

EJERCICIO 1. Álgebra. Considere la ecuación matricial $X \cdot A + B = A \cdot B^t$, en donde B^t denota la matriz traspuesta de B , siendo A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B .
b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

a) Averiguamos si la matriz A tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 1 - 2 - 0 = -1 \neq 0$$

Su determinante es no nulo y tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de B .

¿El rango de B es 3?

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 1 - 0 - 1 + 1 = 0$$

Su determinante es nulo y el rango de B es menor que 3.

¿El rango de B es 2?

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna tercera.

Comprobamos que su determinante es no nulo.

$$\text{Menor} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

El rango de la matriz B es 2.

b) Despejamos X de la ecuación $X \cdot A + B = A \cdot B'$.

$$X \cdot A + B = A \cdot B' \Rightarrow X \cdot A = A \cdot B' - B \Rightarrow X = (A \cdot B' - B) A^{-1}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$A \cdot B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-1 & 0-1+1 & 0-1+1 \\ -1+1-2 & -1-1+2 & 0-1+2 \\ 1+0-2 & 1+0-2 & 0+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B' - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A \cdot B' - B) A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0+1 & 2-1-1 & 1-1-1 \\ -6+0+0 & 6+1+0 & 3+1+0 \\ 6+0-3 & -6+0+3 & -3+0+3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 7 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 7 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2. Álgebra. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \leq 40$$

$$x + y \geq 5$$

$$3x + y \leq 45$$

$$x \geq 0$$

a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

a) Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 40$$

x	$y = \frac{40-x}{2}$
0	20
10	15
40	0

$$x + y = 5$$

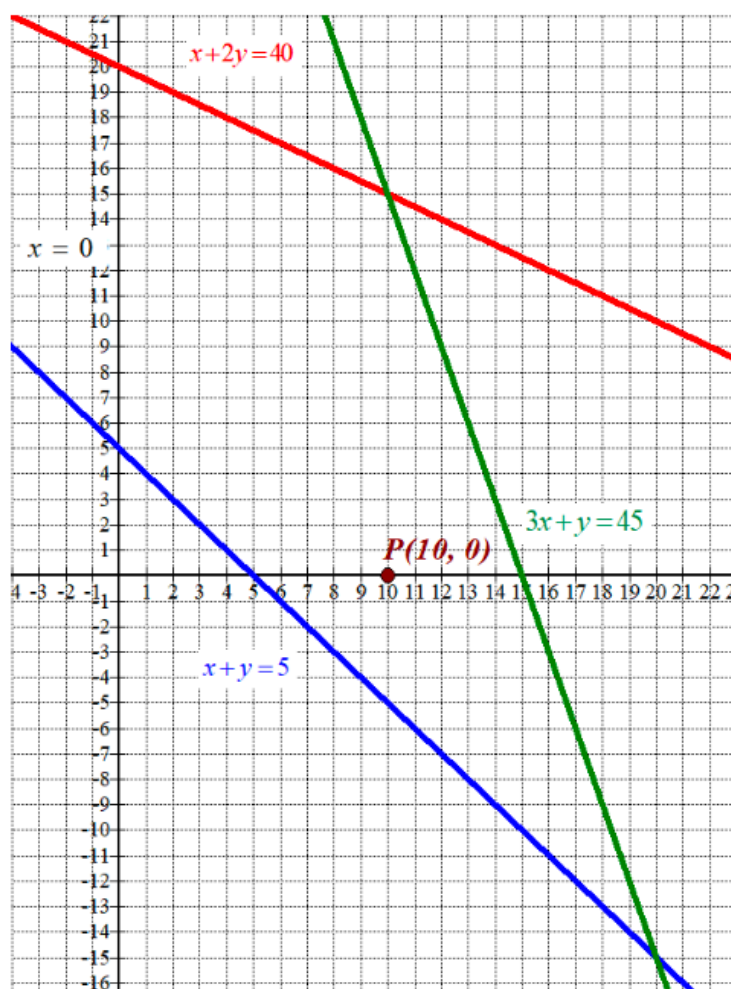
x	$y = 5 - x$
0	5
5	0
20	-15

$$3x + y = 45$$

x	$y = 45 - 3x$
0	45
10	15
20	-15

$$x = 0$$

$x = 0$	y
0	0
0	5
0	20

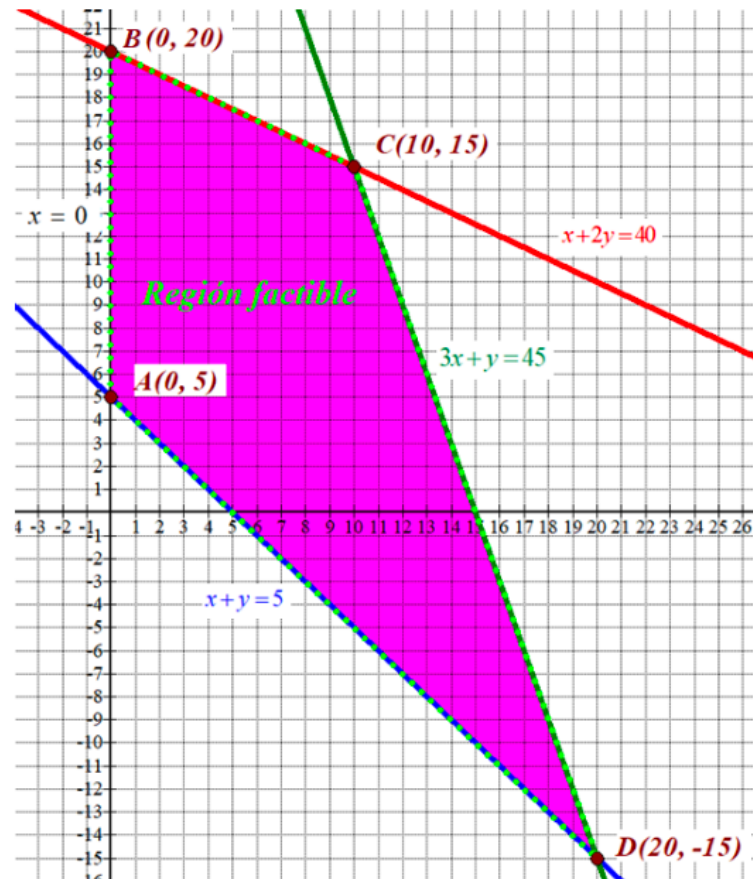


Como las inecuaciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 40 \\ x + y \geq 5 \\ 3x + y \leq 45 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del plano situada a la

derecha del eje OY, por encima de la recta azul y por debajo de las rectas verde y roja. Comprobamos que el punto $P(10, 0)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 2 \cdot 0 \leq 40 \\ 10 + 0 \geq 5 \\ 3 \cdot 10 + 0 \leq 45 \\ 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos A(0, 5), B(0, 20), C(10, 15) y D(20, -15).

- b) Valoramos la función $f(x, y) = 2x - 3y$ en cada uno de los vértices en busca de los valores máximo y mínimo.

$$A(0, 5) \rightarrow f(0, 5) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = -15$$

$$B(0, 20) \rightarrow f(0, 20) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 20 = -60 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$C(10, 15) \rightarrow f(10, 15) = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 15 = -25$$

$$D(20, -15) \rightarrow f(20, -15) = 2 \cdot 20 - 3 \cdot (-15) = 85 \text{ ¡Máximo!}$$

El valor mínimo es -60 y se alcanza en el punto B(0, 20) y el valor máximo es 85 y se alcanza en el punto D(20, -15).

2024 EXTRAORDINARIA

EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule para que valor de k no existe la matriz inversa de A .
 b) Justifique cual es el rango de A si $k = -5$.
 c) Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para $k = -2$.

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{vmatrix} = k - 24 - 6 + 3 - 4k + 12 = -3k - 15$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3k - 15 = 0 \Rightarrow -3k = 15 \Rightarrow k = \frac{15}{-3} = -5 \quad \checkmark$$

Su determinante se anula para $k = -5$. La matriz A no tiene inversa para $k = -5$.

b) Si $k = -5$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, consideramos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la fila y columna primeras $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 7 \neq 0$.

Para $k = -5$ el rango de A es 2.

c) Para $k = -2$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, su determinante es no nulo y existe la

inversa. La calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 24 - 6 + 3 + 8 + 12 = -9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A')}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}}{-9} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.

a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

a) Llamamos “x” al número de metros que se compra al distribuidor A e “y” al número de metros de tela que se compra al distribuidor B.

Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

“Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700” $\rightarrow$
 $200 \leq x \leq 700$; $200 \leq y \leq 700$.

“La fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros” $\rightarrow x + y \geq 600$.

“La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B” $\rightarrow x \leq 2y$.

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 \leq x \leq 700 \\ 200 \leq y \leq 700 \\ x + y \geq 600 \\ x \leq 2y \end{array} \right\}$$

La función que queremos minimizar son los costes: $C(x, y) = 2x + 3y$.

b) Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$$x + y = 600$$

$$x = 2y$$

$$x = 200$$

$$x = 700$$

x	y = 600 - x
0	600
400	200
600	0

x	y = $\frac{x}{2}$
0	0
200	100
400	200

x = 200	y
200	0
200	200
200	400

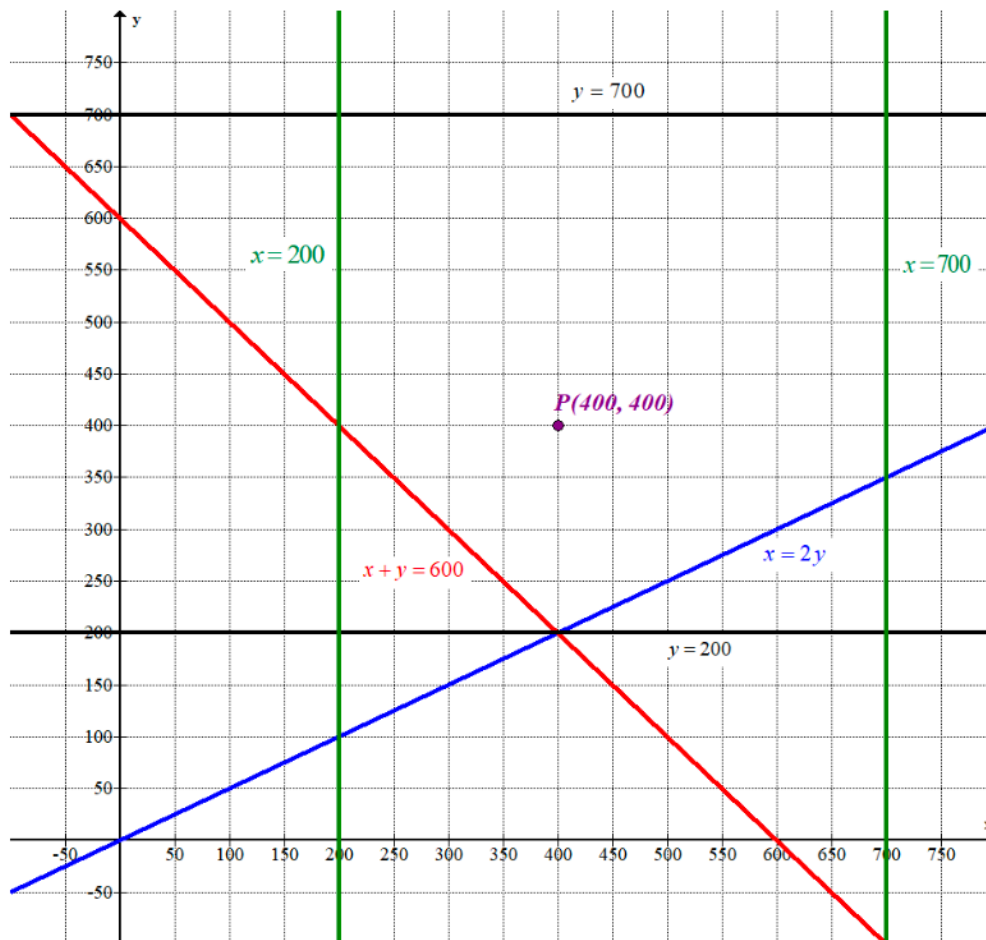
x = 700	y
700	0
700	200
700	300

$$y = 200$$

x	y = 200
0	200
100	200
400	200

$$y = 700$$

x	y = 700
0	700
100	700
400	700



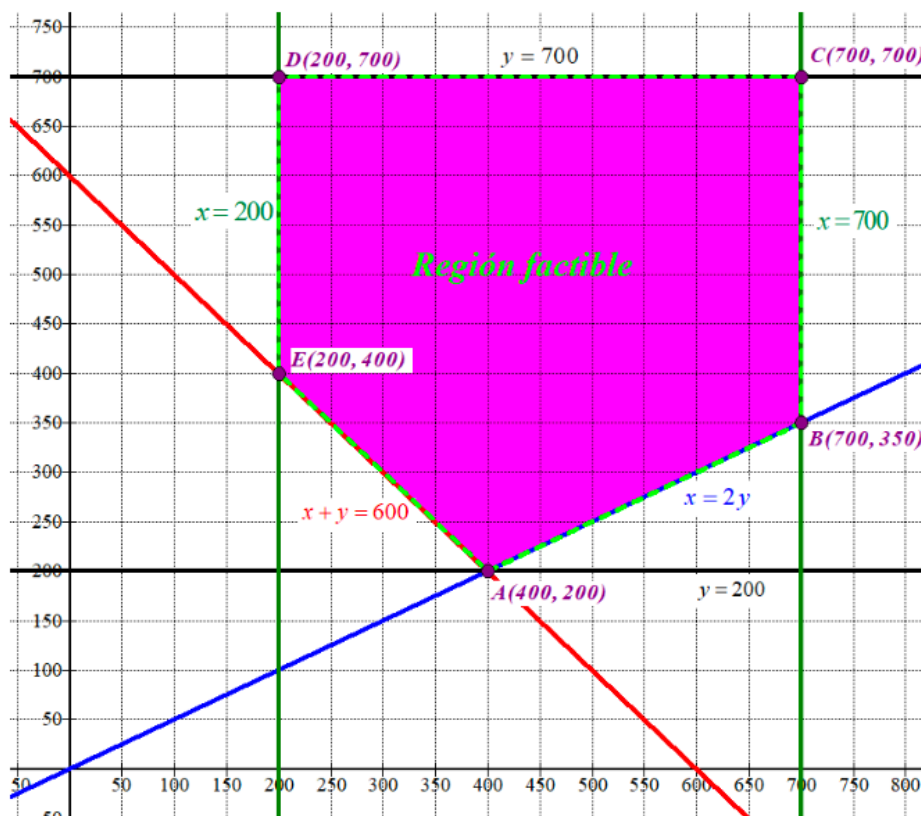
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 200 \leq x \leq 700 \\ 200 \leq y \leq 700 \\ x + y \geq 600 \\ x \leq 2y \end{array} \right\}$ la región factible es la región del plano situada

entre las rectas verticales verdes y las rectas horizontales negras, por encima de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(400, 400)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 \leq 400 \leq 700 \\ 200 \leq 400 \leq 700 \\ 400 + 400 \geq 600 \\ 400 \leq 2 \cdot 400 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos A(400, 200), B(700, 350), C(700, 700), D(200, 700) y E(200, 400).

- c) Valoramos la función costes $C(x, y) = 2x + 3y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

$$A(400, 200) \rightarrow C(400, 200) = 2 \cdot 400 + 3 \cdot 200 = 1400 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(700, 350) \rightarrow C(700, 350) = 2 \cdot 700 + 3 \cdot 350 = 2450$$

$$C(700, 700) \rightarrow C(700, 700) = 2 \cdot 700 + 3 \cdot 700 = 3500$$

$$D(200, 700) \rightarrow C(200, 700) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 700 = 2500$$

$$E(200, 400) \rightarrow C(200, 400) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 400 = 1600$$

El coste mínimo es 1400 € y se alcanza en el punto A(400, 200) que significa comprar 400 metros de tela al distribuidor A y 200 al distribuidor B.

2023 ORDINARIA

EXERCICIO 1. Álgebra.

Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule a matriz A^t (sendo A^t a matriz transposta de A) e calcule a matriz $A \cdot B$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2+3 & -1+3 \\ 2-1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calcule a matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$ onde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I a matriz identidade 2×2 .

$$A \cdot B \cdot X = C + I \Rightarrow X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (C + I)$$

$$(C + I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(A \cdot B) = -5 \quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj}(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos } X = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ou ben resolvendo o sistema,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2c = 2 \\ 3b + 2d = -2 \\ a - c = 0 \\ b - d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2/5 \\ b = -2/5 \\ c = 2/5 \\ d = -2/5 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS APLICADAS AS CIENCIAS SOCIAIS II

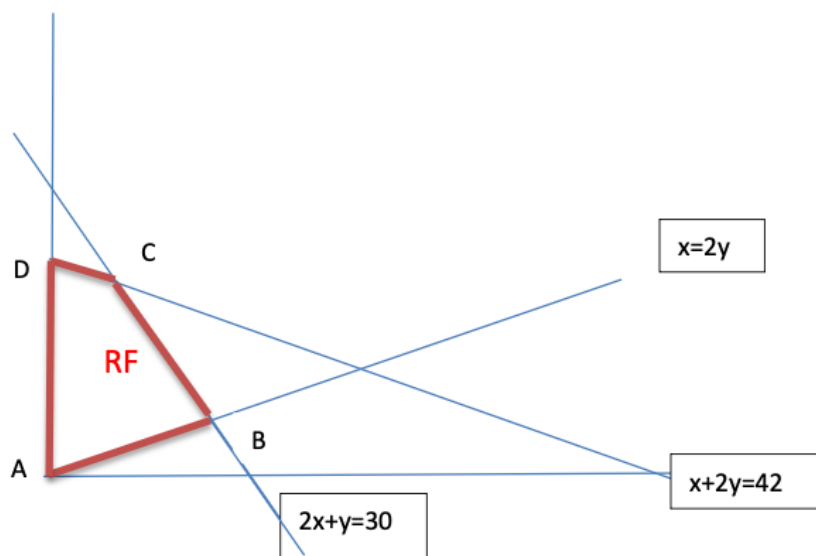
EXERCICIO 2. Álgebra. Un grupo empresarial desexa crear unha rede de produción formada por plantas de dous tipos: A e B. Cada planta de produción A xeraría uns custos mensuais de 1.000 euros e necesitaría 8 empregados para o seu funcionamento, mentres que cada planta de produción B xeraría uns custos mensuais de 2.000 euros e necesitaría 4 empregados. O número de plantas de produción A non deberá superar o dobre das de tipo B. Ademais, os custos mensuais desta rede de produción non deben superar os 42.000 euros e tampouco debe supoñer a contratación de máis de 120 empregados.

a) Formule o sistema de inecuacións asociado ó problema.

x: nº de plantas tipo A ; y: nº de plantas tipo B

$$\text{Restricións: } \begin{cases} 1000x + 2000y \leq 42000 \\ 8x + 4y \leq 120 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y \leq 42 \\ 2x + y \leq 30 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

b)



Vértices:

$$\begin{array}{llll} \left. \begin{array}{l} A: x=0 \\ x=2y \end{array} \right\} & \mathbf{A(0,0)} & \left. \begin{array}{l} B: x=2y \\ 2x+y=30 \end{array} \right\} & \mathbf{B(12,6)} & \left. \begin{array}{l} C: 2x+y=30 \\ x+2y=42 \end{array} \right\} & \mathbf{C(6,18)} & \left. \begin{array}{l} D: x+2y=42 \\ x=0 \end{array} \right\} & \mathbf{D(0,21)} \end{array}$$

c) Se se sabe que cada planta de produción A xeraría uns beneficios mensuais de 24.000 euros e cada planta de produción B de 20.000 euros, cantas plantas de produción de cada tipo deberían formar a rede para que os beneficios mensuais sexan máximos?

función a optimizar, $f(x, y) = 24000x + 20000y$

$$f(A) = 0$$

$$f(B) = 408000$$

$$f(C) = 504000 \text{ (Máximo)}$$

$$f(D) = 420000$$

f alcanza o seu máximo no vértice C (6, 18)

Deben formarse 6 plantas de tipo A e 18 plantas de tipo B para maximizar os beneficios.

2023 EXTRAORDINARIA

EXERCICIO 1. Álgebra. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule os valores de a para os cales a matriz A ten inversa

A matriz A ten inversa $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = 2 - 3a$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow a = 2/3$$

Polo tanto, a matriz A ten inversa para tódolos valores de a distintos de $2/3$

b) Para $a=1$, calcule, se é posible, a inversa da matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 2 - 3 = -1 \rightarrow \text{Adj}(A) = A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (1/\det(A)) \cdot (A^*)^t \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

c) Exprese en forma matricial o sistema de ecuacións seguinte e resólvao

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (A \cdot X = B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $x=2$, $y=-1$, $z=-1$

Non cumpriría as normas sobre cotas pesqueiras se captura 20 Tm de xurelo e 6 Tm de xarda

2022 ORDINARIA

EXERCICIO 1. Álgebra. Dadas as matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Calcule as matrices $A^2 - B$ e $A - I$, onde I representa a matriz identidade de orde 3.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^2 - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcule, se é posible, a inversa da matriz $A - I$.

$$\det(A - I) = 1 \Rightarrow \text{existe } (A - I)^{-1}$$

$$(A - I)^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Despexe X na ecuación matricial $X \cdot A + B = A^2 + X$ e calcule o seu valor.

$$X \cdot A - X = A^2 - B \Rightarrow X \cdot (A - I) = (A^2 - B)$$

$$X = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2. Álgebra. Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A+ carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad A+. Los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase A+. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcassas de aluminio

a) Plantee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

a) Formule o problema que determina o número de móbiles de cada calidade que se deben fabricar para maximizar o beneficio.

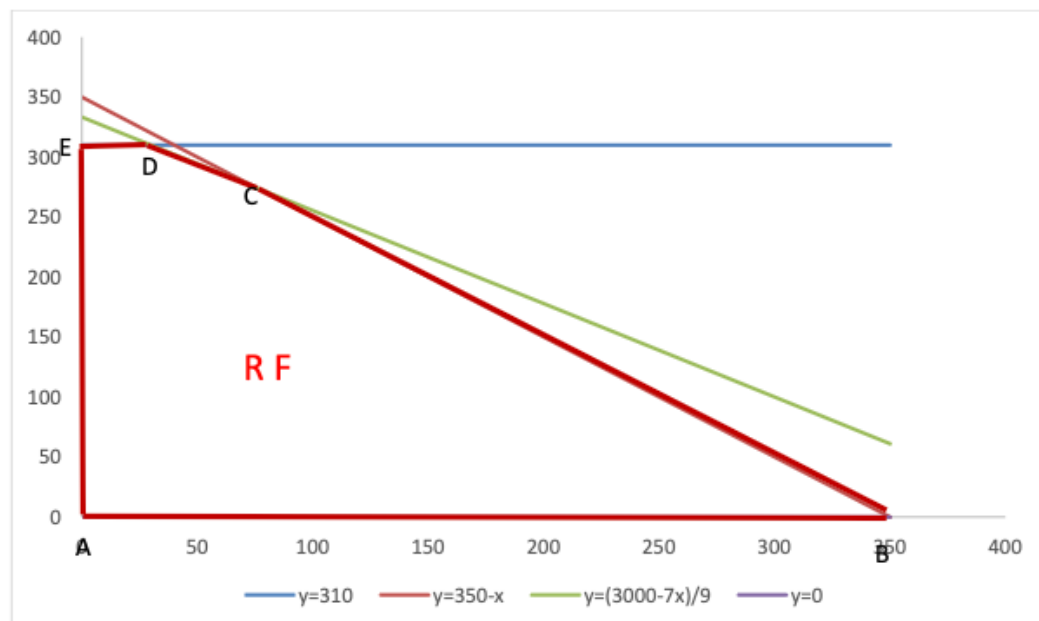
x: nº de teléfonos calidade A ; y: nº de teléfonos calidade A+

a) Función obxectivo $\text{Max } f(x, y) = (100-70)x + (150-90)y = 30x+60y$

s.a restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 70x + 90y \leq 30000 \\ x + y \leq 350 \\ y \leq 310 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7x + 9y \leq 3000 \\ x + y \leq 350 \\ y \leq 310 \\ x, y \geq 0 \end{array}$$

b) Represente graficamente a rexión factible e calcule os seus vértices.



Vértices: A(0,0) ; B(350,0); C(75, 275); D(30,310); E (0,310)

c) Determine unha solución óptima e ache o valor óptimo da función obxectivo.

$f(A)=f(0,0)=0$; $f(B)=f(350,0)=10.500$; $f(C)=f(75,275)=18.750$; $f(D)=f(30,310)=19.500$; $f(E)=f(0,310)=18.600$

Para maximizar o beneficio deben fabricarse 30 teléfonos A e 310 teléfonos A+, obtendo un total de 19500€ de beneficios.

EXERCICIO 1. Álgebra. Para dúas matrices A e B verificase que:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Calcule as matrices A e B.

$$2A + B + A - B = 3A$$

$$3A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Despepe a matriz X na ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ e calcule o seu valor.

$$A \cdot X - B = X \Rightarrow A \cdot X - X = B \Rightarrow (A - I) \cdot X = B \Rightarrow$$

$$X = (A - I)^{-1} \cdot B \text{ (sendo } I \text{ a matriz identidade de orde dous)}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(A - I) = 2 + 1 = 3$$

$$(A - I)^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - I)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

EXERCICIO 2. Álgebra. Nunha fábrica ensámblanse dous tipos de motores: para motos e para coches. Para ensamblar un motor de moto empréganse 60 minutos de traballo manual e 20 minutos de traballo de máquina. Para ensamblar un motor de coche empréganse 45 minutos de traballo manual e 40 minutos de traballo de máquina. Nun mes, a fábrica dispón de 120 horas de traballo manual e 90 horas de traballo de máquina. Sabendo que o beneficio obtido de cada motor de moto é de 1500 € e o de cada motor de coche de 2000 €

- a) Formule o problema que permite determinar cantos motores de cada tipo hai que ensamblar mensualmente para maximizar os beneficios globais.

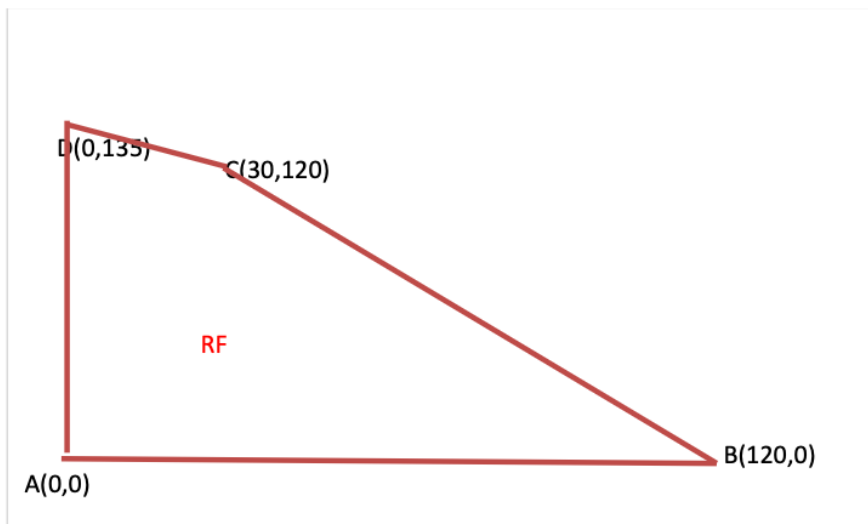
x : nº de motores de moto ; y : nº de motores de coche; $B(x, y) = 1500x + 2000y$

Formulamos o problema **Max $B(x, y) = 1500x + 2000y$ s.a restricións:**

$$\begin{cases} 60x + 45y \leq 120 \times 60 \\ 20x + 40y \leq 90 \times 60 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y \leq 480 \\ x + 2y \leq 270 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- b) Represente graficamente a rexión factible e calcule os seus vértices.

Vértices: A(0,0) ; B(120,0); C(30,120); D(0,135)



- c) Calcule as cantidades que se deben ensamblar cada mes de motores de cada tipo para maximizar beneficios e determine cal é o beneficio máximo.

Solución óptima:

$B(0,0)=0€$; $B(120,0)=180.000€$; $B(0,135)=270.000€$; $B(30,120)=285.000€$

Máx $B(x,y)=285.000€$, beneficio máximo que se alcanza con 30 motores de moto e 120 motores de coche

EXERCICIO 1. Álgebra.

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determine para que valores de m existe a matriz inversa de A.

A matriz A ten inversa se determinante de A distinto de cero

$$\det(A) = 2m \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$$

Existe inversa da matriz A para todo $m \neq 0$

b) Despexe a matriz X tal que $X \cdot A + B = C$ e calcúlea para $m=1$.

$$X \cdot A + B = C \Rightarrow X \cdot A = C - B \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (C - B) \cdot A^{-1}$$

$$X = (C - B) \cdot A^{-1}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^t; \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad (A^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (C - B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

(Podese calcular a matriz inversa de A utilizando Gauss)

EXERCICIO 2. Álgebra.

Consideramos o seguinte sistema de inecuacións:

$$y \leq x + 2$$

$$x + y \leq 6$$

$$x \leq 5$$

$$y \geq 0$$

a) Represente graficamente a rexión factible e calcule os seus vértices.

b) Determine o punto ou puntos desa rexión onde a función $f(x, y) = x - y$ alcanza os seus valores máximo e mínimo. c) Determine eses valores máximo e mínimo.

a) Inecuacións:

$$y \leq x + 2$$

$$x + y \leq 6$$

$$x \leq 5$$

$$y \geq 0$$

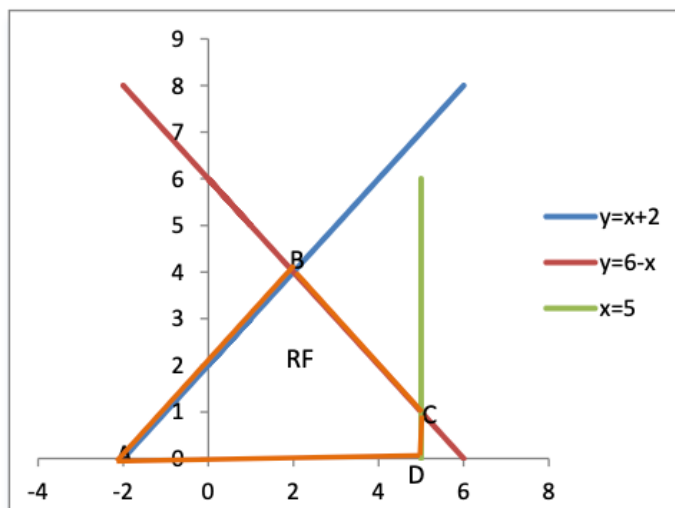
Vértices

$$A: \begin{cases} y = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \left\} A(-2, 0)$$

$$B: \begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \left\} B(2, 4)$$

$$C: \begin{cases} x = 5 \\ x + y = 6 \end{cases} \left\} C(5, 1)$$

$$D: \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \left\} D(5, 0)$$



b) $f(x, y) = x - y$

Avaliamos a función $f(x, y)$ nos vértices

$$f(A) = f(-2, 0) = -2$$

$$f(B) = f(2, 4) = -2$$

$$f(C) = f(5, 1) = 4$$

$$f(D) = f(5, 0) = 5$$

A función $f(x, y)$ alcanza un **mínimo** en tódolos puntos do **segmento que une os vértices A(-2, 0) e B(2, 4)** e alcanza un **máximo** no vértice **D(5, 0)**.

c) **Min** $f(x, y) = f(-2, 0) = -2$

$$\text{Máx } f(x, y) = f(5, 0) = 5$$

2021 EXTRAORDINARIA

EXERCICIO 1. Álgebra.

$$A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} \quad B = (a \ 2 \ 3) \quad C = (4 \ 0 \ 2)$$

a) Determine os valores x, y, z para os que a matriz A non ten inversa.

A matriz A ten inversa se determinante de A distinto de cero

$$\text{Det}(A) = |A| = y^2 + xyz - xyz - y^2z = y^2 - y^2z = y^2(1-z) \Rightarrow |A| = 0 \text{ si } y^2(1-z) = 0$$

$$y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$1 - z = 0 \Rightarrow z = 1$$

Po lo tanto non existe inversa da matriz A para os valores que anulan o $\text{det}(A)$, $y=0$, $z=1$.

b) Calcule A^{-1} para $x=3$, $y=1$, $z=0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{det}(A)} (A^t)^* ; A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \text{det}(A) = 1 \neq 0 ; A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; (A^t)^* = \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Resolva o sistema $B \cdot A = C$ para $a=1$

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \ 0 \ 2)$$

$$x + 2y + 3 = 4 \rightarrow x = 1 - 2y$$

$$y + 3z = 0 \rightarrow z = -y/3$$

$$x + 2y + 3z = 2 \rightarrow 1 - 2y + 2y + 3(-y/3) = 2 \Rightarrow y = -1$$

Substituíndo $x=3$ e $z=1/3$

EXERCICIO 2. Álgebra. Un distribuidor de software informático, ten entre os seus clientes a empresas e a particulares. Ao finalizar o ano debe conseguir polo menos 25 empresas como clientes na súa carteira, e o número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo o dobre que o de empresas. Ademais, ten estipulado un límite global de 120 clientes anuais. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuais, mentres que cada particular 229 euros.

- Formule o problema para maximizar os ingresos.
- Represente graficamente o conxunto de solucións.
- Cal desas solucións lle proporcionarían os maiores ingresos ao finalizar o ano? A canto ascenderían devanditos ingresos?

a) Sexa $x = n^{\circ}$ de empresas $y = n^{\circ}$ de particulares

Restricións

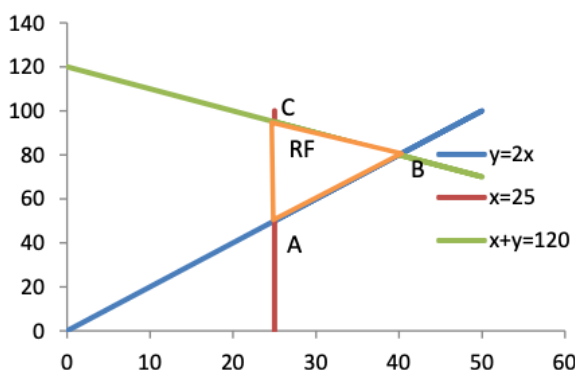
$$x \geq 25$$

$$y \leq 2x$$

$$x + y \leq 120$$

Función a maximizar: $I(x,y) = 386x + 229y$

b) Vértices



$$A: \begin{cases} x = 25 \\ y = 2x \end{cases} \left\} A(25, 50)\right.$$

$$B: \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 120 \end{cases} \left\} B(40, 80)\right.$$

$$C: \begin{cases} x = 25 \\ x + y = 120 \end{cases} \left\} C(25, 95)\right.$$

c) Avaliamos a función $I(x, y)$ nos vértices

$$I(A) = I(25, 50) = 21.000€$$

$$I(B) = I(40, 80) = 33.760€$$

$$I(C) = I(25, 95) = 31.405€$$

A función $I(x,y)$ alcanza un **máximo en (40,80)**. O distribuidor acada os maiores ingresos con 40 empresas e 80 particulares. Os **ingresos máximos son de 33.760€**

2020 ORDINARIA

PREGUNTA 1. Álgebra. Consideramos as matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule as matrices $A+B$ e $3C-B$.

b) Exprese en forma matricial o sistema de ecuacións que se obtén ao formular $A+B = 3C-B$ e resólvao.

PREGUNTA 1. Álgebra.

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad A + B = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3C - B = 3 \cdot \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-b & b-9 & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad A + B = 3C - B \Rightarrow \begin{array}{l} a + b = 3c - b \\ a - b = b - 9 \\ a + 3 = 3c - 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a + 2b - 3c = 0 \\ a - 2b = -9 \\ a - 3c = -6 \end{array} \right|$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Resolución

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$a + 2b - 3c = 0$$

$$-4b + 3c = -9$$

$$-2b = -6 \Rightarrow b = 3 ; c = 1; a = -3$$

Solución: $a=-3$; $b=3$; $c=1$

PREGUNTA 2. Álgebra. Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología *led* en dous modelos distintos: A e B. Para deseñar a estratexia de produción diaria terá en conta que se producirán polo menos 50 focos do modelo A, que o número de focos do modelo B non superará as 300 unidades e que se producirán polo menos tantos focos do modelo B como do modelo A. Ademais, a produción total non superará as 500 unidades diarias.

a) Formule o sistema de inecuacións asociado ao problema.

b) Represente graficamente a rexión factible e calcule os seus vértices.

c) Se o beneficio obtido por cada foco do modelo A é de 60 euros e por cada foco do modelo B é de 40 euros, cantos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar o beneficio? A canto ascende o beneficio máximo?

$x = \text{n}^\circ$ de focos do modelo A

$y = \text{n}^\circ$ de focos do modelo B

a) Función obxectivo **$\text{Max } f(x, y) = 60x + 40y$** s.a restriccións

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \leq 300 \\ y \geq x \\ x + y \leq 500 \end{array} \right\}$$

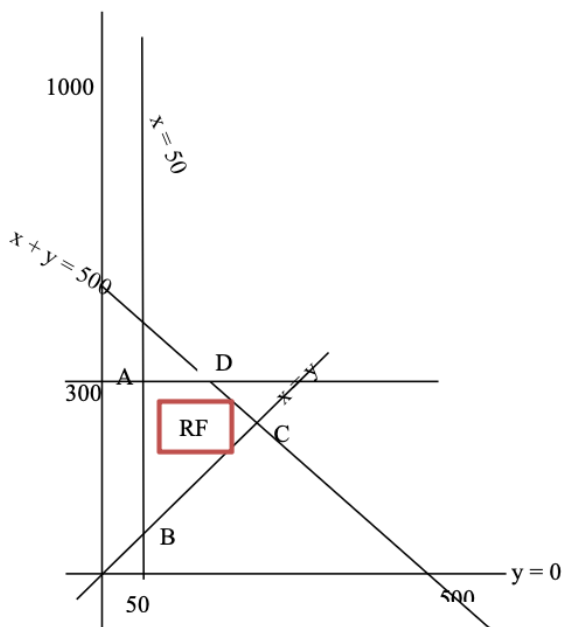
b) **Vértices**

$$\text{A: } \left. \begin{array}{l} y = 300 \\ x = 50 \end{array} \right\} A(50, 300)$$

$$\text{B: } \left. \begin{array}{l} x = 50 \\ y = x \end{array} \right\} B(50, 50)$$

$$\text{C: } \left. \begin{array}{l} y = x \\ x + y = 500 \end{array} \right\} C(250, 250)$$

$$\text{D: } \left. \begin{array}{l} x + y = 500 \\ y = 300 \end{array} \right\} D(200, 300)$$



c) Beneficio: **$f(x, y) = 60x + 40y$**

Avaliamos a función obxectivo nos vértices

$$f(A) = f(50, 300) = 15000$$

$$f(B) = f(50, 50) = 5000$$

$$f(C) = f(250, 250) = \mathbf{25000} \rightarrow \text{Máximo, solución óptima}$$

$$f(D) = f(200, 300) = 24000$$

Debe producir **250 focos de cada modelo** para maximizar os beneficios que ascenderían a **25000 euros**

2020 EXTRAORDINARIA

PREGUNTA 1. Álgebra. Dispoñemos de tres granxas A, B e C para a cría ecolóxica de polos. A granxa A ten capacidade para criar un 20% máis de polos que a granxa B, e a granxa B ten capacidade para criar o dobre de polos que a granxa C. Sábese ademais que entre as tres granxas se poden criar un total de 405 polos.

a) Formule o sistema de ecuacións asociado a este problema.

b) Resolva o sistema de ecuacións anterior. Cantos polos se poden criar en cada unha das tres granxas?

x = capacidade da granxa A

y = capacidade da granxa B

z = capacidade da granxa C

a) Sistema de ecuacións

$$x + y + z = 405 \rightarrow x + y + z = 405$$

$$x = y + 0,2y \rightarrow 5x - 6y = 0$$

$$y = 2z \rightarrow y - 2z = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 405 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 405 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 405 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 405 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 405 \\ 5 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2 + 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 405 \\ 0 & 11 & 5 & 2025 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{11F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 405 \\ 0 & 11 & 5 & 2025 \\ 0 & 0 & -27 & -2025 \end{pmatrix}$$

$$x + y + z = 405$$

$$11y + 5z = 2025$$

$$-27z = -2025 \Rightarrow z = 75 ; y = 150 ; x = 180$$

Solución: Pódense criar 180 polos na granxa A

150 polos na granxa B

75 polos na granxa C

PREGUNTA 2. Álgebra. O Comité Organizador dun Congreso conta con dous tipos de cuartos, A e B, para ofrecer como aloxamento ós seus participantes. Para realizar a contratación, decidiron que o número de cuartos de tipo B non debe ser maior que o número de cuartos de tipo A, e que o número de cuartos de tipo A non debe ser maior que 160. Ademais, sábese que en total serán necesarios como máximo 200 cuartos.

a) Formule o sistema de inecuacións asociado a este problema.

b) Represente graficamente a rexión factible e calcule os seus vértices.

c) Se os custos son de 80 € por cada cuarto de tipo A e de 50 € por cada cuarto de tipo B, cal é o custo máximo de aloxamento que afrontaría o Comité Organizador?

$x = \text{n}^\circ$ de habitacións tipo A

$y = \text{n}^\circ$ de habitacións tipo B

a) Sistema de inecuacións

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x \\ x \leq 160 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

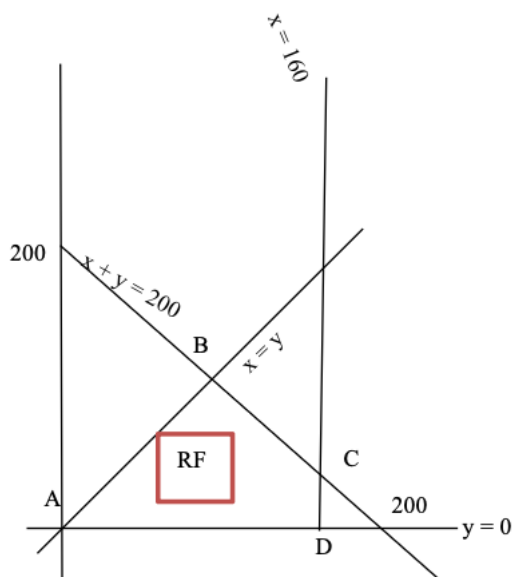
b) Vértices

$$A: \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x = y \end{array} \right\} A(0,0)$$

$$B: \left. \begin{array}{l} x + y = 200 \\ y = x \end{array} \right\} B(100,100)$$

$$C: \left. \begin{array}{l} x = 160 \\ x + y = 200 \end{array} \right\} C(160,40)$$

$$D: \left. \begin{array}{l} x = 160 \\ y = 0 \end{array} \right\} D(160,0)$$



c) Función obxectivo **Max $f(x, y) = 80x + 50y$**

Avaliamos a función obxectivo nos vértices

$$f(A) = f(0,0) = 0$$

$$f(B) = f(100, 100) = 13000$$

$$f(C) = f(160, 40) = 14800 \rightarrow \text{Máximo, solución óptima}$$

$$f(D) = f(160,0) = 12800$$

Solución: O coste máximo que podería afrontar o comité organizador serán **14800 euros** que se corresponden coa contratación de **160 habitacións tipo A e 40 habitacións tipo B**.

2019 ORDINARIA

1. Consideramos as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula a matriz $B^t \cdot A \cdot B$.

b) Calcula a inversa da matriz $A - I$, onde I é a matriz identidade de orde 2.

c) Despexa a matriz X na ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ e calcúlala.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad B^t \cdot A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \text{Sexa } I \text{ a matriz identidade, } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos } A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(A - I) = |A - I| = -1$$

$$(A - I)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj } (A - I)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{A matriz inversa de } A - I \text{ será } (A - I)^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A - I)} \text{Adj } (A - I)^t$$

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Despexamos X na ecuación matricial $A \cdot X - B = X$

$$A \cdot X - X = B \Rightarrow (A - I) \cdot X = B \Rightarrow X = (A - I)^{-1} \cdot B$$

Cálculo de X

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Unha tenda deportiva desexa liquidar 2000 camisetas e 1000 chándales da tempada anterior. Para iso lanza dúas ofertas, 1 e 2. A oferta 1 consiste nun lote dunha camiseta e un chándal, que se vende a 30 €; a oferta 2 consiste nun lote de tres camisetas e un chándal, que se vende a 50 €. Non se desexa ofrecer menos de 200 lotes da oferta 1 nin menos de 100 da oferta 2.

- a) Formula o problema que permite determinar cantos lotes de cada tipo debe vender para maximizar os ingresos
b) Representa a rexión factible c) Cantos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar os ingresos? A canto ascenden ditos ingresos?

$x = \text{n}^\circ \text{ lotes da oferta 1}$

$y = \text{n}^\circ \text{ lotes da oferta 2}$

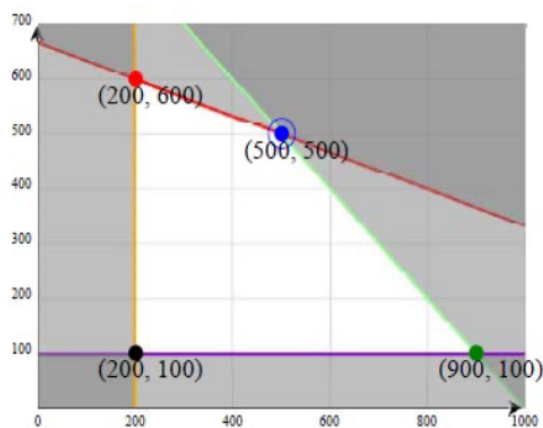
a) Función obxectivo **Máx $f(x, y) = 30x + 50y$ s.a**

$$x + 3y \leq 2000$$

$$x + y \leq 1000$$

$$x \geq 200$$

$$y \geq 100$$



Vértices

$$A: \begin{cases} x + y = 1000 \\ x + 3y = 2000 \end{cases} A(500, 500)$$

$$B: \begin{cases} x + y = 1000 \\ y = 100 \end{cases} B(900, 100)$$

$$C: \begin{cases} x = 200 \\ y = 100 \end{cases} C(200, 100)$$

$$D: \begin{cases} x + 3y = 2000 \\ x = 200 \end{cases} D(200, 600)$$

c) Avaliamos a función obxectivo nos vértices

$$f(A) = f(500, 500) = 30 \times 500 + 50 \times 500 = 40.000 \rightarrow \text{Máximo, solución óptima}$$

$$f(B) = 32.000$$

$$f(C) = 11.000$$

$$f(D) = 36.000$$

Para maximizar os ingresos debe vender 500 lotes de cada tipo

Os ingresos máximos ascenden a 40.000€

2019 EXTRAORDINARIA

1. Nunha caixa hai billetes de 5, 10 e 20 por un valor de 400 €. Sábese que o número de billetes de 20 € é a terceira parte do total e que o número de billetes de 5 € é inferior en 4 unidades ao do resto.

a) Escribe un sistema de ecuacións que represente o problema. b) Escríbeo en forma matricial.

c) Calcula a matriz inversa da matriz de coeficientes e resolve o sistema.

$x = n^\circ$ billetes de 5 €

$y = n^\circ$ billetes de 10 €

$z = n^\circ$ billetes de 20€

a) **Formulación problema**

$$5x + 10y + 20z = 400$$

$$z = \frac{x+y+z}{3} \quad \text{De forma equivalente}$$

$$x = y + z - 4$$

$$5x + 10y + 20z = 400$$

$$x + y - 2z = 0$$

$$x - y - z = -4$$

b) **En forma matricial**

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$A \qquad X \qquad B$

c) **Inversa matriz coeficientes**

Matriz de coeficientes: A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^t)^* ; \det(A) = (-5-20-20-20-10+10) = -65$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & -1 \\ 20 & -2 & -1 \end{pmatrix}; (A^t)^* = \begin{pmatrix} -3 & -10 & -40 \\ -1 & -25 & 30 \\ -2 & 15 & -5 \end{pmatrix}; A^{-1} = -\frac{1}{65} \begin{pmatrix} -3 & -10 & -40 \\ -1 & -25 & 30 \\ -2 & 15 & -5 \end{pmatrix}$$

Para resolver o sistema

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{65} \begin{pmatrix} -3 & -10 & -40 \\ -1 & -25 & 30 \\ -2 & 15 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 16 \\ y = 8 \\ z = 12 \end{matrix}$$

18= n° billetes de 5 €; 8= n° billetes de 10 €; 12= n° billetes de 20 €

1. Unha adega produce viños brancos e tintos. A produción de ambos tipos de viño non debe superar os 90 millóns de litros e a produción de viño branco non debe superar o dobre da de viño tinto nin ser inferior a súa metade. Tamén se sabe que para atender a demanda debe producir ao menos 45 millóns de litros. A adega comercializa o viño branco a 8€ o litro e o tinto a 6€ o litro. **a)** Formula e representa graficamente o problema. **b)** A canto ascenden os ingresos máximos e como se conseguen?

x = Cantidad viño branco (en millóns de litros)

y = Cantidad viño tinto (en millóns de litros)

a) Formulación problema

Función obxectivo **Máx $f(x, y) = 8x + 6y$** s.a restricións

$$x + y \leq 90$$

$$x \leq 2y$$

$$x \geq \frac{y}{2} \Leftrightarrow 2x \geq y$$

$$x + y \geq 45$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

b) Avaliamos a función obxectivo nos vértices

$$f(A) = f(60, 30) = 8 \times 60 + 6 \times 30 = 660 \rightarrow \text{Máximo,}$$

solución óptima

$$f(B) = 600$$

$$f(C) = 300$$

$$f(D) = 330$$

Para maximizar os ingresos deben producirse 60 millóns de litros de viño branco e 30 millóns de tinto

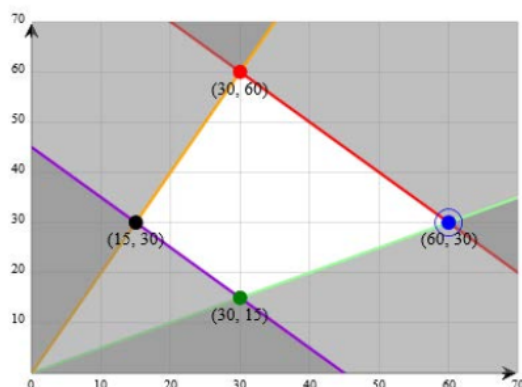
Vértices

$$A: \begin{cases} x + y = 90 \\ x = 2y \end{cases} \rightarrow A(60, 30)$$

$$B: \begin{cases} x + y = 90 \\ 2x = y \end{cases} \rightarrow B(30, 60)$$

$$C: \begin{cases} x + y = 45 \\ 2x = y \end{cases} \rightarrow C(15, 30)$$

$$D: \begin{cases} x + y = 45 \\ x = 2y \end{cases} \rightarrow D(30, 15)$$



Os ingresos máximos ascenden a 660 millóns de €

2018 ORDINARIA

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

Calcula as matrices $B - C$ e $A \cdot B$. Calcula os valores de a , b e c que verifican $B - C = A \cdot B$

$$B - C = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-c \\ 0 & -1+c \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$b=b$$

$$1-c=1-a \Rightarrow a=c$$

$$-1+c=1 \Rightarrow c=2; a=2$$

Solución: $a=2$; b calquera número real; $c=2$

1. Unha pastelería fai con fariña e nata dous tipos de biscoitos: suave e duro. Dispón de 160 quilogramos de fariña e 100 quilogramos de nata. Para fabricar un biscoito suave necesita 250 gramos de fariña e 250 gramos de nata e para fabricar un biscoito duro necesita 400 gramos de fariña e 100 gramos de nata. Ademais o número de biscoitos suaves fabricados debe exceder ao menos en 100 unidades o número de biscoitos duros. Se os biscoitos suaves se venden a 6 € e os biscoitos duros a 4,5€,

$x = \text{n}^\circ \text{ biscoitos tipo suave}$

$y = \text{n}^\circ \text{ biscoitos tipo duro}$

$$250 \text{ gr} = \frac{1}{4} \text{ Kg} = 0,25$$

a) Función obxectivo **Máx $f(x, y) = 6x + 4,5y$** s.a

$$\left. \begin{array}{l} 0,25x + 0,40y \leq 160 \\ 0,25x + 0,10y \leq 100 \\ x \geq y + 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + 8y \leq 3200 \\ 5x + 2y \leq 2000 \\ x - y \geq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right.$$

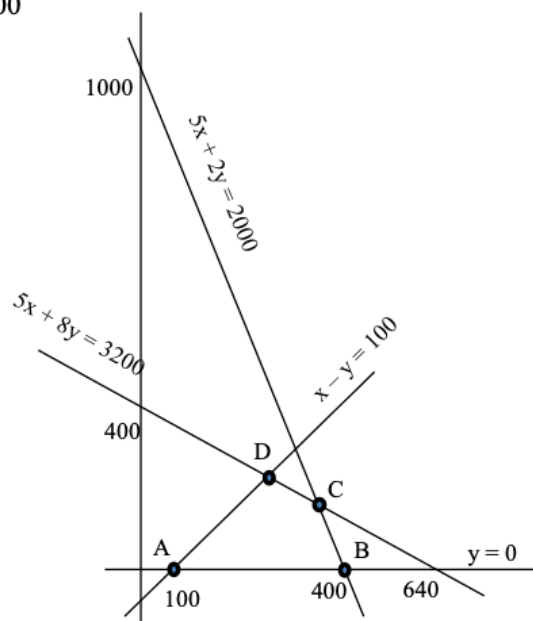
b) Vértices

$$A: \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x - y = 100 \end{array} \right\} A(100, 0)$$

$$B: \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 5x + 2y = 2000 \end{array} \right\} B(400, 0)$$

$$C: \left. \begin{array}{l} 5x + 8y = 3200 \\ 5x + 2y = 2000 \end{array} \right\} C(320, 200)$$

$$D: \left. \begin{array}{l} x - y = 100 \\ 5x + 8y = 3200 \end{array} \right\} D\left(\frac{4000}{13}, \frac{2700}{13}\right)$$



c) Avaliamos a función obxectivo nos vértices

$$f(A) = 600$$

$$f(B) = 2400$$

$$f(C) = 6 \times 320 + 4,5 \times 200 = 2820 \rightarrow \text{Máximo, solución óptima}$$

$$f(D) = \frac{36150}{13} = 2780,77$$

Debe fabricar **320 biscoitos suaves e 200 duros** para maximizar as vendas.

As vendas ascenden a 2820 €

2018 EXTRAORDINARIA

1. As vendas de tres produtos P1, P2 e P3, relacionados entre si, dá lugar ao seguinte sistema de ecuacións lineais $x+y+z=6$; $x+y-z=0$; $2x-y+z=3$, sendo x, y, z as vendas dos produtos P1, P2 e P3 respectivamente

a) Exprésalo sistema en forma matricial $AX = B$. b) Calcula a matriz inversa de A, sendo A a matriz cadrada de orde 3 dos coeficientes. c) Calcula as vendas x, y, z para eses tres produtos.

x = Vendas P₁

y = Vendas P₂

z = Vendas P₃

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A \qquad X \qquad B$

b)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^t; \det(A) = (1 - 1 - 2 - 2 - 1 - 1) = -6$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; (A^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{matrix}$$

Vendas de P₁ = 1; Vendas de P₂ = 2; Vendas de P₃ = 3

$$\text{Ou resolvendo o sistema } \left. \begin{matrix} x+y+z=6 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=3 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 2(x+y)=6 \\ 3x=3 \\ z=3 \end{matrix} \Rightarrow x=1; y=2$$

$\Rightarrow$ Solución x = 1, y = 2, z=3

1. Un centro comercial ten en existencias 750 reprodutores de DVD no almacén A e outros 600 no almacén B. Se se quere ter polo menos 900 reprodutores en tenda e que os do almacén A non excedan o triplo dos de B:

a) Formula o problema e representa graficamente o conxunto de solucións. Poderíanse enviar 400 unidades desde cada almacén? b) Se os custos unitarios de envío son 0,30 euros por unidade para o almacén A e 0,25 euros por unidade para o almacén B, cantas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar o custo de transporte? A canto ascendería o devandito custo?

Exercicio 1:

x = nº reprodutores de A.
 y = nº reprodutores de B.

a) Formulación problema

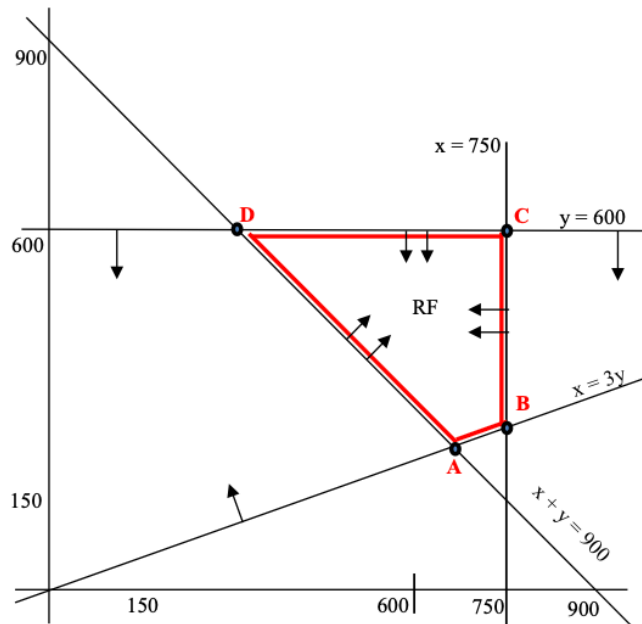
$$x \leq 750$$

$$x \leq 600$$

$$x + y \geq 900$$

$$x \leq 3y$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$



Vértices:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 900 \\ x = 3y \end{array} \right\} A (675, 225) \quad \left. \begin{array}{l} x = 750 \\ y = 600 \end{array} \right\} C (750, 600)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3y \\ x = 750 \end{array} \right\} B (750, 250) \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 900 \\ y = 600 \end{array} \right\} D (300, 600)$$

$$x = 400, y = 400; (400, 400) \notin RF$$

$$x + y = 400 + 400 = 800 \text{ (non é maior que 900)}$$

Non se poderían enviar 400 unidades desde cada almacén

b) Optimización: $\text{Min } f(x, y) = 0,30x + 0,25y$

$$f(A) = 0,30 \times 675 + 0,25 \times 225 = 258,75$$

$$f(B) = 0,30 \times 750 + 0,25 \times 250 = 287,5$$

$$f(C) = 0,30 \times 750 + 0,25 \times 600 = 375$$

$$f(D) = 0,30 \times 300 + 0,25 \times 600 = 240 \rightarrow \text{SOLUCIÓN ÓPTIMA}$$

Deberían enviarse 300 unidades do almacén A e 600 do B.

O custo ascende a 240 €.

2017 ORDINARIA

1. Consideremos as matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula os valores de x e y para os que se cumpre a igualdade $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Determina o rango das matrices A e B .

(c) Calcula X na ecuación matricial $X + A^t = 2I + B$, A^t matriz trasposta de A e I matriz identidade de orde 3.

(a) **1 punto.** Calcula os valores de x e y para os que se cumpre a igualdade $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calcular $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-3y \\ x+y \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

Calcular $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+x \\ -y-1 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

Calcular os valores de x e y $\begin{pmatrix} -2x-3y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ -y-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-3y=-1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5/3 \\ y=-4/3 \end{cases}$ **0'50 puntos.**

(b) **1 punto.** Determina o rango das matrices A e B .

Calcular o $\det(A) = 16$ **0'25 puntos.** Concluir que, como $\det(A) \neq 0$ entón o $\text{rango}(A) = 3$ **0'25 puntos.**

Calcular $\det(B) = 0 \Rightarrow \text{rango}(B) < 3$. O menor, por exemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ten $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$ **0'25 puntos.** Concluir que o $\text{rango}(B) = 2$ **0'25 puntos.**

(c) **1 punto.** Calcula X na ecuación matricial $X + A^t = 2I + B$, A^t matriz trasposta de A e I matriz identidade de orde 3.

Despexar X na ecuación matricial, $X = 2I + B - A^t$ **0'25 puntos.**

Determinar a trasposta da matriz A , $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

Calcular $2I + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

Chegar ao resultado $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

1. Sexa a función lineal $f(x,y) = 2x - 3y$ suxeita ás restricións $x + 2y \leq 40$, $x + y \geq 5$, $3x + y \leq 45$, $x \geq 0$.
- Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.
 - Calcula o punto ou puntos desa rexión onde a función alcanza o seu valor máximo e o seu valor mínimo.

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa a función lineal $f(x,y) = 2x - 3y$ suxeita ás restricións $x + 2y \leq 40$, $x + y \geq 5$, $3x + y \leq 45$, $x \geq 0$.

(a) **2'25 puntos.** Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

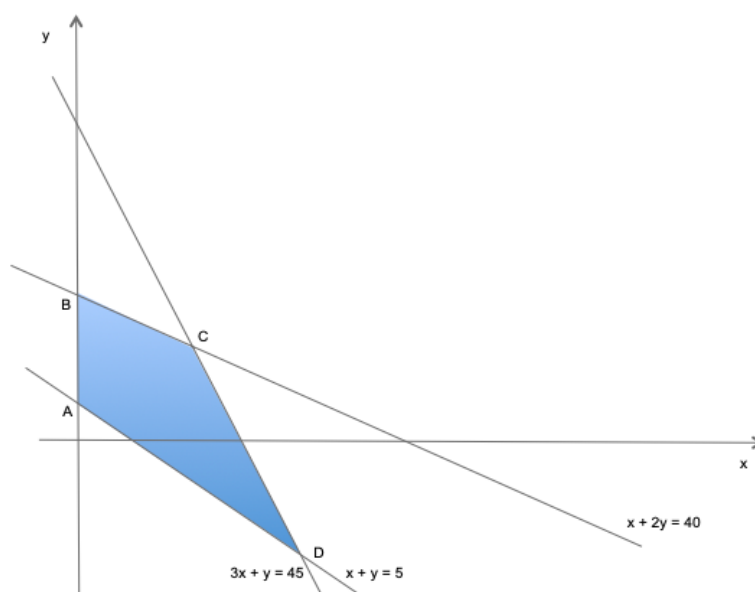
– Representamos as rectas

$x + 2y = 40$, pasa polos puntos (0, 20) e (40, 0).

$x + y = 5$, pasa polos puntos (0, 5) e (5, 0).

$3x + y = 45$, pasa polos puntos (0, 45) e (15, 0).

– Representación gráfica da rexión factible **1 punto**



– Polos vértices: A(0, 5) e B(0, 20) **0'25 puntos**; C(10, 15) **0'50 puntos**; D(20, -15) **0'50 puntos**.

(b) **0'75 puntos.** Calcula o punto ou puntos desa rexión onde a función alcanza o seu valor máximo e o seu valor mínimo.

– Calcular os valores da función obxectivo en cada un dos catro vértices: **0'25 puntos.**

No A(0, 5) $f(0, 5) = -15$; No B(0, 20) $f(0, 20) = -60$; No C(10, 15) $f(10, 15) = -25$; No D(20, -15) $f(20, -15) = 85$

– A función obxectivo alcanza o seu valor máximo no punto D(20, -15) **0'25 puntos.**

– A función obxectivo alcanza o seu valor mínimo no punto B(0, 20) **0'25 puntos.**

2017 EXTRAORDINARIA

1. Sexan as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & c & c \end{pmatrix}$.

- (a) Calcula os valores de a , b e c para que se satisfaga a igualdade $A \cdot B + B \cdot C = 2I$, I matriz identidade de orde 3.
 (b) Para $a = 4$, $b = -3$ e $c = 1$ calcula o rango da matriz $A + B - 2C$.

OPCIÓN A

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexan as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & c & c \end{pmatrix}$.

- (a) **2 puntos.** Calcula os valores de a , b e c para que se satisfaga a igualdade $A \cdot B + B \cdot C = 2I$, I matriz identidade de orde 3.

– Calcular o produto das matrices $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b+a & 2 \\ 0 & b+a & 1 \end{pmatrix}$ **0'50 puntos.**

– Calcular o produto das matrices $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b+c & b+c \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **0'50 puntos.**

– Formular as ecuacións $\begin{cases} a+b+c=2 \\ b+c=-2 \\ a+b=1 \end{cases}$ **0'25 puntos.**

- Calcular $a = 4$, $b = -3$ e $c = 1$, por calquera método **0'75 puntos (0'25 puntos por cada un dos valores).**

- (b) **1 punto.** Para $a = 4$, $b = -3$ e $c = 1$ calcula o rango da matriz $A + B - 2C$.

– Calcular a matriz $A + B - 2C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

– $\det(A + B - 2C) = 0 \Rightarrow \text{rango}(A + B - 2C) < 3$ **0'25 puntos.**

– O menor $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ten $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A + B - 2C) = 2$ **0'50 puntos.**

1. Unha fábrica de materiais plásticos produce dous tipos de colectores A e B. A súa produción semanal debe de ser de polo menos 10 colectores en total e o número de colectores de tipo B non pode superar en máis de 10 ao número dos de tipo A. Ademais, cada colector de tipo A ten uns custos de produción de 150€ e cada colector de tipo B de 100€, dispoñendo dun máximo de 6000€ semanais para o custo total de produción.

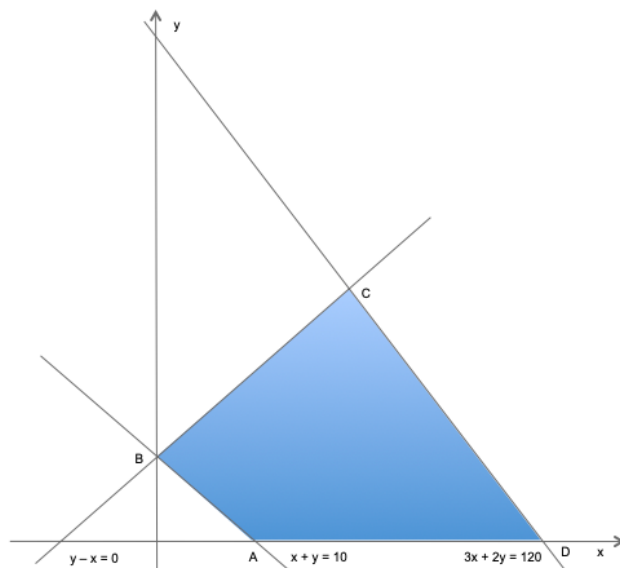
- Formula o sistema de inecuacións. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.
- Se cada colector de tipo A xera uns beneficios de 130€ e o de tipo B de 140€, ¿cantos colectores de cada tipo terán que producir á semana para que o beneficio total semanal sexa máximo?

(a) 2,00 puntos. Formula o sistema de inecuacións. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.

Sexan "x: número de colectores tipo A que producen á semana"

"y: número de colectores tipo B que producen á semana"

- Formulamos as inecuacións $\underbrace{x + y \geq 10}_{0'25 \text{ puntos}}$, $\underbrace{y \leq x + 10}_{0'25 \text{ puntos}}$, $\underbrace{150x + 100y \leq 6000}_{0'25 \text{ puntos}}$, $\underbrace{x \geq 0, y \geq 0}_{0'25 \text{ puntos}}$
- Representamos as rectas
 $x + y = 10$, pasa polos puntos (0, 10) e (10, 0)
 $y - x = 10$ pasa polos puntos (0, 10) e (-10, 0)
 $150x + 100y = 6000 \Leftrightarrow 3x + 2y = 120$, pasa polos puntos (0, 60) e (40, 0)
- Vértices da rexión factible
 polos vértices: A (10, 0), B (0, 10), D (40, 0) **0'25 puntos**.
 polo vértice C (20, 30) **0'50 puntos**.
- Representación gráfica da rexión factible (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os tres vértices) **0'75 puntos**:



- 0'50 puntos.** Se cada colector de tipo A xera uns beneficios de 130€ e o de tipo B de 140€, ¿cantos colectores de cada tipo terán que producir á semana para que o beneficio total semanal sexa máximo?

- Determinar a función obxectivo a maximizar: $f(x,y) = 130x + 140y$ **0'25 puntos**.
- A función alcanza o seu valor máximo no vértice C(20, 30).
- Responder á pregunta do exercicio:
 "Terán que producir á semana 20 contenedores do tipo A e 30 do tipo B para que o seu beneficio total semanal sexa máximo" **0'25 puntos**.

