SOLUCIÓN MAT.APL. ÁS CCSS 2023/2024	EXAME 1 (2º AV) 22/02/2024	UNIDAD 4/5 :LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVACIÓN

1. (1,5 ptos) ***Calcula los siguientes límites***

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right) = 0$

multiplicamos y dividimos por el conjugado

2. (2 ptos) ***Calcula la primera y la segunda derivada de** f (x) = Ln (1+x^2) – x^2 **simplifica el resultado y determina los puntos en los que se anulan.***

$f'(x) := \frac{2x}{1+x^2} - 2x \boxed{= -\frac{2x^3}{1+x^2}}$

f´(x) = 0 si -2x^3 = 0 , es decir, si x =0

$f''(x) = -2\cdot\frac{3x^2(1+x^2)-2xx^3}{(1+x^2)^2} \boxed{= -\frac{2(3x^2+x^4)}{(1+x^2)^2}}$

f´´(x) = 0 si $3x^2 + x^4 = 0$; $x^2 (3 + x^2) =0$; x = 0

3. (1,5 ptos) ***Sean las funciones*** *f(x) = (2x^2 – 1)^{3}ln (x^4)* y *g(x) =* $\frac{e^{-2x+x^2}}{x^2+1}$**. *Determina el valor de f´ (- 1) y g ´(0).***

$f'(x) = 3(2x^2-1)^2(4x)\ \ln(x^4) + (2x^2-1)^3 \overbrace{\frac{4x^3}{x^4}}^{\text{es } 4/x}$

Sacando factor común $4(2x^2-1)^2$ obtenemos : $f'(x) = 4(2x^2-1)^2\left\{3x\ \ln(x^4) + \frac{2x^2-1}{x}\right\}$

Luego, $f'(-1) = 4[2(-1)^2-1]^2\left\{3(-1)\ \ln[(-1)^4] + \frac{2(-1)^2-1}{(-1)}\right\} = 4.1\ \{0+(-1)\} = \boxed{-4}$

$g'(x) = \frac{e^{-2x+x^2}.\overbrace{(-2+2x)}^{\text{es } 2(x-1)}(x^2+1) - (e^{-2x+x^2})\ 2x}{(x^2+1)^2}$

Sacando factor común $2(e^{-2x+x^2})$ obtenemos $2(e^{-2x+x^2})\frac{(x-1)(x^2+1)-x}{(x^2+1)^2}$

Luego, $g'(0) = 2(e^{-2.0+0^2})\frac{(0-1)(0^2+1)-0}{(0^2+1)^2} = 2\ .\frac{-1}{1} = \boxed{-2}$

4. (1,5 ptos) ***Sea la función dada por f(x) =*** $\begin{cases} x^2 + ax & si\ x \le 2 \\ \frac{x+b}{x-1} & si\ x > 2 \end{cases}$ ***. Determina los valores de a y b , sabiendo que dicha función es derivable .***

<u>*Solución*</u>

Para $x \neq 2$ $f'(x) = \begin{cases} 2x+a\ ,\ si\ x<2 \\ \dfrac{1(x-1)-(x+b).1}{(x-1)^2}\ ,\ si\ x>2 \end{cases} = \begin{cases} 2x+a\ ,\ si\ x<2 \\ \dfrac{-1-b}{(x-1)^2}\ ,\ si\ x>2 \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (x^2+ax) = 4+2a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+b}{x-1} = 2+b \\ f(2) = 4+2a \end{array}\right. \Rightarrow \text{Para que sea continua } 4+2a = 2+b \Rightarrow 2a-b=-2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2} (2x+a) = 4+a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-1-b}{(x-1)^2} = -1-b \end{array}\right. \Rightarrow \text{para que coincidan las derivadas laterales } 4+a=-1-b \Rightarrow a+b=-5$$

$$\text{Luego, } \begin{cases} 2a-b=-2 \\ a+b=-5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \frac{-7}{3}\quad b=\frac{-8}{3}}$$

5. (2 ptos) ***Calcula las asíntotas de la función*** $f(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{x+2}$ ***y representa gráficamente los resultados.***

- <u>**ASÍNTOTAS VERTICALES**</u>

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{2x^2-x-1}{x+2} = \frac{9}{0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{2x^2-x-1}{x+2} = \dfrac{9}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{2x^2-x-1}{x+2} = \dfrac{9}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \underline{x=-2 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

- <u>**ASÍNTOTAS HORIZONTALES**</u>

<u>Por la izquierda:</u>

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-x-1}{x+2} = \frac{+\infty}{-\infty}(\mathrm{I}) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to -\infty} (2x) = -\infty$$

<u>Por la derecha:</u>

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-x-1}{x+2} = \frac{+\infty}{+\infty}(\mathrm{I}) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} (2x) = +\infty$$

<u>No hay asíntotas horizontales</u>

➢ **<u>ASÍNTOTAS OBLICUAS</u>**: Como $f(x)$ es una función racional, si tiene asíntota oblicua es la misma por ambos lados.

$y = mx + n$

$$\bullet\ m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-x-1}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-1}{x^2+2x} = \frac{\infty}{\infty}(\mathrm{I}) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty}2 = 2 \Rightarrow m = 2$$

$$\bullet\ n = \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-x-1}{x+2}-2x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-x-1-2x^2-4x}{x+2}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-5x-1}{x-3} = \frac{\infty}{\infty}(\mathrm{I}) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x} = \lim_{x\to\infty}(-5) = -5 \Rightarrow n = -5$$

Por tanto, $y = 2x-5$ es A.O. de $f(x)$

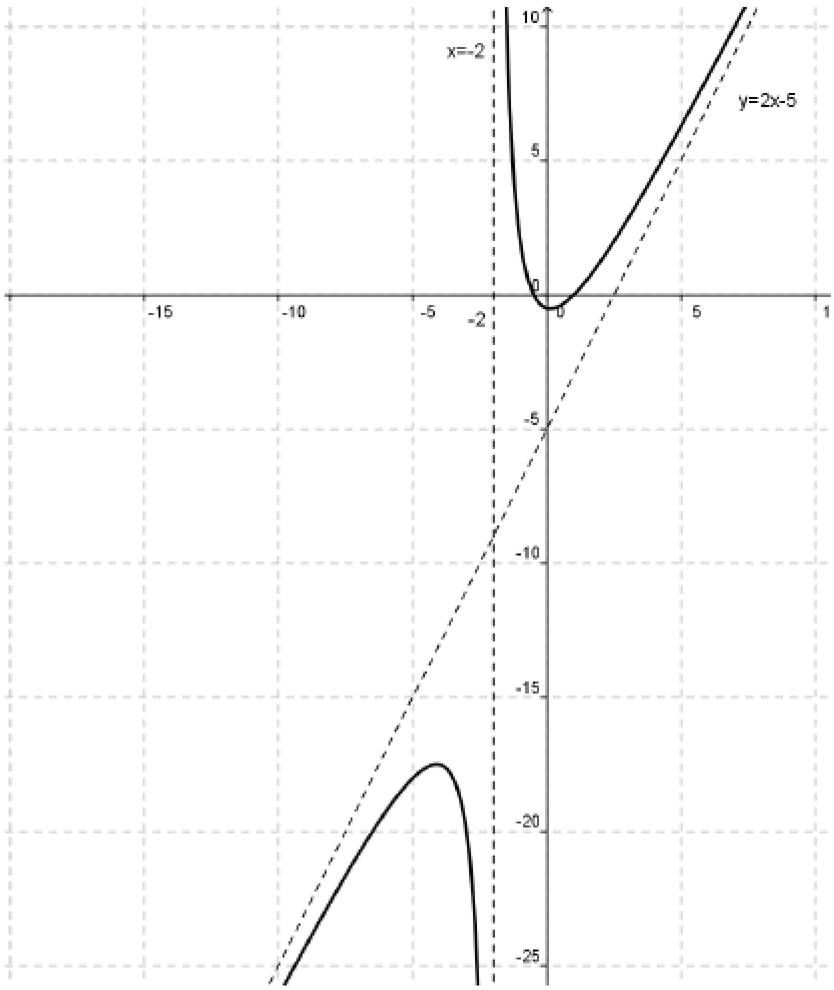
POSICIÓN

Izquierda

$$x=-100 \Rightarrow \begin{cases} Función \to y = \dfrac{2(-100)^2-(-100)-1}{-100+2} = \dfrac{20099}{-98} \cong -205{,}09 \\ Asíntota \to y = 2(-100)-5 = -205 \end{cases} \Rightarrow \underline{f(x) \text{ está por debajo de la A.O.}}$$

Derecha

$$x=100 \Rightarrow \begin{cases} Función \to y = \dfrac{2(100)^2-(100)-1}{100+2} = \dfrac{19899}{102} \cong 195{,}09 \\ Asíntota \to y = 2(100)-5 = 195 \end{cases} \Rightarrow \underline{f(x) \text{ está por encima de la A.O.}}$$



6. ***Un equipo de investigación ha estimado que el tiempo T (en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x en días) es***

$$T(x)=\begin{cases}\dfrac{300}{x+30} & si \quad 0\le x\le 30\\ \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)}+2 & si \quad x>30\end{cases}$$

a) *(0, 5 ptos)* ***Calcula el dominio y Justifica que la función T es continua en todo su dominio.***

b) *(0,5 ptos)* ***¿En que se traduce , usando el lenguaje de las funciones , que cuanto más se entrene un deportista, menor será el tiempo en realizar la prueba? ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?***

c) *(O,5 ptos)* ***Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 3 minutos? ¿Y en menos de 2 minutos?***

a) En (0, 30) la función es continua, pues en ese intervalo el denominador de $\dfrac{300}{x+30}$ no se anula.

Lo mismo ocurre con la función $\dfrac{1125}{(x-15)(x-5)}+2$, pues los puntos en los que es discontinua (15 y 5) no pertenecen al intervalo $(30, +\infty)$ en los que T toma esa expresión.

Veamos qué ocurre en $x = 0$ y $x = 30$.

$T(0) = 10$, $\lim\limits_{x\to 0^+} T(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{300}{x+30} = 10$

$T(30) = 5$, $\lim\limits_{x\to 30^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 30^-} \dfrac{300}{x+30} = 5$ $\quad \lim\limits_{x\to 30^+} T(x) = \lim\limits_{x\to 30^+}\left(\dfrac{1125}{(x-15)(x-5)}+2\right) = 5$

Así pues, T es continua en su dominio.

b) Como en ambas expresiones los numeradores son fijos y los denominadores son cada vez mayores y la función es continua, entonces es decreciente. Así pues, el máximo valor lo toma en cero, que es 10.

Ningún deportista puede tardar más de 10 minutos.

c) Como $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1125}{(x-15)(x-5)}+2\right) = 2$ y la función es decreciente, se concluye que entrenando lo suficiente se puede hacer en menos de 3, pero nunca en menos de 2, aunque sí puede quedar muy próximo a 2 minutos si entrena muchísimos días.