MAT.APL. ÁS CCSS	2023/2024	SOLUCIÓN EXAME 2 (2º AV)		BLOQUE DE ANÁLISIS 4/03/2024
PREGUNTAS	**1**	**2**	**3**	**4**
PUNTUACIÓN	**2, 5 ptos**	**2,5 ptos**	**2,5 ptos**	**2,5 ptos**
Observaciones: Se valorará el orden y la claridad en la ejecución del ejercicio. Todos los resultados deben estar justificados y bien expresados matemáticamente.				

1. *El precio en euros, que la acción de una empresa alcanza en el transcurso de una sesión de Bolsa, viene dado por la función* $\mathbf{p(t) = 4t^3 - 42t^2 + 120t + 200 \quad 0 \le t \le 7}$, *t es el tiempo en horas a contar desde el inicio de la sesión. Supongamos que la sesión empieza a las 10 de la mañana (t =0) y finaliza 7 horas después (a las 5 de la tarde).*
   - **a)** ***(1 pto)*** *¿Entre qué horas el precio de la acción sube y entre qué horas baja? ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un valor máximo relativo?¿ Y un valor mínimo relativo? Calcula dichos valores .*
   - **b)** ***(0,5 ptos)*** *¿Se alcanza en algún momento un valor máximo absoluto?¿ Y un valor mínimo absoluto?. En caso afirmativo , calcula dichos valores.*
   - **c)** ***(1 pto)*** *Estudia la curvatura y utilizando los resultados anteriores y calculando el punto de inflexión, traza la gráfica de la función p(t) .*

a) estudiamos crecimiento, decrecimiento y extremos relativos

$p'(t) = 0 \Leftrightarrow 12t^2 - 84t + 120 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 5,\ t_2 = 2$ 0,2

0 — 2	2 — 5	5 — 7
$p'(t) > 0$	$p'(t) < 0$	$p'(t) > 0$
↗	↘	↗

0,2

→ El precio sube entre las 10 ($t=0$) y las 12h ($t=2$); baja entre las 12h y las 3 de la tarde; vuelve a subir entre las 3 de la tarde ($t=5$) y las 5 ($t=7$). 0,2

→ valor máximo relativo: 12h ($t=2$) 0,1

→ valor mínimo relativo: 3 de la tarde ($t=5$) 0,1

→ valores? $t=2$; $p(2) = 4\cdot 2^3 - 42\cdot 2^2 + 120\cdot 2 + 200 = 304$ € 0,1

$t=5$; $p(5) = 4\cdot 5^3 - 42\cdot 5^2 + 120\cdot 5 + 200 = 205$ € 0,1

b) Para calcular los extremos absolutos, sustituimos en los extremos del intervalo de definición de p y comparamos:

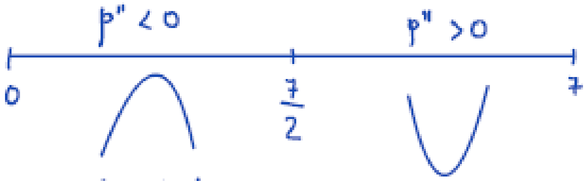
$t=0 \quad P(0) = 200$; $t=7 \quad P(7) = 4\cdot 7^3 - 42\cdot 7^2 + 120\cdot 7 + 200 = 354$

→ máximo absoluto $t=7 \quad P(7) = 354$ 0,25

→ mínimo absoluto $t=0 \quad P(0) = 200$ 0,25

c) curvatura, P.I y gráfica:

$p''(t) = 24t - 84 = 0 \iff t = \frac{84}{24} = \frac{7}{2} = 3{,}5$ 0,2

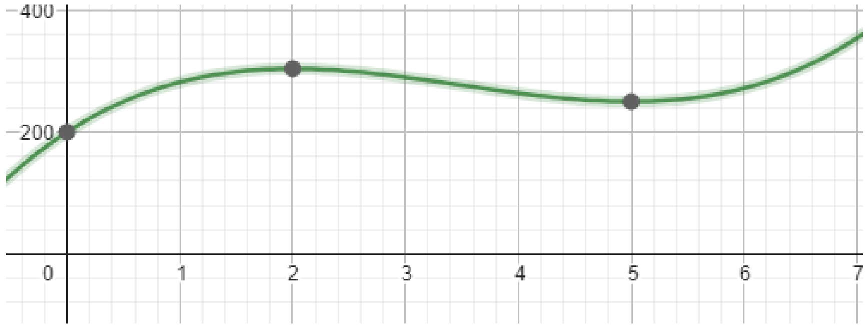


0,2

p cóncava en $(0, 7/2)$; f convexa en $(7/2, 7)$ 0,1

p tiene en $x = 7/2$ p. inflexión $p(7/2) = 277$ 0,1

0,4



2. a) **(1 pto)** *Calcula la* **derivada** *de* $f(x) = \ln\left(\frac{1-2x}{x+2}\right)$ *, simplificando al máximo el resultado .*

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1-2x}{x+2}} \cdot \frac{-2(x+2) - (1-2x)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{\cancel{x+2}}{1-2x} \cdot \frac{\cancel{-2x} - 4 - 1 + \cancel{2x}}{(x+2)^{\cancel{2}}} =$$

0,5

$$= \boxed{\frac{-5}{(1-2x)(x+2)}}$$

0,5

b) **(1, 5 ptos)** *Resuelve las siguientes* **integrales**:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} 5e^{4x+1}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4x^3+1}} dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 6x^2 - 3x}{x^2} dx$

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} 5 \cdot e^{4x+1} dx = 5\int_{-1}^{0} e^{4x+1} dx = 5 \cdot \frac{1}{4}\int_{-1}^{0} 4 \cdot e^{4x+1} dx = \left[\frac{5}{4} \cdot e^{4x+1}\right]_{-1}^{0} =$

0,25

$= \frac{5}{4} \cdot e - \frac{5}{4} \cdot e^{-3} = \boxed{\frac{5}{4}\left(e - \frac{1}{e^3}\right)}$

0,25

b) $\displaystyle\frac{1}{12}\int \frac{12x^2}{\sqrt{4x^3+1}} dx = \frac{1}{12} \cdot 2\sqrt{4x^3+1} + C = \boxed{\frac{\sqrt{4x^3+1}}{6} + C}$ 0,5

c) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 6x^2 - 3x}{x^2} dx = \int \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}} dx - \int \frac{6\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} dx - \int \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x^2}} dx =$ 0,2

$\displaystyle = \int x dx - \int 6 dx - \int \frac{3}{x} dx = \boxed{\frac{x^2}{2} - 6x - 3\ln|x| + C}$

0,1   0,1   0,1

3. *Sea f (x) definida mediante la siguiente expresión* $f(x)=\begin{cases} e^x+k & si \quad x\le 0 \\ 1-x^2 & si \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & si \quad x>3 \end{cases}$

a) ***(1 pto)*** *Estudia la* ***continuidad*** *en todo su domino, según los valores de k*

b) ***(1,5 ptos)*** *Considerando* ***k = 0****, representa gráficamente el recinto delimitado por f(x), el eje de abcisas y las rectas x = -1 y x = 1 . Obtén , además , el* ***área*** *de dicho recinto .*

a) La primera función es exponencial que es continua. La segunda es polinómica, también es continua. La tercera es una fracción cuyo denominador se anula en x =3 que no está en su dominio de definición. La función es continua si lo es en x = 0 y en x = 3.

En x = 0 para ser continua deben cumplirse las cuatro condiciones:

- Existe $f(0)=e^0+k=1+k$
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x+k=1+k$
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1-x^2=1-0=1$
- Los tres valores son iguales. $1+k=1 \Rightarrow k=0$

En x = 3 para ser continua deben cumplirse las cuatro condiciones:

- Existe $f(3)=1-3^2=-8$
- Existe $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 1-x^2=1-9=-8$
- Existe $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{0}=+\infty$

  No se cumple la tercera condición, por lo que no es continua en x = 3.

Conclusión:
Para $k=0$ la función es continua en $\mathbb{R}-\{3\}$. Para $k\neq 0$ la función es continua en $\mathbb{R}-\{0,3\}$.

b) Para $k=0$ la función queda

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ 1-x^2 & si \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & si \quad x>3 \end{cases}$$

Busquemos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas en el intervalo (–1, 1).

$En\ (-1,0)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^x=0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

$En\ (0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1-x^2 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Estos puntos no pertenecen a nuestro intervalo (–1, 1).

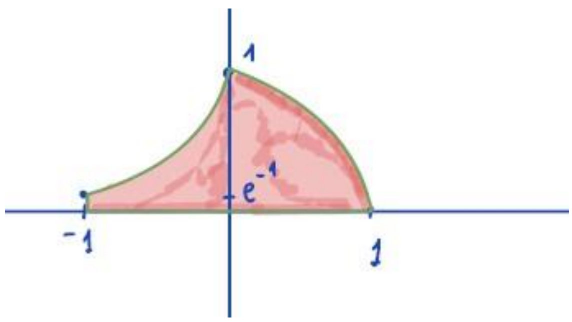
Como no hay puntos de corte el área de este recinto solo es una integral definida de la función desde –1 a 1. Aunque debemos separarlo en dos integrales al cambiar de definición.

$$\int_{-1}^{0} e^x dx=\left[e^x\right]_{-1}^{0}=e^0-e^{-1}=1-\frac{1}{e}$$

$$\int_{0}^{1} 1-x^2 dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left[1-\frac{1^3}{3}\right]-\left[0-\frac{0^3}{3}\right]=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

El área es la suma del valor de las integrales calculadas:

$$Área=1-\frac{1}{e}+\frac{2}{3}=\boxed{\frac{5}{3}-\frac{1}{e}=1,3\,u^2}$$



4. a) ***(1,5 ptos)*** *Calcula las* ***asíntotas*** *de* $f(x) = \frac{2x^2-16}{x+3}$*, representando gráficamente los resultados.*

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

$\longrightarrow$ A.V. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{2x^2-16}{x+3} = \frac{2}{0}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -3^-} \frac{2x^2-16}{x+3} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} \frac{2x^2-16}{x+3} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$

$\underline{x = -3 \text{ asíntota vertical.}}$

$\longrightarrow$ A.H: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-16}{x+3} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-16}{x+3} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = -\infty$

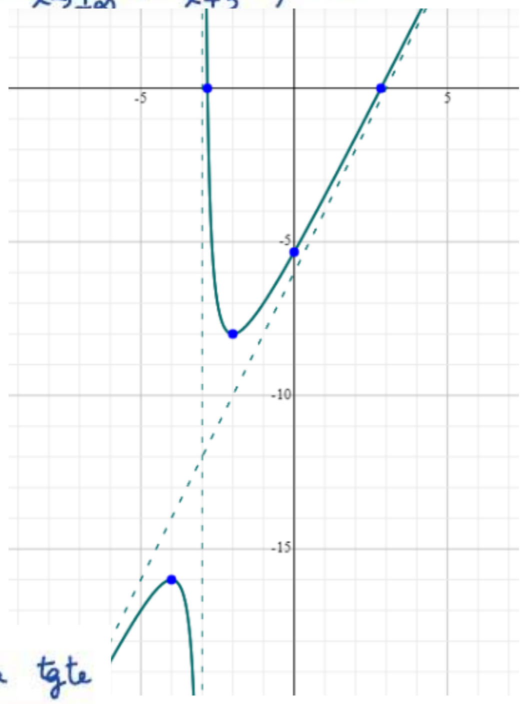
$\Rightarrow$ no hay asíntotas horizontales.

$\longrightarrow$ A.O: $y = mx + n$

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2-16}{x(x+3)} = 2$

$n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2-16}{x+3} - 2x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-6x-16}{x+3} \right) = -6$

$\underline{y = 2x - 6 \text{ asíntota oblicua.}}$



b) ***(1 pto)*** *Calcula la* ***ecuación de la recta tangente*** *a la función del apartado anterior en el punto de abcisa x = -2 .*

$f(x) = \frac{2x^2-16}{x+3}$ $\quad \underline{y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \text{ ec. recta tgte}}$

$f'(x) = \frac{4x(x+3) - (2x^2-16) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+12x+16}{(x+3)^2}$

$f'(-2) = \frac{8-24+16}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad y + 8 = 0(x+2)$

$f(-2) = \frac{8-16}{1} = -8 \quad \boxed{y = -8}$