EJERCICIOS MATEMÁTICAS APLICADAS II

TEMA : PROBABILIDAD

EJERCICIO 1

Si $P(A)=0,7$; $P(B)=0,35$ y $P(A\cap B)=0,15$, calcula las probabilidades de los sucesos $A\cup B$, $A\cap\bar{B}$ y $\bar{A}\cup\bar{B}$.

Utilizando las propiedades de la probabilidad y una de las leyes de De Morgan se tiene que:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,7+0,35-0,15=0,9$

$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=0,7-0,15=0,55$

$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0,15=0,85$

EJERCICIO 2

En una frutería el 60 % de los clientes compran naranjas, el 40 % compran manzanas y el 30 % no compran ni naranjas ni manzanas. Calcula el porcentaje de clientes que compran:

a) Naranjas o manzanas o ambas.

b) Manzanas y naranjas.

c) Naranjas pero no manzanas.

Se consideran los sucesos N = "el cliente compra naranjas" y M = "el cliente compra manzanas".

Elegido un cliente al azar, se tiene que $P(N)=0,6$, $P(M)=0,4$ y $P(\bar{N}\cap\bar{M})=0,3$.

a) Se pide la probabilidad de $N\cup M$. Mediante el suceso contrario y una de las leyes de De Morgan:

$$P(N\cup M)=1-P(\overline{N\cup M})=1-P(\bar{N}\cap\bar{M})=1-0,3=0,7$$

El 70 % de los clientes compran naranjas o manzanas o ambas.

b) Se pide la probabilidad de $N\cap M$:

$$P(N\cap M)=P(N)+P(M)-P(N\cup M)=0,6+0,4-0,7=0,3$$

El 30 % de los clientes compran naranjas y manzanas.

c) Se pide la probabilidad de $N\cap\bar{M}$:

$$P(N\cap\bar{M})=P(N)-P(N\cap M)=0,6-0,3=0,3$$

El 30 % de los clientes compran naranjas pero no manzanas.

EJERCICIO 3

En una determinada fábrica de automóviles, el 10 % de los coches fabricados tiene defectos de motor, el 8 % tiene defectos en la carrocería y el 4 % tiene defectos en motor y en carrocería. Se pide:

a) Expresa los datos proporcionados como probabilidades.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche tenga al menos un defecto?

c) ¿Y la probabilidad de que un coche elegido al azar no sea defectuoso?

d) Expresa e interpreta los resultados obtenidos en los aparatados b) y c) en porcentaje de coches.

Elegido un coche al azar, sean los sucesos: M = "tiene defectos de motor" y C = "tiene defectos de carrocería".

a) Los datos expresados como probabilidades son:

$$P(M)=0,1\quad P(C)=0,08\quad P(M\cap C)=0,04$$

b) Se trata de la probabilidad del suceso unión de M y C:

$$P(M\cup C)=P(M)+P(C)-P(M\cap C)=0,1+0,08-0,04=0,14$$

c) Que un coche no sea defectuoso resulta el suceso $\bar{M}\cap\bar{C}$. Utilizando una de las leyes de De Morgan y la propiedad de la probabilidad del suceso contrario:

$$P(\bar{M}\cap\bar{C})=P(\overline{M\cup C})=1-P(M\cup C)=1-0,14=0,86$$

d) El 14 % de los coches presenta al menos un defecto en el motor o en la carrocería.

El 86 % de los coches no presenta defectos ni en el motor ni en la carrocería.

EJERCICIO 4

En una ciudad, el 10 % de los días de junio llueve, mientras que el 75 % luce el sol. Calcula probabilidad de que en un día elegido al azar llueva y no haga sol en cada uno de los casos siguientes.

a) No es posible que en un día llueva y haga sol.

b) Si llueve, entonces también lucirá el sol.

c) El 5 % de los días de junio llueve y hace sol.

Elegido un día de junio al azar, se consideran los sucesos A = "llueve" y B = "hace sol", donde:

$$P(A)=0{,}1 \qquad P(B)=0{,}75$$

Se pide la probabilidad del suceso $A\cap\overline{B}$, que se obtiene de la expresión: $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$.

a) Si no es posible que llueva y haga sol, entonces $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$ y entonces:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)=0{,}1$$

b) En este caso, se tiene que $A\subset B$, y por lo tanto $A\cap B=A$, con lo que: $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A)=0$.

c) Si el 5 % de los día de junio llueve y hace sol, entonces $P(A\cap B)=0{,}05$. Por lo tanto:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=0{,}1-0{,}05=0{,}05$$

EJERCICIO 5

. **La asignatura de Administración de Empresas tiene dos grupos, en el primero el 40 % de los estudiantes son hombres y en el segundo son mujeres el 45 %. Se elige al azar un estudiante de cada grupo.**

a) Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

A = "ambos son mujeres" B = "sólo uno es mujer" C = "los dos son hombres"

b) Razona si el suceso contrario del suceso A es el C, el B, el $B\cap C$, el $B\cup C$ o algún otro suceso y calcula su probabilidad.

a) Si se elige un estudiante del primer grupo, la probabilidad de que sea hombre ($H1$) es $P(H1)=0{,}4$ y la de que sea mujer ($M1$) es $P(M1)=0{,}6$.

En el segundo grupo, al elegir un estudiante al azar, la probabilidad de que sea hombre ($H2$) es $P(H2)=0{,}55$ y la de que sea mujer ($M2$) es $P(M2)=0{,}45$.

La elección de un estudiante en un grupo es independiente de la elección de un estudiante en el otro grupo.

- El suceso A = "ambos son mujeres", se puede expresar como $A=M1\cap M2$ y, puesto que $M1$ y $M2$ son independientes: $P(A)=P(M1\cap M2)=P(M1)\cdot P(M2)=0{,}60\cdot 0{,}45=0{,}27$.
- El suceso B = "solo uno es mujer", se puede escribir como $B=(M1\cap H2)\cup(H1\cap M2)$. Teniendo en cuenta que los sucesos $(M1\cap H2)$ y $(H1\cap M2)$ son incompatibles y que los sucesos $M1$ y $H2$ son independientes al igual que $H1$ y $M2$, se tiene que:

$$P(B)=P(M1)\cdot P(H2)+P(H1)\cdot P(M2)=0{,}6\cdot 0{,}55+0{,}4\cdot 0{,}45=0{,}51$$

- El suceso C = "los dos son hombres" se puede expresar como $H1\cap H2$, y como $H1$ y $H2$ son independientes: $P(C)=P(H1\cap H2)=P(H1)\cdot P(H2)=0{,}40\cdot 0{,}55=0{,}22$.

b) El suceso contrario a A es $\overline{A}$ = "al menos uno es hombre". Por lo tanto, el suceso B no puede ser ya que $\overline{A}$ podrían ser los dos hombres. Tampoco es el suceso C pues $\overline{A}$ podría ser hombre y mujer. $B\cap C$ no son pues este conjunto es vacío y $\overline{A}$ no lo es. Si se considera $B\cup C$, se tiene que o sólo uno es mujer o los dos son hombres, luego $\overline{A}=B\cup C$. Por tanto, su probabilidad será:

$$P(\overline{A})=P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=0{,}51+0{,}22-0=0{,}73$$

Se comprueba que es cierto pues $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}27=0{,}73$.

EJERCICIO 6

El 80 % de los alumnos de mi colegio estudian inglés, y el 30 %, francés. Además, solo el 15 % combinan ambos idiomas. Calcula el porcentaje de alumnos que:

a) No estudia ninguno de esos idiomas.

b) Estudia solo uno de esos idiomas.

Si se elige un alumno al azar, se consideran los sucesos A = "estudia inglés" y B = "estudia francés". Entonces:

$$P(A)=0{,}8 \qquad P(B)=0{,}3 \qquad P(A\cap B)=0{,}15$$

a) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$. Utilizando una de las leyes de De Morgan y la probabilidad del suceso contrario, se tiene que $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)$.

Se calcula la probabilidad del suceso unión: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}8+0{,}3-0{,}15=0{,}95$.

Así, se tiene que $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0{,}95=0{,}05$.

b) El suceso "estudia uno solo de los idiomas", se puede escribir como la unión de dos sucesos incompatibles, $\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$, cuya probabilidad se calcula como sigue:

$$P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=0{,}8-0{,}15+0{,}3-0{,}15=0{,}8.$$

EJERCICIO 7

En un dado trucado la probabilidad de obtener número par es el doble que la de obtener impar. Calcula ambas probabilidades.

El espacio muestral correspondiente al lanzamiento de un dado es $E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

Se sabe que $P(\{1,\ 3,\ 5\})=P(1)+P(3)+P(5)=p$ y $P(\{2,\ 4,\ 6\})=P(2)+P(4)+P(6)=2p$.

Como $p+2p=1\Rightarrow p=\frac{1}{3}$. De esta manera, $P(\{1,\ 3,\ 5\})=\frac{1}{3}$ y $P(\{2,\ 4,\ 6\})=\frac{2}{3}$.

EJERCICIO 8

El 80 % de los alumnos de mi colegio estudian inglés, y el 30 %, francés. Además, solo el 15 % combinan ambos idiomas. Calcula el porcentaje de alumnos que:

a) No estudia ninguno de esos idiomas.

b) Estudia solo uno de esos idiomas.

Si se elige un alumno al azar, se consideran los sucesos A = "estudia inglés" y B = "estudia francés". Entonces:

$$P(A)=0{,}8 \qquad P(B)=0{,}3 \qquad P(A\cap B)=0{,}15$$

a) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$. Utilizando una de las leyes de De Morgan y la probabilidad del suceso contrario, se tiene que $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)$.

Se calcula la probabilidad del suceso unión: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}8+0{,}3-0{,}15=0{,}95$.

Así, se tiene que $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0{,}95=0{,}05$.

b) El suceso "estudia uno solo de los idiomas", se puede escribir como la unión de dos sucesos incompatibles, $\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$, cuya probabilidad se calcula como sigue:

$$P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=0{,}8-0{,}15+0{,}3-0{,}15=0{,}8.$$