

EJERCICIO 3. Análisis. El número de vehículos vendidos por un concesionario a lo largo del último año se estima que viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 28 - (t-4)^2 & 0 \leq t < 6 \\ (t-10)^2 + 8 & 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de vehículos vendidos. ¿Cuál ha sido el mayor número de vehículos vendidos? ¿Y el menor? ¿En qué momentos se han producido? Justifique sus respuestas.

b) Con la información del apartado anterior, represente la gráfica de la función.

c) ¿Hubo algún período del año en el que el número de vehículos vendidos haya sido inferior a 12 unidades? Justifique su respuesta.

a) La función es continua en $t = 6$.

$$\left. \begin{aligned} N(6) &= (6-10)^2 + 8 = 24 \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} N(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} 28 - (t-4)^2 = 28 - (6-4)^2 = 24 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} N(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} (t-10)^2 + 8 = 24 \end{aligned} \right\} \Rightarrow N(6) = \lim_{t \rightarrow 6^-} N(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} N(t) = 24$$

La función es continua en su intervalo de definición $[0, 12]$

Calculamos la derivada de la función y buscamos sus puntos críticos.

$$N'(t) = \begin{cases} -2(t-4) & 0 \leq t < 6 \\ 2(t-10) & 6 < t \leq 12 \end{cases}$$

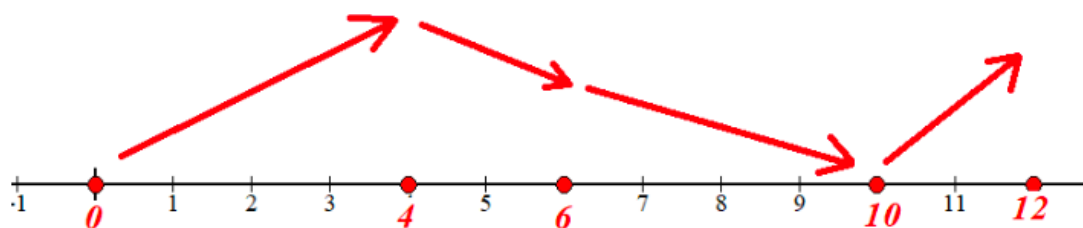
$$N'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2(t-4) = 0 \rightarrow t = 4 \in (0, 6) \\ 2(t-10) = 0 \rightarrow t = 10 \in (6, 12) \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes de $t = 4$, entre 4 y 6, entre 6 y 10, por último, entre 10 y 12.

- En el intervalo $[0, 4)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale $N'(2) = -2(2-4) = 4 > 0$.
La función crece en $[0, 4)$.
- En el intervalo $(4, 6)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale $N'(5) = -2(5-4) = -2 < 0$.
La función decrece en $(4, 6)$.
- En el intervalo $(6, 10)$ tomamos $t = 8$ y la derivada vale $N'(8) = 2(8-10) = -4 < 0$.
La función decrece en $(6, 10)$.
- En el intervalo $(10, 12]$ tomamos $t = 11$ y la derivada vale $N'(11) = 2(11-10) = 2 > 0$. La función crece en $(10, 12]$.

La función crece en $[0, 4) \cup (10, 12]$ y decrece en $(4, 10)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un valor máximo en $t = 4$, siendo este valor $N(4) = 28 - (4 - 4)^2 = 28$.

La función tiene un mínimo en $t = 10$, siendo este valor $N(10) = (10 - 10)^2 + 8 = 8$

Conclusión: El número de vehículos vendidos crece los cuatro primeros meses, decrece del mes cuarto al mes décimo y vuelve a crecer en los últimos dos meses del año.

Valoramos el número de coches vendidos en el mes 0, 4, 10 y 12 para decidir donde se encuentra el máximo y mínimo absoluto.

$$N(0) = 28 - (0 - 4)^2 = 12$$

$$N(4) = 28 - (4 - 4)^2 = 28$$

$$N(10) = (10 - 10)^2 + 8 = 8$$

$$N(12) = (12 - 10)^2 + 8 = 12$$

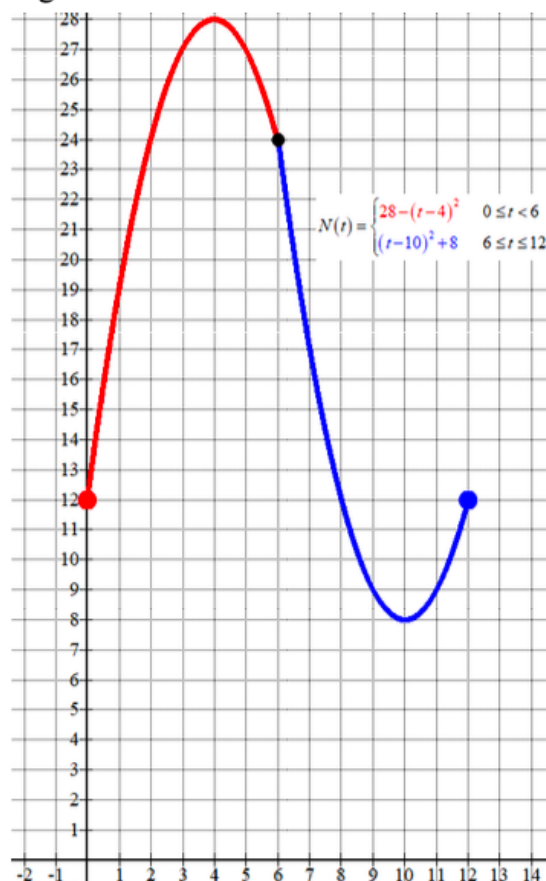
El máximo número de coches vendidos es 28 en el cuarto mes.

El número mínimo de coches vendidos es 8 en el mes décimo.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

t	$N(t) = 28 - (t - 4)^2$	$0 \leq t < 6$
0	8	
4	28	
5	27	

t	$(t - 10)^2 + 8$	$6 \leq t \leq 12$
6	24	
10	8	
12	12	



c) Observando la gráfica vemos que se venden 12 coches en el mes 0, en el mes 8 y en el mes 12. Se venden menos de 12 unidades en el mes noveno, décimo y undécimo.

EJERCICIO 4. Análisis. Considérese la siguiente función:

$$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$$

donde a, b, c son números reales.

a) Calcular a, b, c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por $(2,8)$ y que tiene un extremo relativo en $(0,16)$.

b) Para $a = b = 0$ y $c = 16$, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$.

a) Si la función $f(x)$ pasa por $(2,8)$ significa que $f(2) = 8$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^3 - 2x^2 + bx + c \\ f(2) &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 = a \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = 8a - 8 + 2b + c \Rightarrow \boxed{8a + 2b + c = 16}$$

Si la función tiene un extremo relativo en $(0,16)$ significa que la función pasa por $(0, 16)$ y que la derivada se anula para $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^3 - 2x^2 + bx + c \\ f(0) &= 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 16 = a \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 16}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 - 4x + b \\ f'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Sustituimos estos valores en la primera ecuación obtenida.

$$\left. \begin{aligned} 8a + 2b + c &= 16 \\ c &= 16 \\ b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8a + 0 + 16 = 16 \Rightarrow 8a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Los valores buscados son $a = 0, b = 0$ y $c = 16$.

b) Para $a = b = 0$ y $c = 16$ la función queda $f(x) = -2x^2 + 16$.

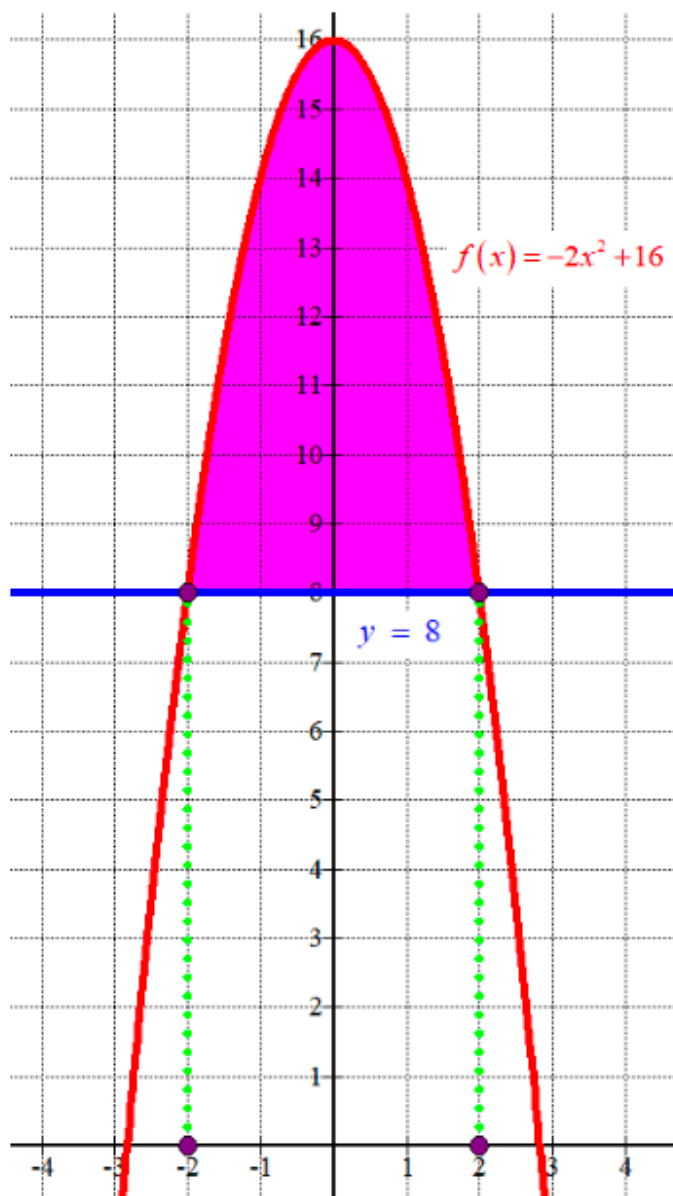
Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función con la recta $y = 8$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 16 \\ y &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 = -2x^2 + 16 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

El área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$ es el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 2 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 -2x^2 + 16 - 8 dx &= \int_{-2}^2 -2x^2 + 8 dx \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^2 = \left[-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 8 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{2(-2)^3}{3} + 8(-2) \right] = \\ &= -\frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} + 16 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \approx 21.33 \end{aligned}$$

El área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$ tiene un valor aproximado de 21.33 unidades cuadradas.



EJERCICIO 3. Análisis. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$, en donde a, b, c son números reales, pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo en el punto $P(4, 16)$.

a) Calcule los valores de a, b, c .

b) Realice la representación gráfica de la función $f(x)$ y determine el área comprendida entre dicha función y el eje OX .

a) Si la función pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$ debe cumplir $f(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 = c}$$

La función queda $f(x) = ax^2 + bx$. Si la función tiene un máximo en el punto $P(4, 16)$ significa que $f(4) = 16$, que $f'(4) = 0$ y que $f''(4) < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx \\ f(4) = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow 16 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 \Rightarrow 16 = 16a + 4b \Rightarrow 4 = 4a + b \Rightarrow \boxed{b = 4 - 4a}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx \rightarrow f'(x) = 2ax + b \\ f'(4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 8a + b \Rightarrow \boxed{b = -8a}$$

Unimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} b = 4 - 4a \\ b = -8a \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - 4a = -8a \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-4}{4} = -1} \Rightarrow \boxed{b = -8(-1) = 8}$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = 8$ y $c = 0$.

La función queda $f(x) = -x^2 + 8x$, por lo que la segunda derivada es $f''(x) = -2$ y $f''(4) = -2 < 0$.

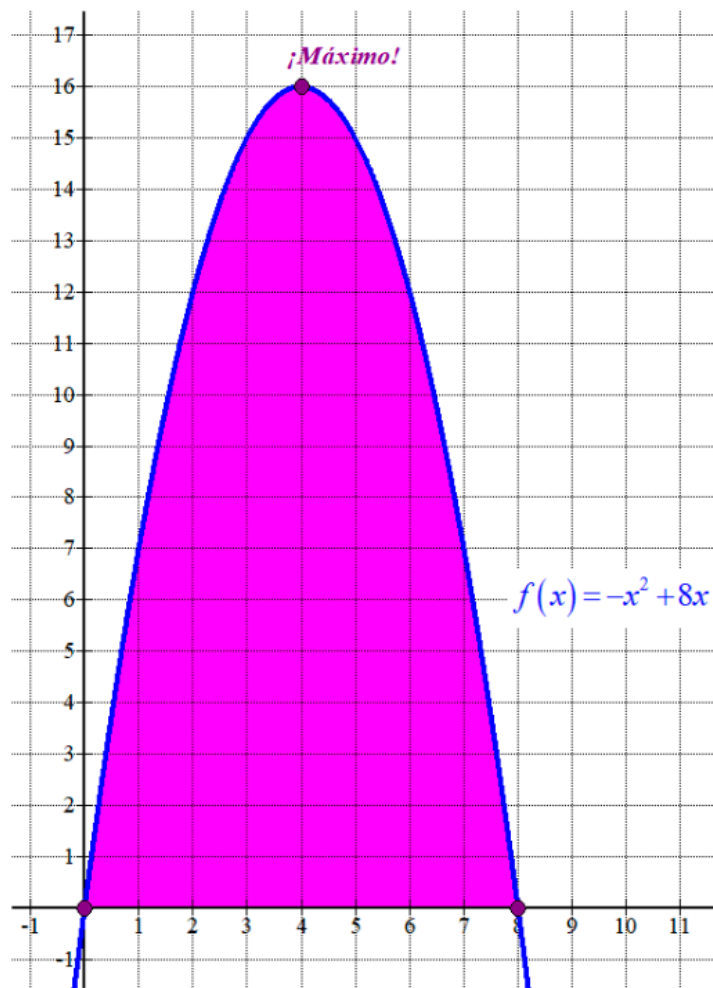
b) La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 8x$ es una parábola. Sabemos que tiene un máximo en el punto $(4, 16)$.

Hallamos los puntos de corte con el eje OX .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 8x \\ \text{eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 8x = 0 \Rightarrow -x(x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores, representamos su gráfica y la región del plano encerrada entre la gráfica y el eje OX .

x	$f(x) = -x^2 + 8x$
0	0
2	12
4	16 <i>Máximo</i>
6	12
8	0



El área comprendida entre la gráfica de la función y el eje OX es el valor de la integral definida entre 0 y 8 de la función.
 Por el dibujo observamos que el área va a tener un valor grande.

$$\text{Área} = \int_0^8 f(x) dx = \int_0^8 -x^2 + 8x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 \right]_0^8 =$$

$$= \left[-\frac{8^3}{3} + 4 \cdot 8^2 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 4 \cdot 0^2 \right] = \boxed{\frac{256}{3} \approx 85.333 \text{ u}^2}$$

El área comprendida entre la gráfica de la función y el eje OX tiene un valor aproximado de 85.33 unidades cuadradas.

EJERCICIO 4. Análisis. Una fábrica produce un artículo de pesca deportiva y vende cada unidad a un precio $P(x)$ (en euros) que depende del número total de unidades producidas x :

$$P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \quad 0 \leq x \leq 30.$$

Se sabe que la producción de x unidades supone un coste fijo de 80 euros más un coste variable de 11,25 euros por unidad.

a) Calcule las expresiones de las funciones de coste, ingreso y beneficio.

b) ¿Cómo debe planificarse la producción para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Cuál sería el precio de venta por unidad en ese caso?

a) El coste de la fabricación de x unidades es $C(x) = 80 + 11.25x$.

Los ingresos son el producto del número de unidades por su precio.

$$I(x) = x \cdot P(x) = x \cdot \left(-\frac{x^2}{20} + x + 55 \right) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 55x, \quad 0 \leq x \leq 30$$

El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.

$$B(x) = I(x) - C(x) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 55x - (80 + 11.25x) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 43.75x - 80 \quad 0 \leq x \leq 30$$

b) Derivamos la función beneficio y buscamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 43.75x - 80 \Rightarrow B'(x) = \frac{-3x^2}{20} + 2x + 43.75$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2}{20} + 2x + 43.75 = 0 \Rightarrow -3x^2 + 40x + 875 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4(-3)(875)}}{2(-3)} = \frac{-40 \pm 110}{-6} = \begin{cases} \frac{-40 + 110}{-6} = \frac{-20}{3} \notin [0, 30] \\ \frac{-40 - 110}{-6} = 25 \in [0, 30] \end{cases}$$

La función beneficio tiene un punto crítico en $x = 25$, averiguamos si es máximo o mínimo sustituyendo este valor en la segunda derivada.

$$B'(x) = \frac{-3x^2}{20} + 2x + 43.75 \Rightarrow B''(x) = \frac{-6x}{20} + 2 \Rightarrow B''(25) = \frac{-6 \cdot 25}{20} + 2 = \frac{-11}{2} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función beneficio tiene un valor máximo relativo en $x = 25$. Como esta función crece entre 0 y 25 y decrece entre 25 y 30 este máximo será máximo absoluto.

$$\text{Calculamos el beneficio máximo: } B(25) = \frac{-25^3}{20} + 25^2 + 43.75 \cdot 25 - 80 = 857.5.$$

El beneficio máximo que se puede conseguir es de 857.5 € con la producción de 25 unidades.

Calculamos el precio por unidad para $x = 25$: $P(25) = -\frac{25^2}{20} + 25 + 55 = 48.75$ euros por unidad.

2023 ORDINARIA

O volume de auga (en millóns de litros) almacenado nun embalse ao longo dun período de 11 anos en función do tempo t (en anos) vén dado pola función $V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000$, $0 \leq t \leq 11$

a) Determine os períodos de crecemento e decrecemento da auga almacenada.

$$V'(t) = 3t^2 - 48t + 180 \rightarrow V'(t) = 0 \rightarrow t = 6 \text{ e } t = 10 \text{ (puntos críticos)}$$

En $(0, 6)$, $V'(t) > 0 \rightarrow V$ crecente

En $(6, 10)$, $V'(t) < 0 \rightarrow V$ decrecente

En $(10, 11)$, $V'(t) > 0 \rightarrow V$ crecente

A auga almacenada crece desde o momento inicial ata transcorridos 6 anos e desde transcorridos 10 anos ata transcorridos 11 anos.

A auga almacenada decrece desde transcorridos 6 anos ata transcorridos 10 anos.

b) Calcule a cantidade de auga almacenada no último ano ($t = 11$).

$$V(11) = 11^3 - 24 \times 11^2 + 180 \times 11 = 8407$$

A cantidade auga almacenada no último ano e de 8407 millóns de litros.

c) Calcule o ano do período no que o volume almacenado foi máximo e o volume máximo que tivo o embalse ao longo dese período.

$t_0 = 6$ e un máximo relativo

$$V(6) = 6^3 - 24 \times 6^2 + 180 \times 6 = 8432$$

$$V(11) = 8407$$

$t_0 = 6$ e un máximo absoluto

O máximo almacenamento de auga prodúcese no sexto ano e ascende a 8432 millóns de litros.

Os beneficios obtidos durante o primeiro ano (en centos de euros) por un establecemento dedicado ó reparto de comida a domicilio veñen dados pola función

$$B(t) = t(t-a)^2, \quad 0 \leq t \leq 12$$

onde t é o tempo transcorrido en meses desde a apertura do establecemento.

a) Calcule o valor do parámetro a tendo en conta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.

$$B'(t) = (t-a)^2 + 2t(t-a) = (t-a)(3t-a)$$

$$B''(t) = (3t-a) + 3(t-a) = 6t - 4a; B''(6) = 0 \rightarrow 36 - 4a = 0 \rightarrow a = 9$$

b) Para $a = 9$, cal foi o maior beneficio obtido? En que momento ou momentos se produciu? Xustifique as respostas.

$$B(t) = t(t-9)^2; B'(t) = (t-9)^2 + 2t(t-9) = (t-9)(3t-9); B'(t) = 0 \rightarrow t=9, t=3 \text{ (puntos críticos)}$$

En $(0, 3)$, $B'(t) > 0 \rightarrow B$ crecente

En $(3, 9)$, $B'(t) < 0 \rightarrow B$ decrecente

En $(9, 12)$, $B'(t) > 0 \rightarrow B$ crecente

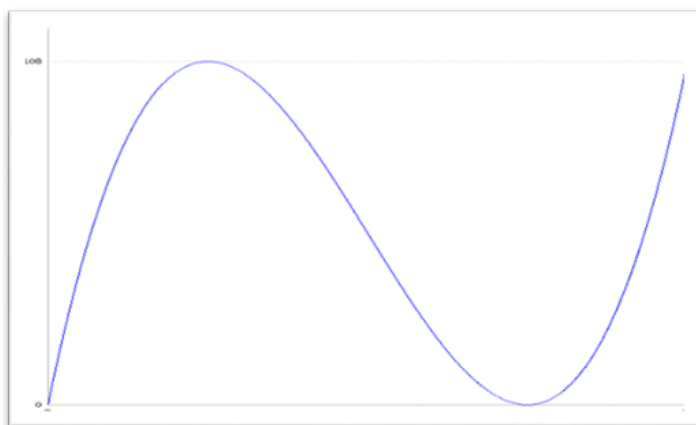
$t_0 = 3$ e un máximo relativo : $(3, 108)$ ($B(3) = 108$)

$t_0 = 9$ e un mínimo relativo : $(9, 0)$ ($B(9) = 0$)

$t=0 \rightarrow B(0) = 0$; $t=12 \rightarrow B(12) = 108$

O maior beneficio obtido foi de 10800€ e prodúcese transcorridos 3 meses e transcorridos 12 meses desde a apertura do establecemento.

c) Para $a = 9$, represente a gráfica da función $B(t)$ tendo en conta a información anterior e o estudo dos seus intervalos de crecemento e decrecemento.



2023 EXTRAORDINARIA

EXERCICIO 3. Análise. O número de exemplares vendidos dunha revista (en miles de unidades) nos primeiros cinco meses del ano ven dado pola función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t - 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1 & \text{se } 3 < t \leq 5 \end{cases} \quad \text{onde } t \text{ é o tempo transcorrido en meses}$$

a) Estude o crecemento e decrecemento do número de exemplares vendidos. Calcule en que momentos se produciron o máximo e o mínimo número de ventas e a canto ascenderon.

En (0, 3) $N(t) = -t^2 + 2t + 8 \rightarrow N'(t) = -2t + 2 \rightarrow N'(t) = 0 \rightarrow t = 1$ (punto crítico)

En (0, 1), $N'(t) > 0 \Rightarrow N$ crecente

En (1, 3), $N'(t) < 0 \rightarrow N$ decrecente

En $t_0 = 1$ máximo relativo: (1, 9) ($N(1) = 9$)

En (3, 5) $N'(t) = 2 \rightarrow N'(t) = 0$ non ten solución

En (3, 5), $N'(t) > 0 \Rightarrow N$ crecente

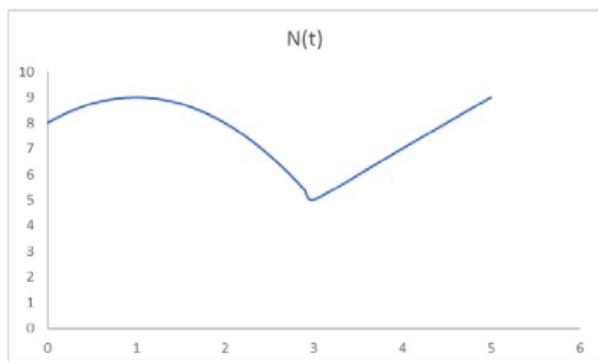
$$N(0) = 8, N(3) = 5, N(3^+) = 5, N(5) = 9$$

O número de exemplares vendidos crece desde o momento inicial ata transcorrido 1 mes e desde transcorridos 3 meses ata transcorridos 5 meses

O máximo número de ventas prodúcese transcorrido 1 mes e tamén transcorridos 5 meses e ascende a 9000 exemplares

O número mínimo de ventas prodúcese transcorridos 3 meses e é de 5 000 exemplares

b) Represente graficamente a función $N(t)$. Calcule a area da rexión delimitada pola gráfica da función $N(t)$, o eixe de abscisas e as rectas $t=0$ e $t=5$.



$$\text{Area} = \left| \int_0^3 (-t^2 + 2t + 8) dt \right| + \left| \int_3^5 (2t - 1) dt \right|$$

$$\left| \frac{-t^3}{3} + t^2 + 8t \right|_0^3 + \left| t^2 - t \right|_3^5 = 24 + 14 = 38 \text{ u}^2$$

EXERCICIO 4. Análise. Dada a función $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \neq 0$

a) Calcule os valores do parámetro "a" para que $f(x)$ teña un punto crítico en $x_0=3$.

$$x_0=3, \text{ punto crítico} \Rightarrow f'(3)=0$$

$$f'(x) = 1/a - a/x^2 \rightarrow f'(3) = 1/a - a/9 = 0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

Os valores do parámetro "a" para os que $f(x)$ ten un punto crítico en $x_0=3$ son $a=3$ e $a=-3$

b) Para $a=3$, estude o crecemento e decrecemento da función e os seus máximos e mínimos, se existen. Estude tamén os seus intervalos de concavidade e convexidade e os seus puntos de inflexión, se existen.

$$f(x) = x/3 + 3/x, x \neq 0$$

$$f'(x) = 1/3 - 3/x^2 \rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \text{ puntos críticos}$$

$$\text{En } (-\infty, -3), f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ crecente}$$

$$\text{En } (-3, 0), f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ decrecente}$$

$$\text{En } (0, 3), f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ decrecente}$$

$$\text{En } (3, +\infty), f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ crecente}$$

$$x_0=-3 \text{ máximo relativo: } (-3, -2) \quad (f(-3)=-2)$$

$$x_0=3 \text{ mínimo relativo: } (3, 2)$$

$$f''(x) = 6/x^3 \rightarrow f''(x) = 0 \text{ non ten solución}$$

$$\text{En } (-\infty, 0), f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ cóncava}$$

$$\text{En } (0, +\infty), f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ convexa}$$

Non existen puntos de inflexión

2022 ORDINARIA

EXERCICIO 3. Análise. Nunha zona protexida dun parque natural o número de aves $N(t)$, en centos, en función do tempo t (anos transcorridos desde que se contabilizan as aves) vén dado

$$\text{pola función } N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{se } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & \text{se } t > 10 \end{cases}$$

- Calcule os intervalos de crecemento e decrecemento da función $N(t)$. Entre que anos crece a función? Entre que anos decrece?
- Cando se alcanza o número mínimo de aves no parque? Cantas aves hai nese momento?
- Calcule o intervalo de tempo no que a poboación de aves se mantén entre 5000 e 7500 aves. A que valor tende a poboación de aves co paso do tempo?

EXERCICIO 3. Análise.

$$N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{se } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & \text{se } t > 10 \end{cases}$$

- Calcule os intervalos de crecemento e decrecemento da función $N(t)$. Entre que anos crece a función? Entre que anos decrece?

En $(0,10)$:

$$N'(t) = 2t - 8 \rightarrow N'(t) = 0 \rightarrow t = 4, \text{ punto crítico}$$

En $(0,4)$ $N'(t) < 0 \Rightarrow N$ decrecente

En $(4,10)$ $N'(t) > 0 \Rightarrow N$ crecente

$$t_0 = 4 \text{ Mínimo relativo} \rightarrow N(4) = 34$$

En $(10, +\infty)$:

$$N'(t) = 250/t^2 \rightarrow N'(t) = 0 \text{ non ten solución}$$

En $(10, +\infty)$ $N'(t) > 0 \Rightarrow N$ crecente

$$N(10) = 70, N(10^+) = 70$$

O número de aves decrece desde o inicio ata transcorridos 4 anos e a partir de ese momento crece

- Cando se alcanza o número mínimo de aves no parque? Cantas aves hai nese momento?

$$N(0) = 50$$

O número mínimo de aves alcánzase transcorridos 4 anos, sendo 3.400 aves

- Calcule o intervalo de tempo no que a poboación de aves se mantén entre 5000 e 7500 aves. A que valor tende a poboación de aves co paso do tempo?

$$\begin{cases} \text{En } (0,10) & t^2 - 8t + 50 \geq 50 \rightarrow t^2 - 8t \geq 0 \quad (t = 0, t \geq 8) \\ \text{En } (10, +\infty) & 95 - \frac{250}{t} \leq 75 \rightarrow (t \leq 12,5) \end{cases}$$

O intervalo de tempo no que a poboación de aves se mantén entre 5000 e 7500 aves vai desde transcorridos 8 anos ata transcorridos 12 e medio

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(95 - \frac{250}{t} \right) = 95, \text{ co paso do tempo o número de aves tende a 9.500}$$

EXERCICIO 4. Análise. Dada a función $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$

a) Calcule o valor do parámetro "a" tendo en conta que a función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.

$$f''(2)=0$$

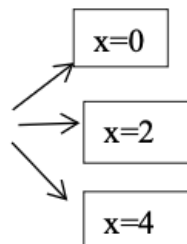
$$f'(x)=3x^2 - 2ax + 8$$

$$f''(x)=6x-2a \rightarrow f''(2)=12-2a=0 \Rightarrow a=6$$

b) Para $a = 6$, calcule a área do recinto limitado pola gráfica da función $f(x)$ e o eixe OX.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$



Puntos de corte co eixe OX: $x=0$, $x=2$, $x=4$

$$\text{Area} = \left| \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| + \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right|$$

$$\left| \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| = \left| x^4/4 - 2x^3 + 4x^2 \right|_0^2 = |4-0|=4$$

$$\left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| = \left| x^4/4 - 2x^3 + 4x^2 \right|_2^4 = |0-4|=4$$

$$\text{Area} = 4+4 = 8 \text{ u}^2$$

2022 EXTRAORDINARIA

EXERCICIO 3. Análise. Os custos dunha empresa, en centos de miles de euros, veñen dados pola función:

$$C(t) = t^3 - \frac{21}{2}t^2 + 30t - 12, t \text{ é o tempo en anos e } 1 \leq t \leq 6$$

a) Calcule os custos máximos alcanzados. En que momento se producen?

$$C'(t) = 3t^2 - 21t + 30 \rightarrow C'(t) = 0 \rightarrow t = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 360}}{6} \begin{matrix} \swarrow 2 \\ \searrow 5 \end{matrix}$$

$t=2$ y $t=5$ puntos críticos

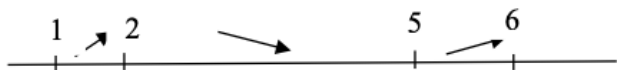
$$C''(t) = 6t - 21 \rightarrow C''(2) = -9 < 0 \Rightarrow t = 2 \text{ punto máximo } (C(2)=14)$$

$$C''(5) = 9 > 0 \Rightarrow t = 5 \text{ punto mínimo } (C(5)=1/2=0,5)$$

$$C(1)=17/2=8,5 ; C(6)=6$$

O custo máximo alcanzado foi de 1.400.000 € e alcanzouse no segundo ano.

b) Estude o crecemento e decrecemento dos custos. Determine o custo mínimo e en que momento se alcanza.



$$(1,2) C'(t) > 0 \Rightarrow C \text{ crecente}$$

$$(2,5) C'(t) < 0 \Rightarrow C \text{ decrecente}$$

$$(5,6) C'(t) > 0 \Rightarrow C \text{ crecente}$$

Os custos aumentan desde o primeiro o segundo ano e desde o quinto o sexto. Decrecen desde o segundo o quinto ano.

O custo mínimo foi de 50.000 euros no quinto ano

c) Cales son os custos ao comezo e ao final do período en estudo? Razoe as respostas.

O custo ao principio do período foi de 85.000 euros ($C(1)=8,5$) e o custo ao final do período foi de 600.000 euros ($C(6)=6$)

EXERCICIO 4. Análise. Dada a función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - a & \text{se } x > 1 \end{cases}$

a) Calcule o valor do parámetro a para que a función $f(x)$ sexa continua en todo $\mathbb{R}$.

$f(x) = -x^2 + 1$ e continua en $(-\infty, 1)$

$f(x) = 2x - a$ e continua en $(1, \infty)$

$f(x)$ e continua en $x=1$ se $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

$f(1) = -1 + 1 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 + 1 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 - a$

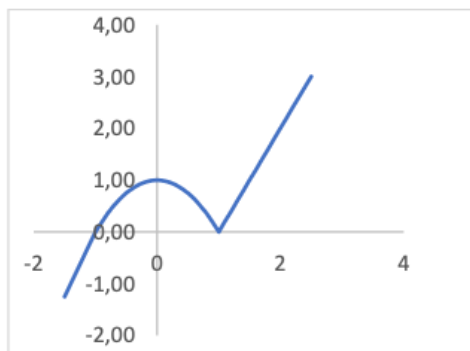
$2 - a = 0 \rightarrow a=2$, f e continua en todo $\mathbb{R}$ se $a=2$

b) Para $a=2$ calcule os extremos relativos da función $f(x)$ e represéntea.

En $(-\infty, 1)$ $f'(x) = -2x$; $f'(x) = -2x = 0 \rightarrow x = 0$ punto crítico

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f$ crecente; En $(0, 1)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f$ decrecente
 $x=0$ máximo relativo, $f(0)=1$

En $(1, \infty)$ $f'(x) = 2 > 0 \rightarrow f$ crecente
 $x=1$ mínimo relativo $f(1)=0$



c) Calcule a área da rexión delimitada pola función $f(x)$, para $a=2$, e as rectas $Y=0$, $X=0$ e $X=2$.

$\text{Área} = \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^2 (2x - 2) dx = -x^3/3 + x \Big|_0^1 + x^2 - 2x \Big|_1^2 = (2/3 - 0) + (0 + 1) = 5/3 \text{ u}^2$

2021 ORDINARIA

EXERCICIO 3. Análise.

A cantidade de CO₂ (en millóns de toneladas) emitida á atmosfera por unha determinada rexión ó longo do ano 2020, vén dada pola función

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \quad \text{sendo } t \text{ é o tempo transcorrido en meses desde comezo do}$$

ano.

a) Estudie en que períodos se produciu un aumento/diminución da cantidade de CO₂ emitida á atmosfera.

Estudiamos a monotonía da función $C(t)$

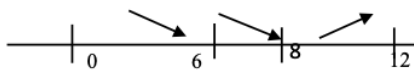
➤ En $(0,6)$: $C(t) = 5 - \frac{t}{3}$

$$C'(t) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \text{C decrecente no intervalo } (0,6)$$

➤ En $(6,12)$: $C(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18$

$$C'(t) = \frac{1}{2}t - 4; \quad C'(t) = 0 \Rightarrow t = 8 \text{ (punto crítico)}$$

En $(6,8)$ $C'(t) < 0 \Rightarrow \text{C decrecente no intervalo } (6,8)$



En $(8,12)$ $C'(t) > 0 \Rightarrow \text{C crecente no intervalo } (8,12)$

$t=8$ mínimo relativo, $C(8)=2 \Rightarrow \text{Min}(8,2)$

$C(0)=5$; $C(6^-)=3$; $C(6)=3$; $C(12)=6$ máximo valor de $C(t)$ en $[0, 12]$

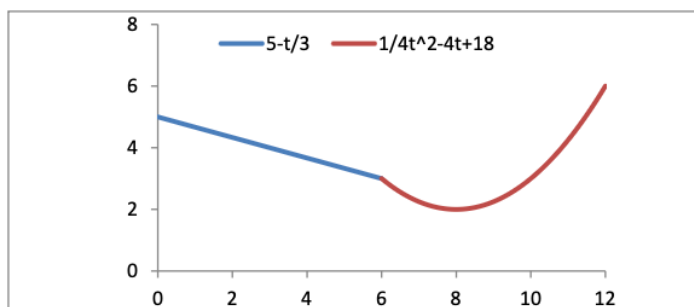
A cantidade de CO₂ emitida a atmosfera diminúe desde o momento inicial ata transcorridos 8 meses e diminúe desde ese instante ata finalizar o ano(mes 12)

b) Cales son as cantidades máxima e mínima de CO₂ emitidas á atmosfera ó longo do ano 2020? En que momentos se produciron?

A cantidade máxima de CO₂ emitida e de 6 millóns de toneladas que se producen o finalizar o ano (mes 12)

A cantidade mínima de CO₂ emitida e de 2 millóns de toneladas que se producen transcorridos 8 meses.

c) Represente a gráfica da función $C(t)$ tendo en conta o estudo realizado nos apartados anteriores.



EXERCICIO 4. Análise. Un fabricante de automóviles fai un estudo sobre os beneficios, en miles de euros, ao longo dos dez últimos anos, e comproba que estes se axustan á función

$$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \text{ se } 0 \leq t \leq 10, (t \text{ en anos})$$

a) Que beneficios obtivo a empresa o último ano do estudo?

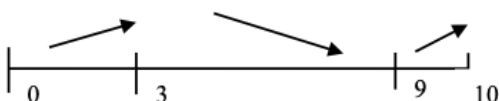
$$B(10) = 10^3 - 18 \times 10^2 + 81 \times 10 - 3 = 7$$

O último ano ($t=10$) obtivo **7000€ de beneficios.**

b) Determine os períodos de crecemento e decrecemento dos beneficios.

$$B'(t) = 3t^2 - 36t + 81; B'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} \Rightarrow t = \frac{12 \pm 6}{2} = \begin{matrix} 9 \\ 3 \end{matrix} \quad (9 \text{ e } 3 \text{ puntos críticos})$$



Os beneficios **augmentan** entre o inicio e o terceiro ano

(0,3) e entre os anos 9 e 10 (9,10), **diminúen** entre o terceiro e noveno ano (3,9).

Signo $B'(t)$

c) En que anos se producen os beneficios máximos e mínimos e a canto ascenden?

$$B(t) \text{ ten un máximo en } t=3; B(3)=105$$

Os **beneficios máximos** ascenden a **105.000€** no **terceiro ano** ($t=3$)

$$B(t) \text{ ten un mínimo en } t=9; B(9)=-3; B(0)=-3$$

Os **beneficios mínimos**(perdas neste caso) son de **-3000€** o **inicio** ($t=0$) e no **noveno ano** ($t=9$)

d) Calcule $\int_1^2 B(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_1^2 B(t) dt &= \int_1^2 (t^3 - 18t^2 + 81t - 3) dt = \left[\frac{t^4}{4} - 6t^3 + \frac{81}{2}t^2 - 3t \right]_1^2 \\ &= (4 - 48 + 162 - 6) - \left(\frac{1}{4} - 6 + \frac{81}{2} - 3 \right) = 121 - \frac{163}{4} = \frac{321}{4} = \mathbf{80,25} \end{aligned}$$

2021 EXTRAORDINARIA

EXERCICIO 3. Análise. Depois de t horas de funcionamento o rendimento de unha máquina (en unha escala de 0 a 100) ven dado por a función $r(t) = \frac{kt}{t^2+4}$ con $t > 0$

a) Calcule K sabendo que o rendimento as 4 horas é de 76.

b) Calcule os intervalos de crecemento e decrecemento do rendimento durante las 7 primeiras horas de funcionamento.

c) ¿En que momento se consegue o rendimento máximo?, ¿Cal é o seu valor?

➤ **Calculamos k**

$$r(4) = \frac{4k}{16+4} = 76 \Rightarrow 4k = 1520 \Rightarrow k = 380$$

$$r(t) = \frac{380t}{t^2+4} \text{ con } t > 0$$

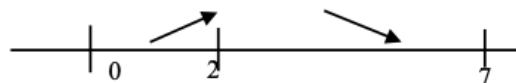
➤ **Estudamos o crecemento e decrecemento de $r(t)$**

$$r'(t) = \frac{380(t^2+4) - 380t \cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{1520 - 380t^2}{(t^2+4)^2} = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2 \text{ (descartamos } t = -2 \text{ xa que } t > 0)$$

$t = 2$ punto crítico

➤ En $(0, 2)$: $r'(t) > 0 \Rightarrow r$ crecente no intervalo $(0, 2)$

➤ En $(2, 7)$: $r'(t) < 0 \Rightarrow r$ decrecente no intervalo $(2, 7)$



➤ $t = 2$ é un máximo da función (xustifíquese)

Polo tanto o rendimento máximo acádase as 2 horas, e vale $r(2) = \frac{380 \cdot 2}{2^2+4} = 95$

Máximo(2,95)

EXERCICIO 4. Análise. Unha empresa pode vender x unidades ao mes de un determinado produto ao prezo de $518 - x^2$ euros por unidade. Por outra parte, o fabricante ten gastos mensuais: unhas fixas de 225 euros e outras de $275x$ euros que dependen do número x de unidades.

a) Determine as funcións $I(x)$ e $B(x)$ que expresan os ingresos e beneficios obtidos pola produción e venda de x unidades, respectivamente. Que beneficio se obtén se se producen e se venden 10 unidades?

b) Calcule o número de unidades que hai que producir para obter o máximo beneficio. ¿A canto ascenderían os ditos beneficios? ¿Cal sería o prezo de venda de unha unidade nese caso?

a) A función Ingresos, $I(x)$, ven dada por

$$\text{➤ } I(x) = (518 - x^2) \cdot x = 518x - x^3, x > 0$$

A función Gastos, $G(x)$, será $G(x) = 225 + 275x$, $x > 0$

$$\text{➤ } \text{A función Beneficios, } B(x), \text{ calcúlase como } B(x) = I(x) - G(x) = 518x - x^3 - (225 + 275x) = -x^3 + 243x - 225, x > 0$$

Se se producen e venden 10 unidades os beneficios obtidos serán:

$$B(10) = -10^3 + 243 \cdot 10 - 225 = 1105€$$

b) Para calcular o beneficio máximo calculamos $B'(x) = -3x^2 + 243$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 243 = 0 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm 9 \text{ (descartamos } x = -9 \text{ xa que } x > 0)$$

Comprobamos que $x = 9$ é un máximo ($B''(x) = -6x$; $B''(9) = -54 < 0$)

➤ A función **Beneficio**, $B(x)$, presenta un **máximo** para un número de **unidades $x = 9$**

➤ **Os beneficios máximos** serían $B(9) = -9^3 + 243 \cdot 9 - 225 = 1233€$

Calculamos o prezo de venda $P(x) = 518 - x^2$

Se $x = 9$, $P(9) = 518 - 81 = 437€$ por unidade

2020 ORDINARIA

PREGUNTA 3. Análise. O número de persoas (en miles) que visitan cada ano un parque temático vén dado pola función

$$P(t) = \frac{180t}{t^2 + 9}, t \geq 0 \text{ onde } t \text{ é o tempo transcorrido en anos desde a súa apertura no ano 2010 } (t = 0).$$

- a) Determine os períodos de crecemento e decrecemento do número de visitantes.
- b) En que ano recibiu o maior número de visitantes? A canto ascenden? Razoe as respostas.
- c) A partir de que ano o número de visitantes será inferior a 18000 persoas? Que ocorrerá co número de visitantes co paso do tempo? Razoe as respostas.

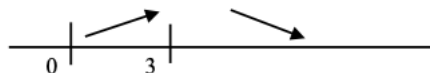
a) $P(t) = \frac{180t}{t^2 + 9}$

$$P'(t) = \frac{180(9 - t^2)}{(t^2 + 9)^2} \rightarrow P'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ (punto crítico)}$$

En $(0, 3)$ $P'(t) > 0 \Rightarrow P$ e crecente en $(0, 3)$

En $(3, \infty)$ $P'(t) < 0 \Rightarrow P$ e de crecente en $(3, \infty)$

$t_0 = 3$ máximo relativo $\rightarrow P(3) = 30$ (e un máximo absoluto xa que $P(0) = 0$)



O número de visitantes crece ata transcorridos tres anos (2013) desde a súa apertura (2010). A partir de 2013 o número de visitantes vai decrecendo.

b) $t = 0 \rightarrow$ ano 2010

$t = 3 \rightarrow$ ano 2013

O maior número de visitantes rexistrouse no ano 2013 con 30000 persoas.

c) Calculamos t tal que $P(t) < 18$

$$\frac{180t}{t^2 + 9} < 18 \Rightarrow 180t < 18t^2 + 18 \times 9 \Rightarrow t^2 - 10t + 9 > 0 \Rightarrow t > 9 \text{ y } t < 1$$

Solución: $(0, 1) \cup (9, \infty)$

$t = 9 \rightarrow$ ano 2019

A partir do ano 2019 o número de visitantes será inferior a 18000 persoas.

Calculamos o $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{180t}{t^2 + 9} = 0$

Co paso do tempo o número de visitantes irá diminuíndo, tendendo a 0 persoas.

PREGUNTA 4. Análise. Dada a función $f(x) = -4x^2 + 12x - 5$

a) Realice a súa representación gráfica estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremo relativo.

b) Calcule a área do recinto limitado pola gráfica da función $f(x)$, o eixe OX e as rectas $x=1$, $x=2$.

$$f(x) = -4x^2 + 12x - 5$$

a) Puntos de corte cos eixes:

eixe OY : $x=0 \rightarrow f(0) = -5 \rightarrow$ Corta a OY en **(0,-5)**

$$\text{eixe OX: } -4x^2 + 12x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 80}}{-8} =$$

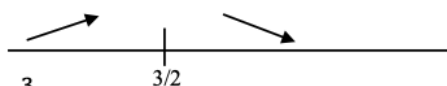
1/2

5/2

Corta a OX en **(1/2,0), e (5/2,0)**

Monotonía

$$f'(x) = -8x + 12; f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad \text{punto crítico}$$

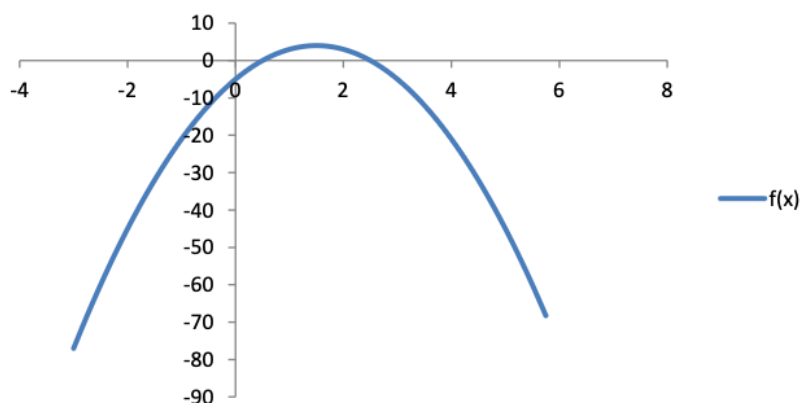


En $(-\infty, \frac{3}{2})$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creciente en $(-\infty, \frac{3}{2})$

En $(\frac{3}{2}, \infty)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreciente en $(\frac{3}{2}, \infty)$

$x_0 = \frac{3}{2} \rightarrow$ máximo relativo (e absoluto) $\rightarrow f(\frac{3}{2}) = 4$ **Vértice da parábola (3/2,4)**

$$f(x) = -4x^2 + 12x - 5$$



2020 EXTRAORDINARIA

PREGUNTA 3. Análise. Os gastos financeiros dunha organización, en centos de miles de euros, seguen a

función: $G(t) = \begin{cases} 4 - \left(\frac{t}{3}\right), & 0 \leq t \leq 3 \\ (5t - 3)/(t + 1), & t > 3 \end{cases}$ sendo t o tempo en anos transcorridos.

a) En que momento os gastos son iguais a 400.000 euros? Razoe a resposta.

b) Cando crece $G(t)$? Cando decrece $G(t)$? Cando os gastos alcanzan o seu valor mínimo e canto valen?

c) Que ocorre cos gastos cando o número de anos crece indefinidamente?

a)

$$G(t)=4 \rightarrow \begin{cases} 4 - \left(\frac{t}{3}\right) = 4 \Rightarrow t = 0 \\ (5t - 3)/(t + 1) = 4 \Rightarrow 5t - 3 = 4t + 4 \Rightarrow t = 7 \end{cases}$$

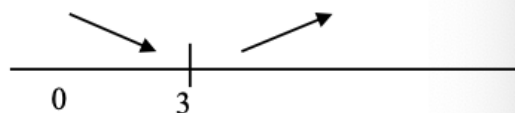
Solución: Os gastos son iguais a 400000 euros a o inicio ($t=0$) e transcorridos 7 anos.

b)

- En $(0, 3)$, $G(t) = 4 - \left(\frac{t}{3}\right)$

$$G'(t) = -1/3 < 0 \Rightarrow G \text{ decrecente en } (0, 3)$$

- En $(3, \infty)$, $G(t) = (5t - 3)/(t + 1)$



$$G'(t) = 8/(t+1)^2 > 0 \Rightarrow G \text{ crecente en } (3, \infty)$$

$$G(3) = G(3^+) = 3$$

$$G(0) = 4$$

G ten un mínimo en $t=3$

Solución:

G decrece ata transcorridos 3 anos e a partir de ese momento e crecente.

O gasto mínimo alcanzase transcorridos 3 anos e vale 300000 euros

$$c) \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{5t-3}{t+1} \right) = 5$$

Solución:

Co paso do tempo os gastos irán crecendo, tendendo o seu valor a 500000 euros.

PREGUNTA 4. Análise. Unha pequena empresa comercializa paraugas a 60 euros a unidade. O custo de produción diario de " x " paraugas vén dado pola función $C(x)=x^2-10x$, estando limitada a súa capacidade de produción a un máximo de 70 paraugas ó día ($0 \leq x \leq 70$)

a) Obteña as expresións das funcións que determinan os ingresos e os beneficios diarios obtidos pola empresa en función do número de paraugas producidos " x ".

b) Determine o número de paraugas que debe producir diariamente para obter o máximo beneficio. A canto ascenden os ingresos, os custos e os beneficios diarios neste caso? Razoe a resposta.

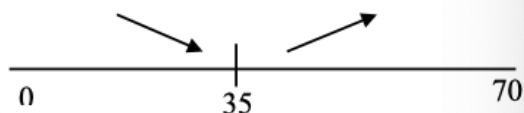
a) Ingresos $I(x) = 60x, 0 \leq x \leq 70$

Beneficios $B(x) = I(x) - C(x) = 60x - x^2 + 10x = 70x - x^2, 0 \leq x \leq 70$

b) $B'(x) = -2x + 70$

$B'(x) = 0 = -2x + 70 \rightarrow x = 35$, punto crítico

- En $(0, 35)$, $B'(x) > 0 \rightarrow B$ crecente
- En $(35, 70)$, $B'(x) < 0 \rightarrow B$ decrecente



En $x=35$ hai un máximo

$I(35) = 60 \times 35 = 2100$ euros

$C(35) = 35^2 - 10 \times 35 = 875$ euros

$B(35) = 70 \times 35 - 35^2 = 1225$ euros

Solución:

Para obter os máximos beneficios debe producir 35 paraugas diarios.

Neste caso os ingresos diarios ascenden a 2100 euros, os costes a 875 euros e os beneficios a 1225.

2019 ORDINARIA

2. O número de espectadores dunha serie (N), en millóns, en función do tempo (t), en anos, segue un modelo dado pola función: $N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2}$

- a) Calcula o valor de K se se sabe que ao final do segundo ano o número de espectadores era de 4.2 millóns.
b) Estuda o crecemento, decrecemento e o momento e valor máximo da audiencia.

N = número de espectadores en millóns

$N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2}$, sendo t o tempo en anos

- a) Calculamos K substituíndo en N(t)

$$N(2) = K + \frac{16}{1+4} = 4,2 \Rightarrow K = 4,2 - \frac{16}{5} = 1$$

- b) Estudamos o crecemento e decrecemento da función N(t)

$$N'(t) = \frac{8(1+t^2) - 2t \cdot 8t}{(1+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 8+8t^2-16t^2 = 0$$

$$\Rightarrow 8-8t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1 \text{ (A solución } t = -1 \text{ non e válida)}$$

t=1 punto crítico (A audiencia crece ata o ano 1 e despois decrece)

	(0, 1)	(1, ∞)
t	t = 0,5	t = 2
Signo N'(t)	N'(t) > 0	N'(t) < 0
	↗	↘

(A audiencia crece ata o ano 1 e despois decrece)

A máxima audiencia alcanzase en N(1) con 5 millóns de espectadores

(Tamén poderíamos estudar N''(t))

2. Dada a función $f(x) = x^2 - 6x + 8$

- a) Realiza a súa representación gráfica estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremo relativo.
 b) Calcula a área do recinto limitado pola gráfica da función e os eixes de coordenadas.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Dominio de f: todo $\mathbb{R}$

Puntos corte eixes:

$f(0) = 8 \rightarrow$ punto de **corte OY en (0,8)**

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

$\rightarrow$ **Corta a OX en (4,0), (2,0)**

Monotonía

$f'(x) = 2x - 6; f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$ (punto crítico)

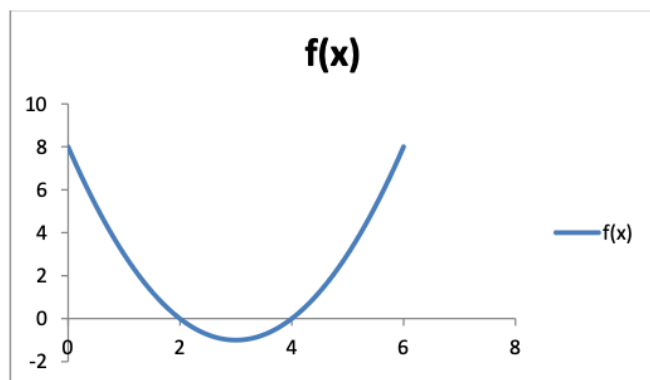
En $(-\infty, 3)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrecente

En $(3, \infty)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crecente

Extremos relativos

En $x = 3$ hai un mínimo

$f(3) = -1 \rightarrow$ **(3, -1) punto mínimo**



b) **Area entre $f(x)$ e os dous eixes**

$\text{Área} = \left| \int_0^2 (x^2 - 6x + 8) dx \right| + \left| \int_2^4 (x^2 - 6x + 8) dx \right|$

Aplicamos a regra de Barrow:

$\text{Área} = \int_0^2 (x^2 - 6x + 8) dx + \int_2^4 (-x^2 + 6x - 8) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x \right]_2^4 =$

$\frac{20}{3} + \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8 \text{ u}^2$

2019 EXTRAORDINARIA

2. O prezo de venda dun electrodoméstico nun centro comercial (en centos de euros), vén dado pola función:

$$P(t) = \frac{24}{t^2 - 4t + 16} + 2 \text{ sendo } t \geq 0 \text{ o tempo transcorrido, en anos, desde o momento en que se puxo a venda}$$

a) Calcula o prezo de lanzamento do produto En que momento o prezo do electrodoméstico volve ser o mesmo que o prezo de lanzamento?

b) Determina os períodos nos que o prezo do electrodoméstico aumentou e diminuíu. Cal foi o prezo de venda máximo? En que momento produciuse?

c) Estuda a tendencia do prezo de venda do electrodoméstico co paso do tempo.

$$P(t) = \frac{24}{t^2 - 4t + 16} + 2 \text{ si } t \geq 0$$

a) Para calcular o prezo de lanzamento $P(0) = \frac{24}{16} + 2 = 3,5$ centos de € $\Leftrightarrow$ 350€

Calculamos o momento en que o prezo volve a ser 350€ ?

$$P(t) = \frac{24}{t^2 - 4t + 16} + 2 = 3,5 \Rightarrow t^2 - 4t + 16 = 16 \Rightarrow t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = \begin{cases} 4 \\ 0 \end{cases}$$

O prezo coincide co de lanzamento no 4º ano

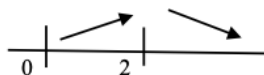
$$b) P'(t) = \frac{-24(2t-4)}{(t^2-4t+16)^2}; P'(t) = 0 \Leftrightarrow 24(2t-4) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (punto crítico?)}$$

$t = 2$ punto crítico

$(0, 2) \quad P'(t) > 0 \Rightarrow P$ crecente

$(2, \infty) \quad P'(t) < 0 \Rightarrow P$ decrecente

	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
t	$t = 1$	$t = 3$
Signo $P'(t)$	$P'(t) > 0$	$P'(t) < 0$
		



En $t = 2$ hai un máximo de $P(t)$

O prezo crece desde o momento que se puxo a venda ata o 2º ano en despois decrece, habendo un máximo en $t=2$

$$\text{Máx } P(t) = \frac{24}{4 - 8 + 16} + 2 = 4; \text{ "o prezo máximo foi de 400€ no 2º ano"}$$

$$c) \text{ Estudamos a tendencia : } \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{24}{t^2 - 4t + 16} + 2 = 2$$

Co paso do tempo o prezo tende a 200€

2. Considera a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 7 - x & \text{se } 4 < x \leq 7 \end{cases}$

a) Representa a función estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremos relativos. Para que valores de x é $f(x) \geq 0$? b) Calcula a área do recinto limitado polos eixes e a parte da función tal que $f(x) \geq 0$.

Domínio de f : $(0,4] \cup (4,7]$

Puntos corte eixes: Se $0 \leq x \leq 4$ $f(0) = 3 \rightarrow$ punto de corte con OY $(0,3)$

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 3 \end{matrix} \rightarrow \text{Corta a OX en } (1,0) \text{ e } (3,0)$$

Se $4 < x \leq 7$ $f(x)=0=7-x \Rightarrow x=7 \rightarrow$ Corta a OX en $(7,0)$

Monotonía

En $(0,4)$ $f'(x) = 2x-4$; $f'(x)=0 \Rightarrow x=2$ (punto crítico)

$(0, 2)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ **f decrecente**

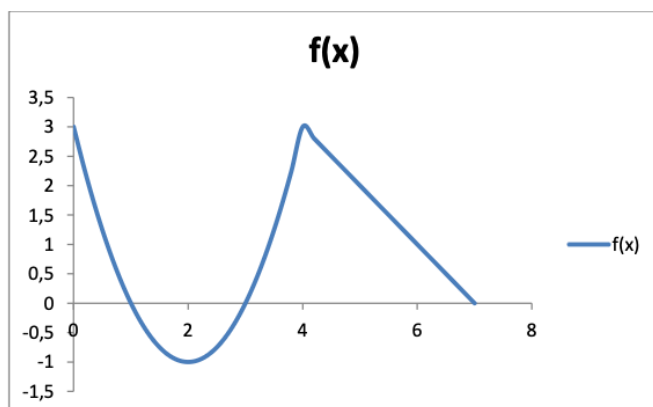
$(2, 4)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ **f crecente**

	$(0, 2)$	$(2, 4)$
x	$x=1$	$x=3$

Signo $f'(x)$ $f(x) < 0$ $f(x) > 0$

En $(4,7)$ $f(x)=7-x$, recta decrecente ou ben $f'(x) = -1 < 0 \Rightarrow$ **f decrecente**

En $x=2$ hai un mínimo $f(2)=-1 \rightarrow (2, -1)$ mínimo



b) Área entre os eixes e $f(x) \geq 0$

$$\text{Área} = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_4^7 (7 - x) dx$$

Aplicamos a regra de Barrow:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_3^4 + \left(7x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_4^7 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) + \left(\frac{64}{3} - 32 + 12 - \frac{27}{3} + 18 - 9 \right) + \left(49 - \frac{49}{2} - 28 + 8 \right) = \frac{43}{6} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

2018 ORDINARIA

2. Dada a función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$,

a) Calcula a primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$. b) Estuda o crecemento e decrecemento e representa graficamente a función f .

c) Calcula a área limitada pola curva $f(x)$ e o eixe X entre $x = 0$ e $x = 2$.

a) $F(x) = \int f(x)dx = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + C$

Como $F(2)=1 = \frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 + C \Rightarrow C = 1$

E po lo tanto a primitiva F de f será $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1$

b) Dominio de f : todo $\mathbb{R}$

Puntos corte eixes: OY en (0,0)

OX: $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 = x(x^2 - 3x + 2)$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Corta a OX en (0,0), (0,1) e (0,2)

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$; $f'(x)=0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \begin{matrix} 1 + \sqrt{3}/3 \approx 1,58 \\ 1 - \sqrt{3}/3 \approx 0,42 \end{matrix}$

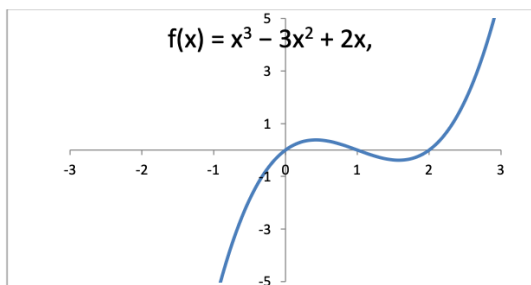
En $(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crecente

En $(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrecente

En $(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crecente

$1 - \sqrt{3}/3 \approx 0,42 \rightarrow$ máximo relativo

$1 + \sqrt{3}/3 \approx 1,58 \rightarrow$ mínimo relativo



Área = $|\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx| + |\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx|$

Aplicamos a regra de Barrow:

Área = $\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)dx = (\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2) \Big|_0^1 + (-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2) \Big|_1^2 =$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ u²

2. O salario diario dun mozo durante os cinco primeiros anos en determinada empresa axústase á seguinte función, onde t representa o tempo, en anos, que leva contratado:

$$S(t) = \begin{cases} 35 & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ 25 + 10t & \text{se } 1 \leq t < 2, \\ -0.5t^2 + 4t + 39 & \text{se } 2 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

a) Estuda o crecemento e decrecemento da función salario e represéntaa. b) En que momento tivo un salario máximo? E mínimo? Calcula ditos salarios.

a) Estudamos o crecemento e decrecemento da función salario:

En $(0, 1) \rightarrow S'(t) = 0 \Rightarrow S(t)$ constante en $(0, 1)$

En $(1, 2) \rightarrow S(t) = 25 + 10t$

$S'(t) = 10 > 0 \Rightarrow S(t)$ crecente en $(1, 2)$

En $(2, 5) \rightarrow S(t) = -0.5t^2 + 4t + 39$

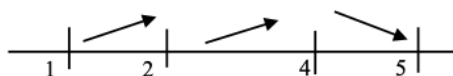
$S'(t) = -t + 4 \rightarrow S'(t) = 0 \Rightarrow t = 4$

$(2, 4) S'(t) > 0 \Rightarrow S(t)$ crecente

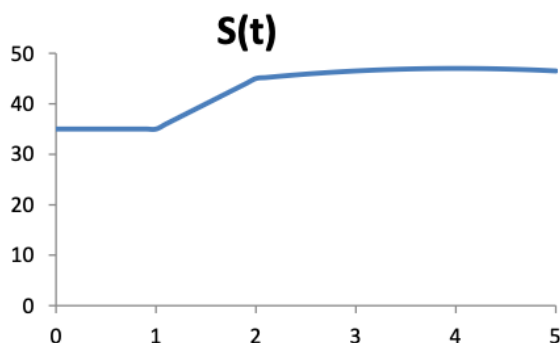
$(4, 5) S'(t) < 0 \Rightarrow S(t)$ decrecente

$t_0 = 4$ máximo relativo; $S(4) = 47$

	$(2, 4)$	$(4, 5)$
t	$t = 3$	$t = 4,5$



Signo $S'(t)$	$S'(t) > 0$	$S'(t) < 0$	
	$\nearrow$	$\searrow$	
$S(1^-) = 35$	$S(1) = 35$	$S(2^-) = 45$	$S(2) = 45$
$S(0) = 35$	$S(5) = 46,5$		



b) En $t = 4$, $S(4)$ máx. O salario máximo alcanzouse despois de 4 anos ascendendo a 47 “unidades monetarias” (u. m) diarias.

O salario mínimo tívoo desde o comezo ata transcorrido 1 ano (todo o primeiro ano) e o seu valor 35 u.m.

2018 EXTRAORDINARIA

2. Un novo produto ten unha demanda en miles de unidades que responde aproximadamente á función

$N(t) = 5 + \frac{20t}{1+t^2}$, $t \geq 0$ en meses.

a) Estuda o crecemento e decrecemento da demanda. Calcula a demanda máxima e o momento no que se alcanza. **b)** Avalía a tendencia a longo prazo e representa a función. **c)** Despois do máximo, baixaría a demanda de 11.000 unidades? Cando?

$$N(t) = 5 + \frac{20t}{1+t^2}, t \geq 0 \text{ (t meses)}$$

$$a) \quad N'(t) = \frac{20(1+t^2) - 2t(20t)}{(1+t^2)^2} = \frac{20+20t^2-40t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{20-20t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{20(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

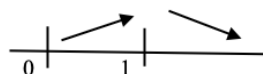
$$20(1-t^2) = 0 \Leftrightarrow 1-t^2 = (1-t)(1+t) = 0 \Leftrightarrow t = \begin{cases} 1 \\ -1 \text{ (NonVale)} \end{cases}$$

$t = 1$ punto crítico

$(0, 1) \quad N'(t) > 0 \Rightarrow N$ crecente

$(1, \infty) \quad N'(t) < 0 \Rightarrow N$ decrecente

	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
t	$t = 0,5$	$t = 2$



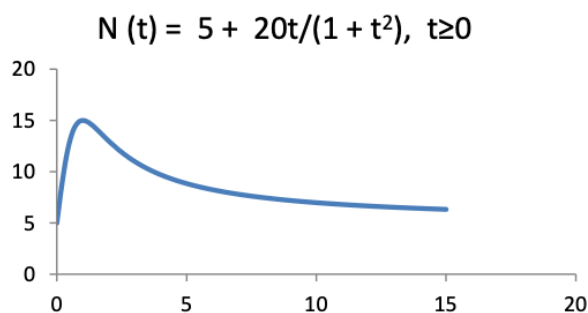
Signo $N'(t)$	$N'(t) > 0$	$N'(t) < 0$

En $t = 1$ hai un máximo de $N(t)$

$$\text{Máx } N(t) = 5 + \frac{20}{2} = 15; \text{ "15.000 unidades de demanda máxima no mes 1"}$$

$$b) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 5 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{20t}{1+t^2} = 5 \quad \text{As vendas tenden a 5.000 unidades}$$

$$N(0) = 5 \quad N(1) = 15$$



2. Un ximnasio abre ao público a principios de 2008, a función $G(t) = \begin{cases} 10(5t - t^2) & \text{se } 0 \leq t \leq 4 \\ 80 - 10t & \text{se } 4 < t \leq 10 \end{cases}$

indica como evolucionaron as súas ganancias (en miles de euros) en función do tempo t (en anos) transcorrido desde a súa apertura, correspondendo $t = 0$ a principios de 2008.

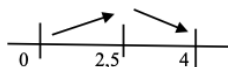
- a) Estuda en que períodos se produciu un aumento e nos que se produciu unha diminución das súas ganancias
b) A canto ascenderon as ganancias máximas? En que ano se obtiveron?
c) Representa a gráfica da función $G(t)$. Nalgún ano logo da súa apertura non se obtiveron ganancias? A partir dalgún ano deixou de ser rendible o ximnasio? Cando?

$$G(t) = \begin{cases} 10(5t - t^2) & \text{se } 0 \leq t \leq 4 \\ 80 - 10t & \text{se } 4 < t \leq 10 \end{cases}$$

a) Estudiamos $G'(t)$

No intervalo $(0, 4)$ $G'(t) = 10(5 - 2t) = 0 \Leftrightarrow 5 = 2t \Leftrightarrow t = 2,5$ pto. Crítico

	(0, 2,5)	(2,5, 4)
t	t = 1	t = 3
Signo $G'(t)$	$G'(t) > 0$	$G'(t) < 0$



No intervalo $(4, 10)$ $G'(t) = -10t < 0, \forall t \in (4, 10) \Rightarrow G$ decrecente en $(4, 10)$

$G(t)$ é crecente en $(0, 2,5)$

$G(t)$ é decrecente en $(2,5, 4)$ e en $(4, 10)$

“Desde a súa apertura, a principios de 2008, ata a metade de 2010 produciuse un aumento de ganancias”

“Desde mediados de 2010 ata principios de 2018 hai diminución de ganancias”

b) En $t = 2,5$ $G(2,5)$ máximo $G(2,5) = 62,5$

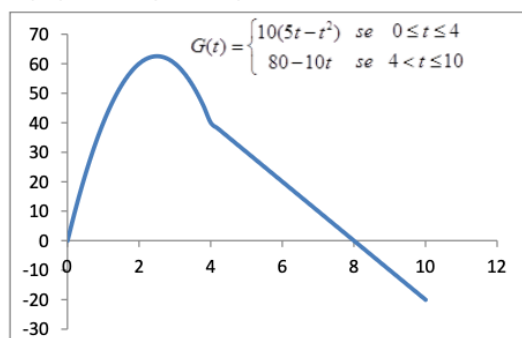
Ganancias máximas 62.500 € a mediados de 2010

c) Gráfica $G(t)$

$$G(0) = 0 \quad (0, 0)$$

$$G(4) = 40 \quad (4, 40)$$

$$G(4^+) = 40; \quad G(10) = -20 \quad (10, -20)$$



→ ¿En algún ano non houbo ganancias?

$$\text{En } (0,4) \quad G(t) = 0 \text{ si } 10(5t - t^2) \Leftrightarrow 10t(5 - t) = 0 \begin{cases} t = 0 \rightarrow (\text{NonVale}) \\ t = 5 \rightarrow (\text{NonVale}) \end{cases}$$

En $(4,10)$ $G(t) = 0$ si $80 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 8$, en 2016 non houbo ganancias

→ ¿A partir de algún ano deixa de ser rentable?

$$G(t) < 0 \Leftrightarrow 80 - 10t < 0 \Leftrightarrow t > 8$$

“Deixou de ser rentable a partir de 2016 ata principios de 2018” (pode verse tamén na gráfica).

2017 ORDINARIA

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

O número de unidades en miles vendidas por unha empresa do sector editorial durante o seu primeiro ano de existencia, estimouse pola función $V(t) = \begin{cases} 12t - t^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 7 \\ t^2 - 18t + 112 & \text{se } 7 < t \leq 12 \end{cases}$, t é o tempo transcorrido en meses desde a creación da empresa.

(a) **2'25 puntos.** Nos primeiros sete meses, calcula as vendas máximas e o mes no que se alcanzaron. Xustifica se estas foron as máximas vendas alcanzadas pola empresa nese ano. Representa a gráfica de $V(t)$.

- Determinar a primeira derivada da función no primeiro anaco e o punto crítico
No intervalo $(0, 7)$

$$\left. \begin{array}{l} V'(t) = 12 - 2t; \quad V'(t) = 0 \Rightarrow t = 6 \\ V''(t) = -2 < 0, \text{ para todo } t \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No punto } t = 6 \text{ } V(t) \text{ presenta un máximo relativo e } V(6) = 36 \text{ 0'50 puntos.}$$

"Nos primeiros sete meses, as vendas foron máximas no sexto mes **0'25 puntos.**

"E foron de 36000 unidades" **0'25 puntos.**

Xustifiquemos se estas foron ou non as máximas vendas alcanzadas pola empresa nese ano:

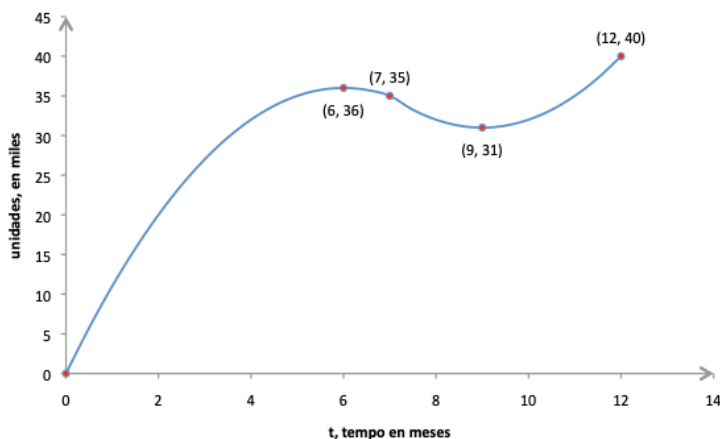
- No intervalo $(7, 12)$

$$\left. \begin{array}{l} V'(t) = 2t - 18; \quad V'(t) = 0 \Rightarrow t = 9 \\ V''(t) = 2 > 0, \text{ para todo } t \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No punto } t = 9 \text{ } V(t) \text{ presenta un mínimo relativo e } V(9) = 31 \text{ 0'25 puntos.}$$

- Estudamos o valor da función no punto extremo da función, $t = 12$ $V(12) = 40$ **0'25 puntos.**

"Non foron as máximas vendas alcanzadas pola empresa nese ano, xa que as vendas máximas nese ano alcanzáronse no último mes e foron 40000 unidades" **0'25 puntos.**

- Representación gráfica de $V(t)$ **0'50 puntos.**



(b) **0'75 puntos.** A partir do sétimo mes, ¿en que período o número de vendas foi menor ou igual a 32000 unidades?

- Formulamos a inecuación:

$$t^2 - 18t + 112 \leq 32 \Leftrightarrow t^2 - 18t + 80 \leq 0 \text{ 0'25 puntos.}$$

- Resolvemos a ecuación $t^2 - 18t + 80 = 0$ $\begin{cases} t = 8 \\ t = 10 \end{cases}$ **0'25 puntos.**

- Responder no contexto do exercicio:

"Entre o oitavo e o décimo mes as vendas foron inferiores ou iguais a 32000 unidades" **0'25 puntos.**

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Os beneficios dunha compañía en millóns de euros, nos seus primeiros sete anos, foron estimados pola función $B(x) = ax^3 - 3x^2 + bx$, $0 \leq x \leq 7$, onde x indica o tempo transcorrido en anos, desde a súa fundación.

(a) **1'50 puntos.** *Calcula os valores de a e b sabendo que a compañía tivo uns beneficios máximos de 8 millóns de euros no segundo ano.*

- Determinar a primeira derivada da función: $B'(x) = 3ax^2 - 6x + b$ **0'25 puntos.**
- Condicións de máximo no punto $(2, 8)$, $B'(2) = 0$ e de pasar polo punto $(2, 8)$, $B(2) = 8$ **0'25 puntos.**
- Formular as dúas ecuacións:
 $B'(2) = 0 \Rightarrow 12a + b = 12$ **0'25 puntos.**
 $B(2) = 8 \Rightarrow 8a + 2b = 20$ **0'25 puntos.**
- Resolver por calquera método $\begin{cases} a = 1/4 & \text{0'25 puntos} \\ b = 9 & \text{0'25 puntos} \end{cases}$

(b) **1'50 puntos.** *Supoñamos que $a = 1/4$ e $b = 9$. Determina cando a empresa non tivo beneficios. Calcula $\int_0^6 B(x) dx$.*

- A empresa non tivo beneficios cando

$$B(x) = 0 \Rightarrow x \left(\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 12x + 36 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases} \quad \text{0'25 puntos.}$$

"Non tivo beneficios no sexto ano" **0'25 puntos.**

- Calcular a integral indefinida e aplicar a regra de Barrow:

$$\int_0^6 B(x) dx = \int_0^6 \left(\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x \right) dx = \underbrace{\left[\frac{x^4}{16} - x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_0^6}_{\text{0'50 puntos}} = \underbrace{\frac{6^4}{16} - 6^3 + \frac{9}{2}6^2 - 0}_{\text{0'50 puntos}} = 27.$$

2017 EXTRAORDINARIA

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

O prezo en euros das accións de certo grupo empresarial ao longo dun ano estimouse pola función:

$$P(t) = \begin{cases} 15 + 2t - t^2, & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3}t + 11, & 3 < t \leq 12 \end{cases}, \text{ sendo } t \text{ o tempo transcorrido en meses.}$$

(a) **1'75 puntos.** Determina os períodos nos que aumentou e nos que diminuíu o prezo e calcula o seu prezo máximo e o seu prezo mínimo.

- Calcular a primeira derivada: $P'(t) = \begin{cases} 2 - 2t & \text{se } 0 < t < 3 \\ \frac{1}{3} & \text{se } 3 < t < 12 \end{cases}$ **0'25 puntos.**
- Determinar os intervalos de crecemento e de decrecemento:

$$\text{No } (0, 3) \quad P'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{No } (3, 12) \quad P'(t) = \frac{1}{3} > 0, \text{ para todo } t$$

	(0, 1)	(1, 3)	(3, 12)
valor t	$t = 1/2$	$t = 2$	para todo t
signo de $P'(t)$	$P'(1/2) > 0$	$P'(2) < 0$	$P'(t) > 0$

"As accións aumentaron de prezo desde o inicio do ano ata o primeiro mes e desde o terceiro mes ao último mes". **0'50 puntos.**

"As accións diminuíron de prezo desde o primeiro mes ata o terceiro mes" **0'25 puntos.**

- Calcular o valor da función nos puntos extremos: $P(0) = 15$, $P(12) = 15$ **0'25 puntos.**

- Obter o prezo máximo e o prezo mínimo:

No punto (1, 16) $P(t)$ presenta un máximo absoluto, e no punto (3, 12) un mínimo absoluto

"O prezo máximo das accións, nese ano, foi de 16 euros" **0'25 puntos.**

"O prezo mínimo das accións, nese ano, foi de 12 euros" **0'25 puntos.**

(b) **1'25 puntos.** Determina o período no que o prezo das accións foi inferior ou igual a 13,75 euros. Representa a gráfica da función $P(t)$.

- No primeiro intervalo

$$[0, 3], 15 + 2t - t^2 \leq 13,75 \Rightarrow t^2 - 2t - 1,25 \leq 0$$

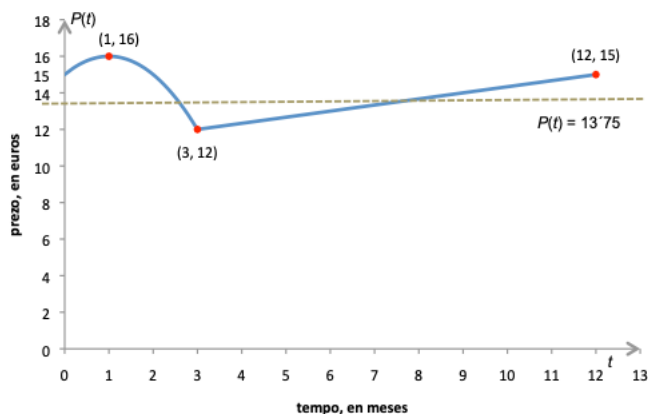
$$\text{Resolvemos } t^2 - 2t - 1,25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1/2 \text{ (solución non válida)} \\ t = 5/2 \end{cases} \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

- No segundo intervalo $[3, 12]$, $\frac{1}{3}t + 11 \leq 13,75 \Rightarrow t \leq 8,25$ **0'25 puntos.**

- responder no contexto do exercicio

"O prezo foi inferior ou igual a 13,75 euros no intervalo $[2,5, 8,25]$, é dicir, desde o segundo mes e medio ata o oitavo e un cuarto de mes" **0'25 puntos.**

- Representación gráfica **0'50 puntos.**



Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexan as funcións $f(x) = x^2 + 2x - 8$ e $g(x) = -x^2 + 4$.

(a) **1'75 puntos.** Representa o recinto limitado polas gráficas de $f(x)$ e $g(x)$, estudando os puntos de corte cos eixes, máximos, mínimos e os puntos nos que se cortan ambas as funcións.

- Calcular os puntos de corte das funcións cos eixes:

A función $f(x) = x^2 + 2x - 8$ corta aos eixes nos puntos $(0, -8)$, $(-4, 0)$ e $(2, 0)$ **0'25 puntos.**

A función $g(x) = -x^2 + 4$ corta aos eixes nos puntos $(0, 4)$, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ **0'25 puntos.**

- Cálculo do máximo e o mínimo:

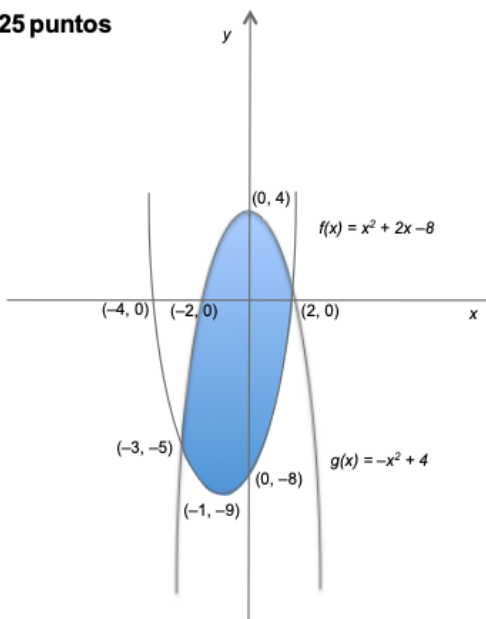
A función $f(x)$ presenta un mínimo no punto $(-1, -9)$ **0'25 puntos.**

A función $g(x)$ presenta un máximo no punto $(0, 4)$ **0'25 puntos.**

- Puntos nos que se cortan ambas as funcións:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \begin{cases} x = -3 & (-3, -5) \\ x = 2 & (2, 0) \end{cases} \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos}}$$

- Representar o recinto pedido **0'50 puntos**



(b) **1'25 puntos.** Calcula a área do devandito recinto.

- Expresión da área pedida, cálculo da integral indefinida, regra de Barrow e resultado

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\int_{-3}^2 (-x^2 + 4 - x^2 - 2x + 8) dx}_{\mathbf{0'50 \text{ puntos}}} = \underbrace{\int_{-3}^2 (-2x^2 - 2x + 12) dx}_{\mathbf{0'50 \text{ puntos}}} = \underbrace{-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 12x}_{\mathbf{0'50 \text{ puntos}}} \bigg|_{-3}^2 \\ &= \underbrace{-\frac{16}{3} - 4 + 24 + \frac{2}{3}(-3)^3 + (-3)^2 - 12(-3)}_{\mathbf{0'50 \text{ puntos}}} = \frac{125}{3} \end{aligned}$$

