P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)\quad;\quad \text{grado}\,R(x)<\text{grado}\,Q(x)$$

A los polinomios $P(x)$, $Q(x)$, $C(x)$ y $R(x)$ se les denomina, respectivamente, polinomio dividiendo, divisor, cociente y resto de la división. El procedimiento para dividir dos polinomios lo explicaremos con un ejemplo.

El procedimiento para dividir un polinomio $P(x)$ entre otro polinomio $Q(x)$ es el siguiente:

1. Colocamos el dividendo y el divisor ordenados de mayor a menor grado. Si falta algún término del dividiendo dejamos un espacio.
2. Empezamos dividiendo los términos de mayor grado del dividendo y del divisor, para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicamos este término por cada uno de los términos del divisor y los colocamos, con signo contrario (pues hemos de restar) bajo los términos correspondientes del dividendo.
4. Continuamos el proceso hasta que el grado del polinomio obtenido es menor que el grado del divisor (éste último será el resto de la división).

Ejemplo 13:

Dados $P(x)=2x^2-x^4-x+3$ y $Q(x)=-x^2+2x-2$, efectuar la división $P(x):Q(x)$.

Colocamos adecuadamente el dividendo y el divisor y procedemos:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
-x^4 & & +2x^2 & -x & +3 & -x^2+2x-2 \\ \cline{6-6}
x^4 & -2x^3 & +2x^2 & & & x^2+2x \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & +4x^2 & -x & +3 & \\
 & +2x^3 & -4x^2 & +4x & & \\ \cline{2-5}
 & & & 3x & +3 &
\end{array}$$

De este modo, el cociente es el polinomio $C(x)=x^2+2x$ y el resto es el polinomio $R(x)=3x+3$.

Además, puedes comprobar que se cumple la siguiente igualdad ("dividendo igual a divisor por cociente más el resto"):

$$-x^4+2x^2-x+3=\left(-x^2+2x-2\right)\cdot\left(x^2+2x\right)+(4x+3)$$

6. División de polinomios entre binomios del tipo $x \pm a$. Regla de Ruffini

Hay una forma rápida de realizar divisiones de polinomios entre binomios del tipo $x-a$ o $x+a$. Para verlo, lo mejor es hacerlo con un ejemplo, ya que es la forma en que mejor se entiende.

Supongamos que queremos dividir el polinomio $P(x)=3x^4-2x^2-15x-3$ entre el binomio $Q(x)=x-2$.

Procedemos de la siguiente manera:

- Escribimos en una primera línea todos los coeficientes del polinomio ordenado de mayor grado a menor grado. En nuestro ejemplo son 3, 0, -2, -15 y -3. Observa que el coeficiente de x^3 es 0, ya que el término $0x^3$ no se escribe por ser igual a cero, pero el coeficiente del polinomio es igual a 0. Esto hay que tenerlo en cuenta.
- Escribimos, debajo de la primera línea y a la izquierda el término independiente del binomio cambiado de signo. En nuestro caso se trata del número 2.
- Trazamos una línea vertical a la derecha del término independiente del binomio cambiado de signo y una línea horizontal debajo del mismo.

Observa:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -2 & -15 & -3 \\ 2 & & 6 & 12 & 20 & 10 \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Ahora se procede de la siguiente manera:

- Escribimos, bajo la línea horizontal, el primer coeficiente del polinomio, que en este caso es 3.
- Multiplicamos el término de la izquierda, que es 2 por el número recién bajado, que es 3. El resultado, 6, lo escribimos debajo del segundo coeficiente del polinomio, que es 0. Sumamos estos dos números (0 y 6), y el resultado, que vuelve a ser 6, lo escribimos debajo de la línea horizontal. De esta misma manera procedemos hasta que llegamos al final. El último número se suele encerrar dentro de una "cajita".

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -2 & -15 & -3 \\ & & + & + & + & + \\ 2 & & 6 & 12 & 20 & 10 \\ \hline & 3 & 6 & 10 & 5 & \boxed{7} \end{array}$$

Los números obtenidos bajo la línea horizontal, sin contar el de la "cajita" son los coeficientes del cociente de la división. Es nuestro caso el cociente será $C(x)=3x^3+6x^2+10x+5$. El número que hay dentro de la "cajita" es el resto de la división: $R=7$.

Este procedimiento para dividir polinomios entre binomios del tipo $x-a$ o $x+a$ se llama ***regla de Ruffini***.

Ahora se puede comprobar que la división es correcta, teniendo en cuenta que "dividendo es igual a divisor por cociente más el resto": $P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$.

Efectivamente, realizando la operación $Q(x)\cdot C(x)+R(x)$ se obtiene como resultado $P(x)$:

$$Q(x)\cdot C(x)+R(x)=(x-2)\left(3x^3+6x^2+10x+5\right)+7=3x^4+6x^3+10x^2+5x-6x^3-12x^2-20x-10+7=$$

$$=3x^4-2x^2-15x-3=P(x).$$

Si al dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x\pm a$ se obtuviera resto igual a cero, podríamos escribir la siguiente igualdad: $P(x)=(x\pm a)\cdot C(x)$. En este caso se dice que $x\pm a$ es un ***factor*** del polinomio $P(x)$, y que el número a o $-a$ (según dividamos entre $x-a$ o $x+a$) es una ***raíz*** del polinomio $P(x)$.

7. Factor común

La **propiedad distributiva** del producto respecto de la suma o resta se puede escribir, de manera general, así:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \;\;;\;\; a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$$

a, b, c pueden ser números, monomios o incluso polinomios cualesquiera.

Ejemplo 13:

- $-5\cdot(8-6)=-5\cdot 8-(-5)\cdot 6=-40+30=-10$
- $5x\cdot(3x+2)=5x\cdot 3x+5x\cdot 2=15x^2+10x$
- $-a^2b\cdot(3a-2ab+3a^2b-ab^2)=-a^2b\cdot 3a-(-a^2b)\cdot(2ab)+(-a^2b)\cdot(3a^2b)-(-a^2b)\cdot(ab^2)=$
  $=-3a^3b+2a^3b^2-3a^4b^2+a^3b^3$

Si la propiedad distributiva se expresa de derecha a izquierda tenemos lo que se conoce como sacar **factor común**:

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c) \;\;;\;\; a\cdot b-a\cdot c=a\cdot(b-c)$$

Ejemplo 14:

- $8x^2-4x=4x\cdot(2x-1)$
- $34a^4-14a^2b+28ab^3=2a\cdot(17a^3-7ab+14b^3)$
- $24y^2z^3-12y^3z^2+18y^4z^3=6y^2z^2\cdot(4z-2y+3y^2z)$

8. Igualdades notables

7.1. Cuadrado de una suma

La expresión $(a+b)^2$ es el cuadrado de una suma de dos monomios. Desarrollémosla:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=a^2+2ab+b^2$$

Por tanto, el **cuadrado de una suma** es igual al *cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo*.

7.2. Cuadrado de una diferencia

La expresión $(a-b)^2$ es el cuadrado de la diferencia de dos monomios. Desarrollémosla:

$$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a\cdot a-a\cdot b-b\cdot a+b\cdot b=a^2-2ab+b^2$$

Por tanto, el **cuadrado de una diferencia** es igual al *cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo*.

7.3. Suma por diferencia

La expresión $(a+b)\cdot(a-b)$ es la suma por la diferencia de dos monomios. Desarrollémosla:

$$=(a+b)\cdot(a-b)=a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=a^2-b^2$$

Por tanto, el producto de una **suma por su diferencia** es igual a la *diferencia de sus cuadrados*.

Ejemplo 15:

- $(3x+5)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 5+5^2=9x^2+30x+25$
- $(4-2x)^2=4^2-2\cdot 4\cdot 2x+(2x)^2=16-16x+4x^2$
- $(6+5a)\cdot(6-5a)=6^2-(5a)^2=36-25a^2$