UNIDAD 7. PROBABILIDAD

1.-EXPERIMENTOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL

Definición 1: Un **experimento** se llama **determinista** si se conoce su resultado de antemano y se llama **aleatorio** si no se conoce el resultado antes de realizarlo aunque se realice en las mismas condiciones.

Ejemplo 1: Veamos algunos ejemplos:

a) Si se deja caer un objeto desde una altura, se puede saber de antemano que caerá al suelo, por ello es determinista.
b) Si se lanza una moneda al aire, no sabemos si saldrá cara o cruz, por eso es un experimento aleatorio.

Como es evidente, durante esta unidad, únicamente abordaremos el estudio de los experimentos aleatorios, ya que no tienen ningún interés matemático los deterministas.

Definición 2: Llamamos **Espacio muestral** al conjunto de todos los resultados posibles que se pueden dar en un experimento aleatorio. Normalmente, lo designaremos con la letra **E**.

EJEMPLOS.-

a) Lanzar una moneda y ver el resultado. $E=\{C,X\}$.

b) Escoger una persona de la clase al azar y ver de qué sexo es. $E=\{H,M\}$.

c) Lanzar un dado y ver el resultado. $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.

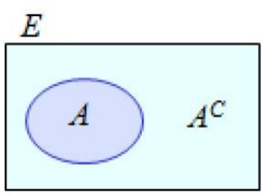
d) Lanzar dos monedas y ver el resultado. $E=\{CC,CX,XC,XX\}$

2.- TIPOS DE SUCESOS

Definición 3: Dado un espacio muestral E, asociado a un experimento aleatorio, llamamos **suceso aleatorio** a cualquier subconjunto del espacio muestral E. En particular, llamamos:

a) **Suceso elemental,** a todo suceso unitario, es decir, formado por un único elemento.
b) **Suceso compuesto,** a todo suceso formado por dos o más sucesos elementales.
c) **Suceso imposible,** al que no sucede nunca. Se designa por el símbolo de conjunto vacío: $\varnothing$.
d) **Suceso seguro,** al que ocurre siempre. Como es evidente, siempre coincide con el espacio muestral y se designa por E.

e) Si A es un suceso cualquiera, el suceso contrario de A, denotado por A^C o $\overline{A}$, es el que se verifica cuando no se cumple A. (Está formado por los sucesos elementales que no son de A; es el subconjunto complementario de A, respecto a E)
Los diagramas de Venn, como el de la derecha, permiten representar los distintos tipos de sucesos. (John Venn: Inglés, 1834–1923).

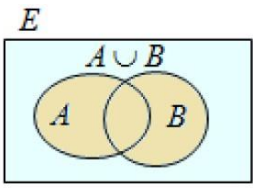


Ejemplos:
a) Los sucesos elementales asociados al lanzamiento de un dado corriente son $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ y $\{6\}$.
Un suceso compuesto puede ser "obtener un número par": $P = \{2, 4, 6\}$. El suceso P se cumple cuando el resultado del lanzamiento del dado es 2, 4 o 6.
El suceso contario de "obtener un número par" es "obtener número impar"

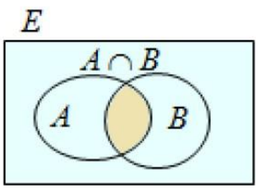
b) En el caso de los días del año, son sucesos compuestos: "nacer un martes"; o "nacer en enero".
El suceso contario de "nacer en martes" es "nacer cualquier otro día de la semana".
Un suceso imposible sería nacer un 30 de febrero.

3.- OPERACIONES CON SUCESOS

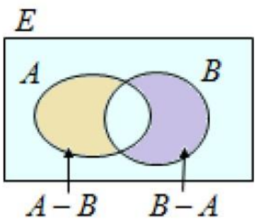
Los sucesos pueden operarse obteniéndose otros nuevos.



- Unión de A y B, $A\cup B$, es un suceso que se verifica cuando lo hace A o B, o ambos.
En notación conjuntista:
$$A\cup B=\{x\in E \mid x\in A \text{ o } x\in B\}.$$



- Intersección de A y B, $A\cap B$, es el suceso que se verifica cuando lo hacen A y B a la vez. Está formado por los elementos comunes a A y a B.
En notación conjuntista:
$$A\cap B=\{x\in E \mid x\in A \text{ y } x\in B\}.$$
Cuando $A\cap B=\varnothing$, los sucesos A y B se dicen incompatibles.
(Un suceso y su contrario son incompatibles).



- Diferencia de A y B, $A-B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A pero no B. Está formado por los elementos de A que no son de B.
En notación conjuntista:
$$A-B=\{x\in E \mid x\in A \text{ y } x\notin B\}.$$
Análogamente,
$$B-A=\{x\in E \mid x\in B \text{ y } x\notin A\}.$$

En las figuras adjuntas se representa el resultado de estas operaciones mediante diagramas de Venn. Puede observarse que:
$$A-B=A-(A\cap B)=\overline{B}\cap A \text{ y } B-A=B-(A\cap B)=\overline{A}\cap B\ .$$

4.- PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON SUCESOS

En lo que sigue, A, B y C designan sucesos de un espacio muestral E.
En todos los casos se cumplen las siguientes propiedades:

Conmutativas: $A\cup B = B\cup A$; $\quad A\cap B = B\cap A$

Asociativas: $A\cup B\cup C = (A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

$A\cap B\cap C = (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

Distributivas: $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$; $\quad A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

Complementarias: $A\cup A^C = E$; $\quad A\cap A^C = \varnothing$

Diferencia: $A-B = A - A\cap B$; $\quad (A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A) = A\cup B$

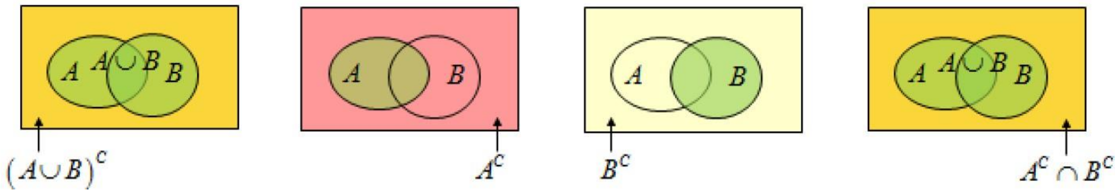
Para comprobarlo basta observar con atención las figuras anteriores.

Leyes de Morgan:

$(A\cup B)^C = A^C\cap B^C \rightarrow$ el contrario de la unión es la intersección de los contrarios.

$(A\cap B)^C = A^C\cup B^C \rightarrow$ el contrario de la intersección es la unión de los contrarios.

En la siguiente figura se da una explicación gráfica de la primera ley.



A, B, C

a, no ocurre A: $\bar{A}$

b, ocurre A o B: $A\cup B$

c, ocurren A y B: $A\cap B$

d, ocurren A y B, pero no C: $A\cap B\cap\bar{C}$

e, ocurre al menos 1: $A\cup B\cup C$

f, ocurren al menos 2: $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

g, no ocurre ninguno: $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

h, ocurre solo 1: $(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)$

i, si ocurre A, ocurre B: $A\subset B$

5.- PROBABILIDAD. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

A lo largo de la historia la teoría de la Probabilidad se ha ido desarrollando y formalizando cada vez más. Por ello, el concepto de probabilidad admite más de una definición válida. En esta unidad veremos las dos más populares que son la frecuencial y la axiomática (Kolvogorov).

La probabilidad** es una medida de la posibilidad de que se cumpla un suceso aleatorio determinado. A cada suceso, le asignamos un número , comprendido entre 0 y 1 , y ese número es la **probabilidad de dicho suceso.

5.1. DEFINICION FRECUENTISTA o frecuencial DE LA PROBABILIDAD

$\rightarrow$ La frecuencia relativa de un suceso es el cociente entre el número de veces que se ha cumplido el suceso y el número total de veces que se ha realizado el experimento.

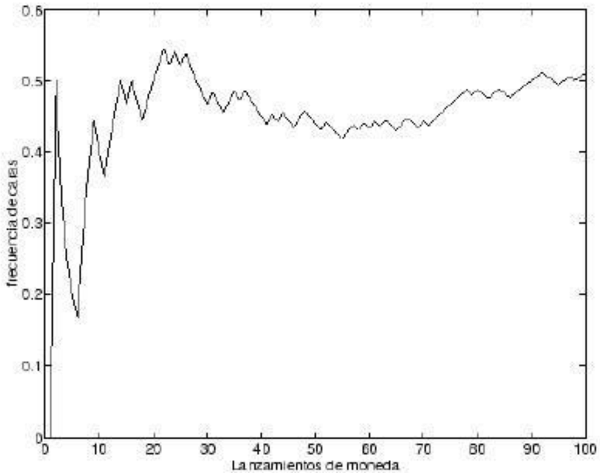
Ley de los grandes números

Jakob Bernoulli, en 1689, definió *probabilidad* utilizando la ley de los grandes números, que dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse cuando el número de pruebas tiende a infinito.

A ese número al que tienden las frecuencias relativas lo llamó probabilidad.

Puedes comprender que esta definición tiene graves inconvenientes. No sabemos cuántas pruebas debemos realizar. Hay que hacer *muchas* y en las mismas condiciones. Se obtiene un valor aproximado de la probabilidad.

Figura 4.3: Convergencia a 1/2 de la frecuencia relativa del número de caras obtenido en lanzamientos sucesivos de una moneda (simulación en ordenador).



Es evidente, por su propia definición que la probabilidad de un suceso cumple:

a) Que es siempre un número positivo, ya que es el límite del cociente de dos cantidades positivas.
b) Es un número que es siempre menor que 1, ya que es el límite de una expresión fraccionaria cuyo numerador es menor que el denominador y, por tanto, menor que 1 siempre.
c) También es evidente que la probabilidad del suceso imposible es 0 (ya que todos los numeradores serían 0) y que la del suceso seguro es 1 (ya que el numerador siempre sería n)

Estas propiedades, entre otras, dieron lugar a que el matemático ruso ***Kolmogorov****, elaborase la otra definición de probabilidad que veremos, llamada axiomática, mucho más precisa y rigurosa desde el punto de vista matemático, aunque bastante menos intuitiva desde el punto de vista práctico.*

5.2. DEFINICION AXIOMÁTICA DE LA PROBABILIDAD (kolmogorov 1930)

La probabilidad puede definirse afirmando que es una función P que asigna a cada suceso de un experimento aleatorio un número real, debiendo cumplir los siguientes axiomas:

1. Para cualquier suceso A se cumple que: $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. La probabilidad del suceso seguro E es 1: $P(E) = 1$.
3. Si A y B son sucesos incompatibles, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

5.3. PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

$\rightarrow$ De estos axiomas se extraen algunas consecuencias (propiedades) de interés:

- **Probabilidad del suceso contrario**

Conociendo la probabilidad de un suceso A puede hallarse la de su contrario A^C, pues, como

$$A \cup A^C = E \Rightarrow P\left(A \cup A^C\right) = P(E) = 1 \Rightarrow P(A) + P\left(A^C\right) = 1 \Rightarrow P\left(A^C\right) = 1 - P(A).$$

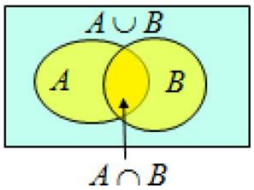
Por tanto, la probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\emptyset) = 0$.

- **Probabilidad de la unión de sucesos**

Para dos sucesos cualesquiera, A y B se tiene que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(Se resta $P(A \cap B)$ para evitar contar dos veces el suceso $A \cap B$, que se da tanto en A como en B).



Generalizando:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$\rightarrow$ Si los sucesos son incompatibles:

$$P(A \cap B) = 0 \text{ y } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

$\rightarrow$ Para n sucesos incompatibles dos a dos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

- **Probabilidad de la diferencia de sucesos**

Para dos sucesos cualesquiera, A y B se tiene que: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

$\rightarrow$ Es una consecuencia de que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, y como $A - B$ y $A \cap B$ son incompatibles, entonces $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$.

5.4. INTERPRETACIÓN CLÁSICA DE LA PROBABILIDAD : REGLA DE LAPLACE

Cuando los sucesos elementales del experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad del suceso A se calcula aplicando la regla de Laplace, que dice:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número total de casos posibles}}.$$

Es sencillo comprobar que esta definición, cumple los axiomas de la definición de Kolmogorov. Es por tanto, una probabilidad. Bajo la hipótesis de equiprobabilidad, el cálculo de probabilidades se reduce a la tarea de contar . Con este propósito surge la Combinatoria , proporcionándonos técnicas para el recuento

NOTA: Es de vital importancia tener en cuenta que la regla de Laplace únicamente es válida si los sucesos del espacio muestral son equiprobables, ya que si se aplica en casos en que no lo sea, el resultado es erróneo. Veamos un ejemplo de esto.

a) Si consideremos el experimento de lanzar un dado y ver el resultado, es evidente que el espacio muestral es $E=\{1,2,3,4,5,6\}$. Es evidente que los seis sucesos elementales son equiprobables. Así pues, se puede aplicar la regla de Laplace sin problema, por lo que podemos calcular algunas probabilidades de forma sencilla:

- Si A: "Obtener un 4", entonces $P(A)=\frac{1}{4}$, ya que $A=\{4\}$
- Si B: "Obtener par", entonces $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, ya que $B=\{2,4,6\}$

b) Sin embargo, si consideramos el experimento de lanzar dos dados y sumar el resultado y describimos el espacio muestral de la forma: $E=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, **no se puede aplicar la regla de Laplace** directamente ya que los sucesos elementales, no son equiprobables. Por ejemplo:

- Si A: "Obtener un 3" y los consideráramos equiprobables, obtendríamos que $P(A)=\frac{1}{11}$, cuando en realidad sería $P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$. Este error se debe a que no se pueden contabilizar los sucesos descritos en E de la misma forma al no ser equiprobables. Para evitar estos errores, lo que se suele hacer es desglosar todos los casos en sucesos elementales que sí sean equiprobables. En este ejemplo, la forma sería describir todas las posibilidades de resultados de los dos dados y contabilizar luego los que suman 3. Por ello, para calcular probabilidades, consideramos como alternativa el espacio muestral desglosado de la forma: $E=\{(1,1),(1,2),...(1,6),(2,1),(2,2)...(2,6),.......(6,1),(6,2)...(6,6)\}$. En este, ya se ve claramente que hay 2 sucesos favorables a sacar 3 como suma y no 1.

6.- PROBABILIDAD CONDICIONADA.

Hasta ahora nos hemos limitado a calcular probabilidades únicamente partiendo de un experimento aleatorio, sin tener más información. Pero, ¿qué ocurre si conocemos alguna información adicional?.

Supongamos que estamos realizando el experimento aleatorio de lanzar un dado y obtener el número que sale. Consideremos el suceso A= "sale un 4". Evidentemente, $p(A)=\frac{1}{6}$.

Ahora bien, ¿variaría esta probabilidad si al lanzar el dado alguien pasa por allí y nos dice que ha salido un número par?.

Disponemos entonces de una información adicional, B={2,4,6}.

Hemos reducido nuestro espacio muestral, que ahora sólo consta de 3 elementos y tenemos que cambiar las probabilidades asignadas.

Ahora el suceso A no tiene una posibilidad entre 6 de ocurrir, sino una entre tres, es decir, $p(A)=\frac{1}{3}$.

Esta es la idea de la probabilidad condicionada: La información obtenida B, modifica la probabilidad de A. Lo expresaremos así: $p(A/B)=\frac{1}{3}$ y se lee "probabilidad de A condicionada a B" o "probabilidad de A conociendo B".

El caso anterior es muy sencillo, pues directamente podemos calcular $p(A/B)$, pero si el espacio muestral se amplía, el problema es más complicado. La fórmula siguiente simplifica el problema.

Sea A un suceso aleatorio asociado a un experimento aleatorio, y sea B otro suceso que sabemos que se ha realizado.

Llamaremos *probabilidad de A condicionada a B* y lo expresaremos por $p(A/B)$ a la expresión:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

(de idéntico modo se define $p(B/A)$, escribe la fórmula).

De la definición anterior deducimos que si ***A y B son sucesos de un experimento :***

$$P(A \cap B) = P(A / B) \cdot P(B)$$

Generalizando,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)...P(A_n / A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$$

(fórmula de la probabilidad compuesta)

Además usando las definiciones de probabilidad podemos deducir que $P\left(\bar{A}/B\right) = 1 - P\left(A/B\right)$ y

que si A y C son sucesos incompatibles , $P\left((A \cup C)/B\right) = P\left(A/B\right) + P\left(C/B\right)$

7.- DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Si bien el conocer cierta información adicional modifica la probabilidad de algunos sucesos, puede ocurrir que otros mantengan su probabilidad, pese a conocer dicha información.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, consideremos los sucesos: A= "sacar un número par" y B= "sacar un número menor o igual que 2" Es claro que A= {2,4,6} y B= {1,2}.

Calculemos la probabilidad de A conociendo que se ha realizado el suceso B, es decir, $p(A/B)$. Utilizando la fórmula:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0'5$$

puesto que $p(A \cap B)$=p(sacar par y menor o igual que 2)=$\frac{1}{6}$ y p(B)=$\frac{1}{3}$.

Pero si no conociésemos la información B, ¿cuál sería la probabilidad de A?.

p(A)=p(sacar par)=$\frac{3}{6} = 0'5$, es decir que p(A/B)=p(A), y por tanto el conocer la información B no modifica la probabilidad de A.

Nota: Es evidente, a partir de la definición y lo visto anteriormente que dos sucesos son independientes cuando se verifica alguna de las siguientes condiciones (que son equivalentes entre ellas):

a) $P(A/B)=P(A)$ b) $P(B/A)=P(A)$ c) $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$

NOTA IMPORTANTE:

No se deben confundir los conceptos de sucesos incompatibles y sucesos independientes. Dos sucesos son incompatibles cuando no tienen elementos en común, es decir, $A\cap B=\varnothing$, o con diagramas de Venn:

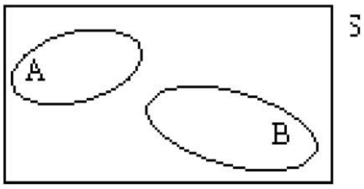


Figura 2.9: A y B incompatibles, sin elementos en común.

Dos sucesos son independientes si $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$. Son conceptos totalmente distintos. Uno se refiere a CONJUNTOS y otro se refiere a PROBABILIDADES.

- ***Si A y B son independientes, también lo son***
  - ***A y B^c***
  - ***A^c y B***
  - ***A^c y B^c***
- ***Si A y B son incompatibles, entonces A y B son dependientes***

EJEMPLO

$A, B \subset \Omega$

$P(A)=1/4$; $P(B)=2/5$; $P(A\cap B)=3/20$

a) ¿$A\cup B=\Omega$?

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{3}{20}=\frac{1}{2}\neq 1 \Longrightarrow A\cup B\neq\Omega$

b) ¿incompatibles?

$P(A\cap B)=\frac{3}{2}\neq\varnothing \longrightarrow$ NO SON INCOMPATIBLES

c) ¿independientes?

$P(A\cap B)=\frac{3}{20}\neq P(A).P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{20} \Longrightarrow$ NO SON INDEPENDIENTES

d)

$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{3}{20}=0{,}1$

$P(A\cup\bar{B})=P(\bar{B})+P(A\cap B)=1-P(B)+P(A\cap B)=1-\frac{2}{5}+\frac{3}{20}=\frac{3}{4}=0{,}75$

$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-2\cdot\frac{3}{20}=\frac{7}{20}=0{,}35$

$P(\bar{A}\Delta B)=P(\bar{A})+P(B)-2P(\bar{A}\cap B)=(1-P(A))+P(B)-2(P(B)-P(A\cap B))=\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-2\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{20}\right)=0{,}65$

8.-TABLAS DE CONTINGENCIA (tablas de probabilidad)

*Una **tabla de contingencia** es una tabla de doble entrada en la que podemos reflejar la distribución de una variable en relación a otras. Es una herramienta muy útil porque nos ayuda a organizar la información y nos facilita el cálculo de probabilidades de sucesos. Están referidas a 2 características que presentan cada una dos o más sucesos .**La tabla se puede rellenar con datos absolutos o probabilidades.***

Ejemplo

- Se han estudiado 500 enfermos del hígado analizando por un procedimiento nuevo si las lesiones son benignas o malignas. Luego se les volvió a analizar por el procedimiento usual determinando qué diagnósticos habían sido correctos y cuáles incorrectos. Los valores obtenidos se representan en la tabla:

	Diagnóstico correcto	**Diagnóstico incorrecto**	**Totales**
Lesión maligna	206	12	218
Lesión benigna	268	14	282
Totales	474	26	500

	Diagnóstico correcto (C)	**Diagnóstico incorrecto (I)**	**Totales**
Lesión maligna (M)	0'412	0'024	0'436
Lesión benigna (B)	0'536	0'028	0'564
Totales	0'948	0'052	1

En general se denomina **tabla de contingencias** a:

	A	No A = $\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
No B = $\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

En una tabla de contingencia figuran todas las probabilidades o contingencias de los sucesos compuestos.

Observa que:

Como sabemos por la probabilidad del suceso contrario:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ y } P(B) + P(\overline{B}) = 1.$$

Observa también que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}), \text{ del mismo modo que } P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

pues se obtienen sumando respectivamente la primera columna y la primera fila.

También:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \text{ y } P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Ejemplo: En un taller se sabe que acuden, por la mañana 3 automóviles con problemas de eléctricos, 8 con problemas mecánicos y 3 con problemas de chapa. Por la tarde hay 2 con problemas eléctricos, 3 con problemas mecánicos y 1 con problemas de chapa.

a) Calcular el porcentaje de los que acuden por la tarde.

b) Calcular el porcentaje de los que acuden con problemas mecánicos

c) Calcular la probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana.

Resumiendo los datos en una tabla de contingencia:

	Pr. eléctricos	Pr. Mecánicos	Pr. de chapa	Total
Mañana	3	8	3	14
Tarde	2	3	1	6
Total	5	11	4	20

a) En total acuden 20 y por la tarde acuden 6, luego:

p(acudir por la tarde)$=\frac{6}{20}=0'3$, es decir, el 30 %.

b) En total acuden 20 y con problemas mecánicos hay 11, luego:

p(problemas mecánicos)$=\frac{11}{20}=0'55$, es decir, el 55 %.

c) Aquí tenemos una información adicional (es un coche que tiene problemas eléctricos), luego se trata de una probabilidad condicionada.Con problemas eléctricos hay 5 y de ellos 3 por la mañana, luego:

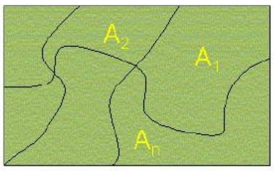
p(acudir por la mañana/problemas eléctricos)$=\frac{3}{5}=0'6$, es decir, el 60 %.

9.- PROBABILIDADES TOTALES Y TEOREMA DE BAYES (EXPERIMENTOS COMPUESTOS)

*Un **experimento compuesto** es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples . Es decir, si tiramos un dado es un experimento simple , pero si tiramos una moneda y un dado , estamos realizando un experimento compuesto.*

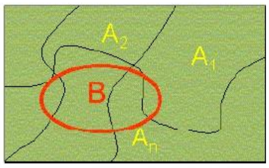
Existen dos resultados que nos permiten calcular probabilidades de experimentos compuestos:

9.1 .-TEOREMA DE PROBABILIDADES TOTALES



Definición : Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Se dice que un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, ...A_n\}$ forman un **sistema completo de sucesos** si cumple las dos condiciones siguientes:

a) $A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n = E$ b) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ (incompatibles dos a dos)



Proposición (Teorema de la probabilidad total). Sea $\{A_1, A_2, ...A_n\}$ un sistema completo de sucesos asociados a un experimento aleatorio de espacio muestral E. Entonces, para cualquier suceso B se cumple la siguiente igualdad:

$$\boxed{P(B) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2) + ... + P(B/A_n)\cdot P(A_n)}$$

(Se puede pensar en B como un suceso que puede ocurrir de diferentes maneras A_1, A_2, ... A_n)

9.2 .-TEOREMA DE BAYES

En muchas ocasiones, nos encontramos con situaciones en los que hemos de determinar probabilidades de sucesos que condicionan a otros de los que conocemos la probabilidad.

*Básicamente, desconocemos probabilidades de sucesos que, en la mayoría de los casos han ocurrido antes conociendo lo que ha ocurrido después, es decir, nos preguntan probabilidades "del pasado" conociendo las que ocurren en un experimento posterior, por eso se llaman **probabilidades a posteriori**. Aunque no es siempre exactamente así, estas orienta es nos pueden ayudar a identificar estas situaciones que se resuelven haciendo uso de la siguiente fórmula:*

Proposición (**Teorema de Bayes)** Sea $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ un sistema completo de sucesos asociados a un experimento aleatorio de espacio muestral E. Entonces, para cualquier suceso B con probabilidad no nula, se cumple la siguiente igualdad:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)\cdot P(A_n)}$$

P (A_i) se denominan probabilidades a priori

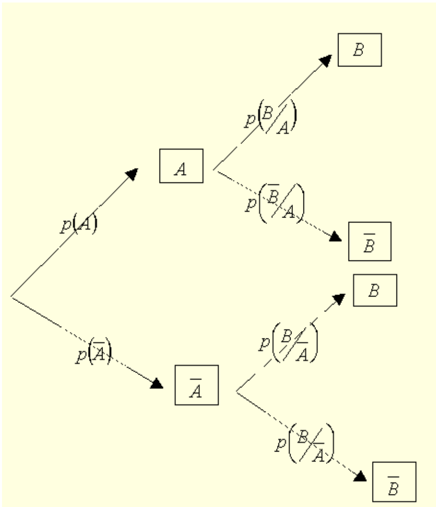
P (A_i / B) se denominan probabilidades a posteriori

P (A_i) se denominan verosimilitudes

(Se puede pensar en B como un efecto de diferentes causas $\{A_i\}_{i=1}^{n}$. Por ejemplo una enfermedad provocada por diferentes virus. Si conocemos la probabilidad de que el virus i provoque la enfermedad ($P(B/A_i)$) para cada $i = 1, \ldots, n$, nos puede interesar saber la probabilidad de que si una persona presenta la enfermedad, que ésta haya sido provocada por el virus j ($P(A_j/B)$)).

10.- DIAGRAMAS DE ÁRBOL

*⇒ La forma más sencilla de calcular probabilidades en experimentos compuestos es un DIAGRAMA EN ÁRBOL. Para la construcción de un **diagrama en árbol** se partirá poniendo una **rama** para cada una de las **posibilidades** , acompañada de su **probabilidad**.*

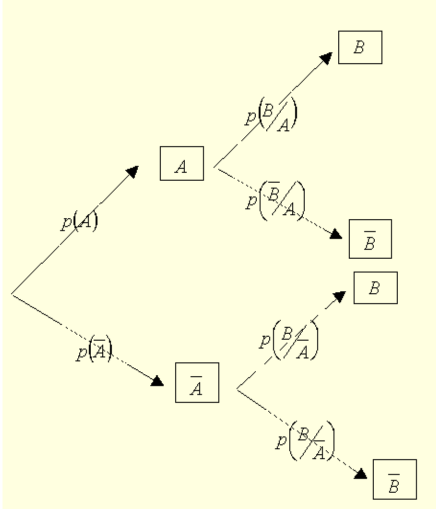


*En el **final** de cada **rama parcial** se constituye a su vez, un **nudo** c cual parten nuevas **ramas**, según las **posibilidades** del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (**nudo final**). Las probabilidades que hay que asignar a las nuevas ramas son las **condicionadas** (ya que dependenden de los resultados anteriores) .*

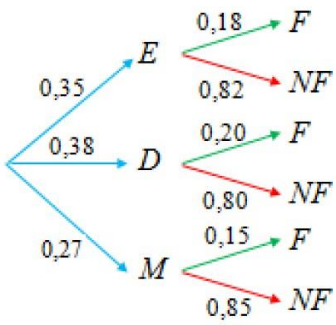
*Hay que tener en cuenta: que la **suma de probabilidades** de las **ramas** de cada **nudo** ha de dar **1**.*

NOTA: *Siempre que podamos construír una tabla de contingencia podemos construír un diagrama de árbol y viceversa.*

	A	$\overline{A}$
B	$A \cap B$	$\overline{A} \cap B$
$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$



Ejemplo:
Los alumnos de una universidad que cursan los grados de Economía, Derecho y Matemáticas se distribuyen como sigue: el 35% cursa Economía; el 38%, Derecho; el 27% restante estudia Matemáticas. Si cada curso finalizan sus estudios de grado un 18% de los estudiantes de Economía, un 20% de los de Derecho y un 15% de los de Matemáticas, ¿qué probabilidad existe de que un estudiante elegido al azar finalice ese curso sus estudios?



→ Se puede construir el diagrama adjunto, siendo E, D y M los sucesos ser estudiante de Economía, Derecho y Matemáticas, respectivamente; F y NF son los sucesos finalizar o no ese curso. Con esto, la probabilidad de que un estudiante elegido al azar finalice sus estudios, $P(F)$, es:

$$P(F) = P(E)P(F/E) + P(D)P(F/D) + P(M)P(F/M).$$

Esto es:

$$P(F) = 0,35 \cdot 0,18 + 0,38 \cdot 0,20 + 0,27 \cdot 0,15 = 0,1795.$$

El teorema de Bayes permite el cálculo de probabilidades a posteriori, pues se obtienen después de contar con una información adicional. Por ejemplo, conocido que se ha producido el suceso B, ¿cuál es la probabilidad de que se haya realizado el suceso A_i? Eso es, ¿cuánto vale $P(A_i/B)$?

Por la probabilidad condicionada se sabe que:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}.$$

Ejemplo:
Siguiendo con el ejemplo anterior puede preguntarse: sabiendo que un alumno elegido al azar ha terminado sus estudios, ¿cuál es la probabilidad de que haya cursado el grado de Economía?

Por tanto, se sabe que se ha cumplido F; y se desea conocer la probabilidad $P(E/F)$.

Se tendrá:

$$P(E/F) = \frac{P(E)P(F/E)}{P(F)} = \frac{0,35 \cdot 0,18}{0,1795} = \frac{630}{1795} \approx 0,351.$$

Esto es, el 35,1% de los estudiantes que han terminado son de Economía.
Análogamente:

$$P(D/F) = \frac{P(D)P(F/D)}{P(F)} = \frac{0,38 \cdot 0,20}{0,1795} = \frac{760}{1795} \approx 0,423;$$

$$P(M/F) = \frac{P(M)P(F/M)}{P(F)} = \frac{0,27 \cdot 0,15}{0,1795} = \frac{405}{1795} \approx 0,226.$$