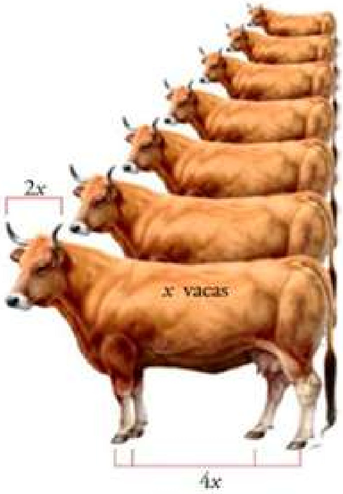
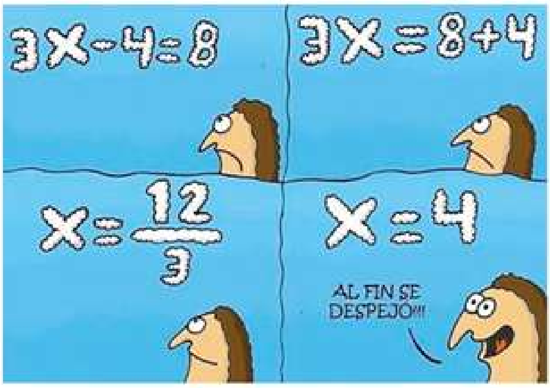
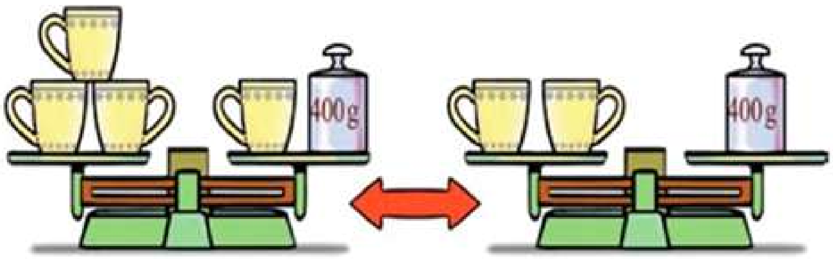
UD 10 (PT.1) - ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA





En el establo, entre cuernos y patas, he contado 28:

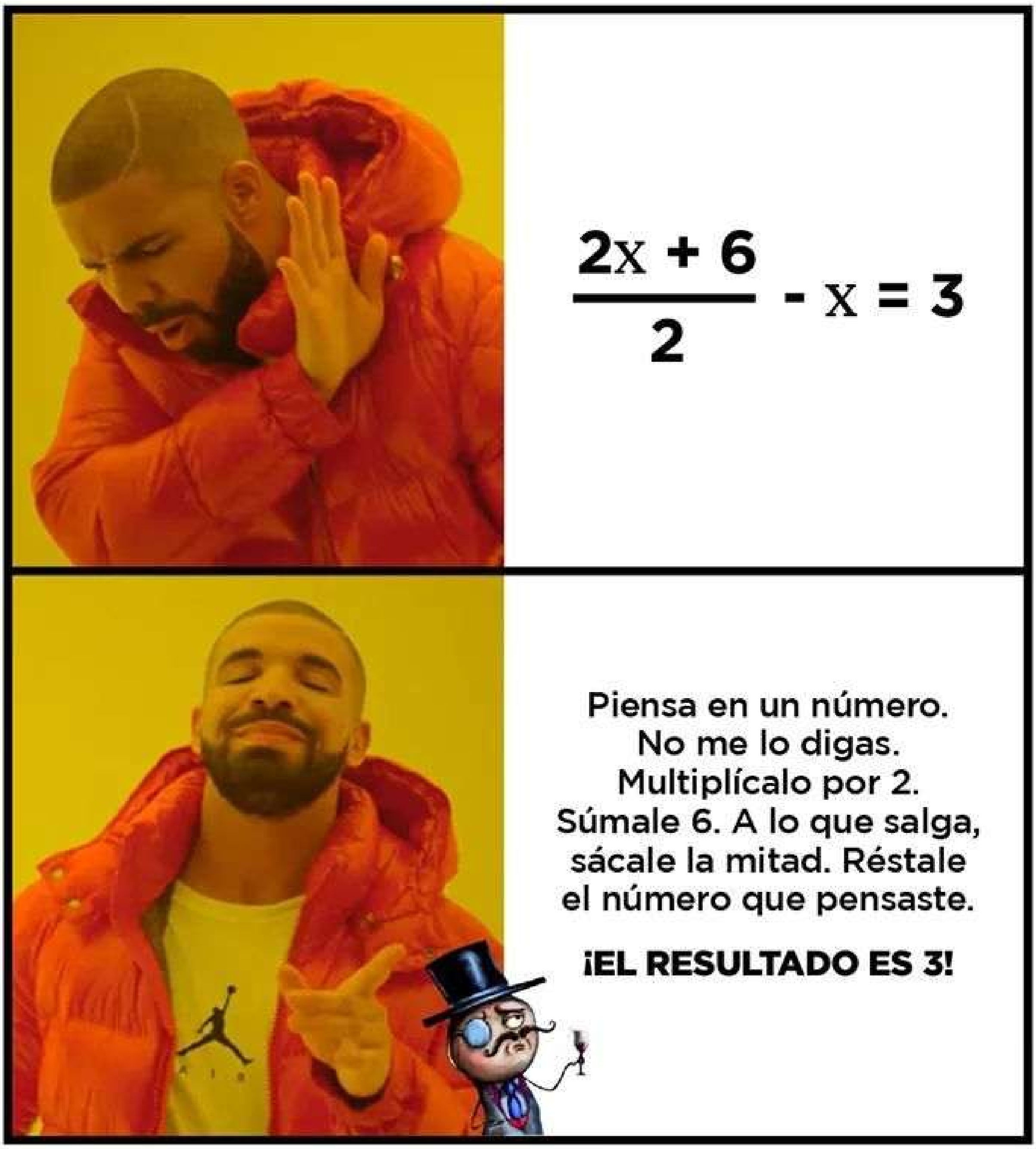
$$\left.\begin{array}{l}\text{Vacas} \to x \\ \text{Cuernos} \to 2x \\ \text{Patas} \to 4x\end{array}\right\} \to \text{Ecuación} \to 2x + 4x = 28$$



$3x = x + 400$ $\quad$ $2x = 400$

$$3x - 2 = 16$$
$$3x = 16 + 2$$
$$3x = 18$$
$$x = \frac{18}{3}$$
$$x = 6$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}}$$


$\frac{2x + 6}{2} - x = 3$
Piensa en un número. No me lo digas. Multiplícalo por 2. Súmale 6. A lo que salga, sácale la mitad. Réstale el número que pensaste.
¡EL RESULTADO ES 3!

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA:

Cuando dos expresiones, numéricas o algebraicas, están unidas por un signo igual forman una **igualdad**. Las igualdades pueden ser ciertas o falsas. Por ejemplo:

- **4 + 5 = 6 + 3.** Es una igualdad porque hay dos expresiones numéricas unidas por el signo de igual. Es **CIERTA** porque el resultado de la operación es **9** en ambos lados de la igualdad.

- En cambio, la igualdad 4 + 1 = 6 – 2 es **FALSA**.

Puede suceder que en una igualdad no conozcamos el valor de alguna de las magnitudes que intervienen. Es lo que denominamos una igualdad algebraica. En ese caso estamos ante una **ECUACIÓN.**

Consideremos el siguiente ejemplo: “Si sumo a mi edad 15 años, obtengo el doble de mi edad.” ¿Cómo expresaríamos este enunciado en forma de igualdad?

$$\mathbf{x + 15 = 2x}$$

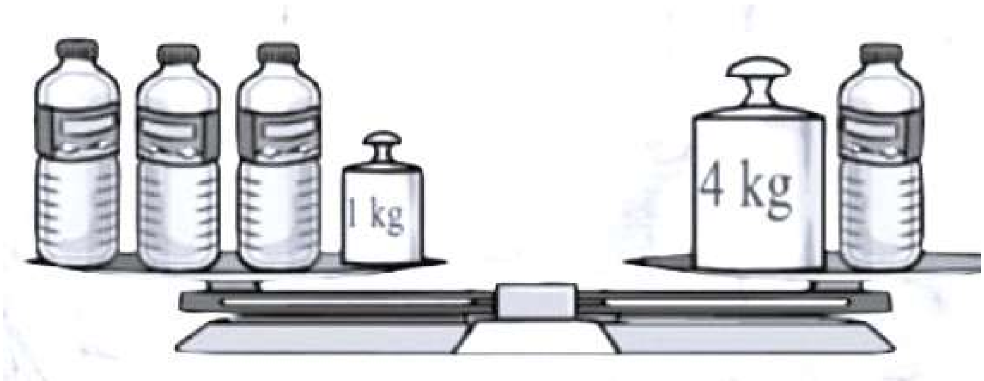
Pues bien, esta **IGUALDAD ALGEBRAICA** es lo que denominamos **ECUACIÓN.** Resolver la ecuación sería obtener el valor de la incógnita (x) que hace que se cumpla dicha igualdad.

Si sustituimos la “x” por cualquier valor numérico, veremos que sólo será cierta para el caso de **x = 15.** Comprobémoslo cambiando la “x” por 15. Hemos resuelto la ecuación **POR TANTEO.**

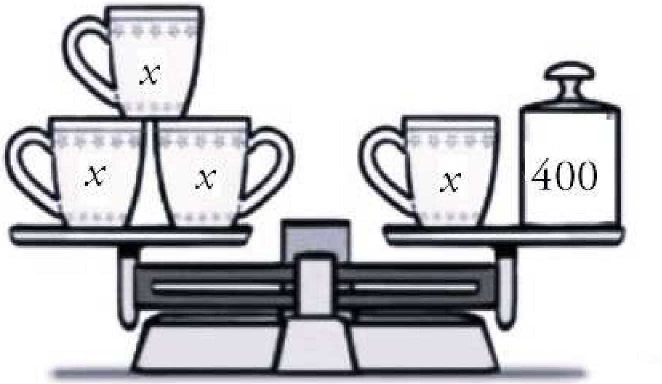
$$\mathbf{15 + 15 = 2 \cdot 15}$$

Practicamos:

1. **Desconocemos cuánto pesa una botella y, por tanto, llamamos “x” a ese peso. Escribe una ecuación que sirva para resolver la siguiente situación y resuélvela por TANTEO.**



2. Escribe una ecuación para resolver la siguiente situación y resuélvela por TANTEO.



Elementos de una Ecuación:

En una ecuación distinguimos una serie de elementos:

$$\overbrace{4x - 5}^{\text{PRIMER MIEMBRO}} = \overbrace{2x + 1}^{\text{SEGUNDO MIEMBRO}}$$

TÉRMINOS

- **Incógnitas:** son las letras que aparecen en los términos.

- **Soluciones:** son los valores que han de tomar las letras para que se cumpla la igualdad.

$$4x - 5 = 2x + 1$$

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

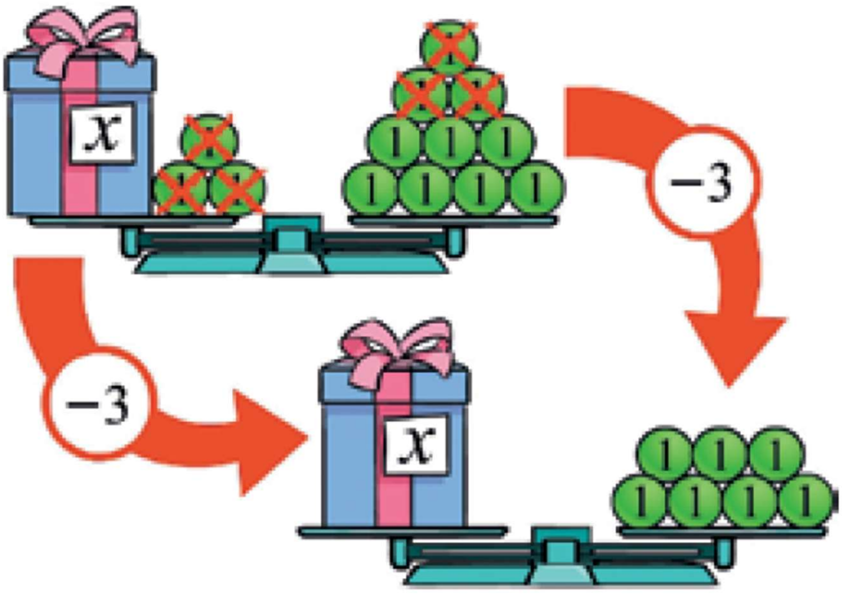
SOLUCIÓN: $x = 3$, ya que $4 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot 3 + 1$

¿Cómo se resuelve una ecuación?

Debemos seguir una serie de “reglas” que se resumen en que si realizamos la misma operación matemática en ambos miembros de la ecuación obtendremos una ecuación equivalente a la anterior y, por tanto, tendrá el mismo resultado.

- ✓ **Regla de la suma**: Si a los dos miembros de una ecuación le sumamos o restamos una misma expresión obtenemos una ecuación equivalente.

EXAMPLE **x + 3 = 10** → Restando 3 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente:



$$x + 3 = 10$$
$$\downarrow$$
$$x + \cancel{3} - \cancel{3} = 10 - 3$$
$$\downarrow$$
$$x = 7$$

La solución es $x = 7$

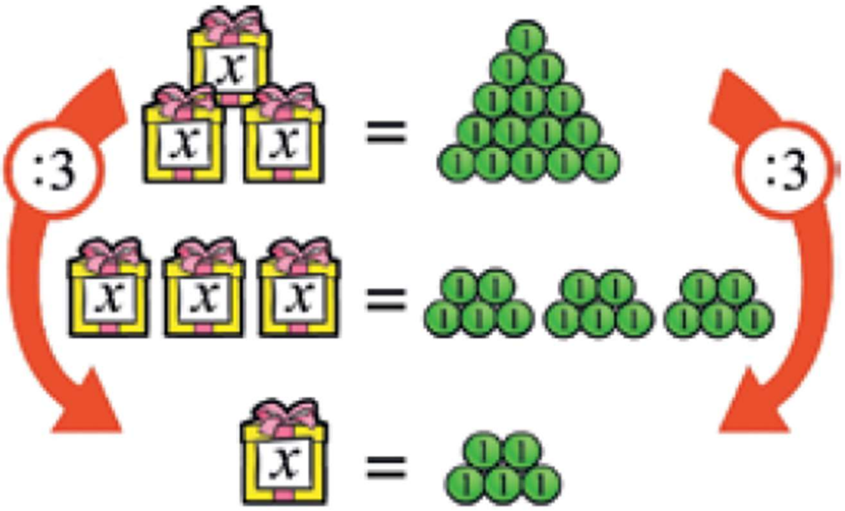
EXAMPLE Si a la ecuación **2x - 1 = 3** le sumamos **+1** ambos miembros y simplificamos la expresión, es decir, hacemos las operaciones:

$$2x - 1 + 1 = 3 + 1$$

$$2x = 4$$

✓ **Regla del producto:** Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero obtenemos una ecuación equivalente a la anterior.

3x = 1 → Dividiendo por 3 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente:



$$3x = 15$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3}$$
$$\downarrow$$
$$x = 5$$

La solución es $x = 5$

Si en **2x = 4** dividimos ambos miembros entre 2 y simplificamos conseguiremos **“despejar la x”:**

$$2x = 4$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

$x = 2$ (es la solución de la ecuación)

EXAMPLE

Vamos a resolver la ecuación: $7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$

$$7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$$

REDUCIR $\longrightarrow$

$$5x + 4 = 10 + 3x$$

TRANSPONER $\longrightarrow$
(Restamos $3x$ en ambos miembros).

$$5x + 4 - 3x = 10$$

REDUCIR $\longrightarrow$

$$2x + 4 = 10$$

TRANSPONER $\longrightarrow$
(Restamos 4 en ambos miembros).

$$2x = 10 - 4$$

REDUCIR $\longrightarrow$

$$2x = 6$$

TRANSPONER $\longrightarrow$
(Dividimos a ambos miembros por 2).

$$x = \frac{6}{2}$$

REDUCIR $\longrightarrow$

$$x = 3$$

Comprobación: Sustituimos x por 3 en la ecuación primitiva y comprobamos que la igualdad se cumple.

$$\boxed{x = 3}$$

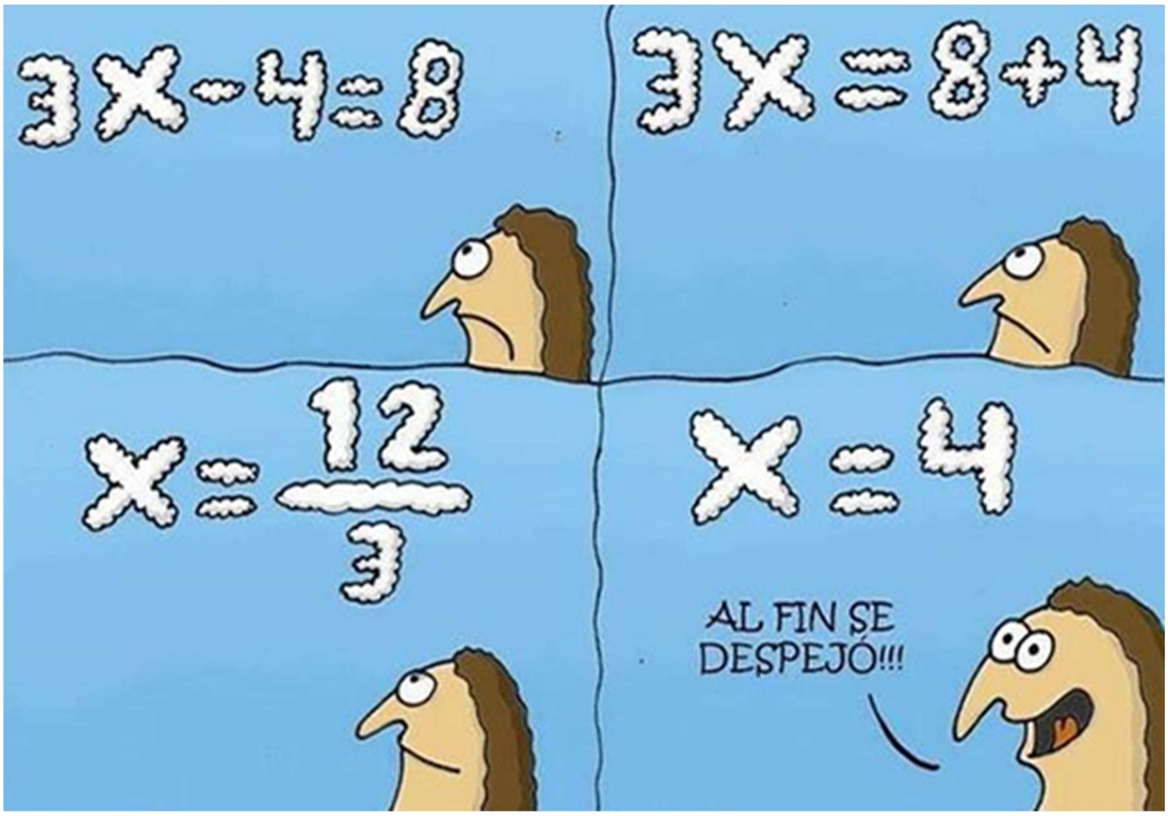
$$\downarrow$$

$$7x - 2x + 4 \;\rightarrow\; 7 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 4 = 21 - 6 + 4 = 19$$

$$8 + 3x + 2 \;\rightarrow\; 8 + 3 \cdot 3 + 2 = 8 + 9 + 2 = 19$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{7 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 4}_{19} = \underbrace{8 + 3 \cdot 3 + 2}_{19}$$



TIPOS DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO:

I. Una única solución.

EXAMPLE

$$2x + 1 = 5$$
$$2x = 5 - 1$$
$$2x = 4$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

Tiene una solución: El único valor de la incógnita (la "x") que hace que se cumpla la igualdad es $x = 2$.

$$2 \cdot 2 + 1 = 5$$

II. Ninguna solución.

EXAMPLE

$$2x + 1 = 2x + 4$$
$$2x - 2x = 4 - 1$$
$$0x = 3$$
$$0 \neq 3$$
$$x \in \emptyset$$

No tiene solución: No hay ningún número que al multiplicarlo por cero de tres.

El <u>conjunto vacío</u> se representa con el símbolo ∅ (la letra griega phi). Este símbolo indica que el conjunto no contiene ningún elemento. En una ecuación significa que no hay ningún valor de "x" que cumpla las condiciones de la ecuación y, por tanto, NO TIENE SOLUCIÓN.

III. Infinitas soluciones.

EXAMPLE

$$2x + 2 = 2 + 2x$$
$$2x - 2x = 2 - 2$$
$$0x = 0$$
$$0 = 0$$
$$x \in \mathbb{R}$$

Cualquier número multiplicado por cero resulta cero. Todos los números son solución de la ecuación. Es una **IDENTIDAD**.

<u>Identidades y ecuaciones:</u>

- ✓ Una **identidad** es una igualdad algebraica que se verifica para cualquier valor de la variable o variables.

  <u>Ejemplos:</u>

  $\mathbf{9x - 4x = 5x}$ → es una identidad → se verifica para todo valor que tome x.

  $\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$ → es una identidad → se verifica para cualquier valor que tomen a y b. De hecho, es una **identidad notable** como vimos en la unidad anterior.

- ✓ Una **ecuación** es una igualdad algebraica que se verifica sólo para determinados valores de la incógnita o incógnitas que aparecen en ella.

  <u>Ejemplo:</u>

  $x + 3 = 6$ → es una ecuación porque se verifica sólo para $x = 3$.

La solución de una ecuación es el valor (o valores) de la incógnita que hacen que se cumpla la igualdad algebraica. Para comprobar si un valor de la solución de una ecuación hay que sustituir en la ecuación por dicho valor y ver si se verifica la igualdad. Lo entenderemos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Señala cual es la solución de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{2x + 5 = x + 10} \quad \begin{cases} \boldsymbol{a)\ x = 5} \\ \boldsymbol{b)\ x = -5} \\ \boldsymbol{c)\ x = 0} \end{cases}$$

a) x = 5	b) x = -5	c) x = 0
2 ·(5) + 5 = 5 +10	2 ·(-5) + 5 = -5 +10	2 ·(0) + 5 = 0 +10
15 = 15	-5 ≠ 5	5 ≠ 10
5 es solución	-5 no es solución	0 no es solución
(se verifica la igualdad)	(no se verifica)	(no se verifica)

Como consecuencia de esto si queremos comprobar si hemos resuelto correctamente una ecuación no tenemos más que sustituir el valor que hemos obtenido en la ecuación y ver si se cumple la igualdad.

Practicamos:

1. **De las siguientes expresiones, identifica las que sean ecuaciones o identidades.**

a) $2x - 5 = x - 1$

b) $\frac{2x+8}{2} = x+4$

c) $3x = \frac{x}{2} + 5$

e) $(x+2)^2 = x^2 + 2^2$

f) $(x-2)(x+2) = x^2 - 2^2$

g) $-3(x-5) = -3x+5$

3. Escribe una ecuación que tenga tres términos en su primer miembro y dos en el segundo, que tenga una sola incógnita de primer grado y que su solución sea 4.

4. Indica la respuesta correcta. Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por (-2):

a) La solución es la misma que la de la ecuación inicial.

b) La solución es la opuesta que la de la ecuación inicial.

c) La solución es el doble que la de la ecuación inicial.

d) La solución es la mitad que la de la ecuación inicial.

5. Comprueba si x = 3 es solución de alguna de las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 5 = x + 7$

b) $x - 4 + 2x = x + 2$

c) $2(x + 1) = 3x - 1$

d) $3(x - 5) + x = 9 - x$

e) $2x - 1 = \frac{x}{3}$

f) $3x^2 + x + 4 = 0$

g) $x^2 + x - 6 = 0$

h) $x^2 - 5x = 0$

Fíjate en las tres últimas expresiones del ejercicio anterior: son **Ecuaciones de 2º Grado**. No obstante, para comprobar si un valor de la incógnita es solución de una ecuación de 2º grado harás lo mismo que con una de 1er grado, esto es, sustituir en la ecuación y ver si se verifica la igualdad (realmente haremos esto para cualquier ecuación de cualquier tipo).

6. Comprueba, sin resolver la ecuación, cual es la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $15x + 4 = 7x + 20$	$x = -2$	$x = 2$	$x = 0$
b) $5x + 2 = x - 2$	$x = -2$	$x = -1$	$x = 1$
c) $10 + 2x = 7x - 15$	$x = -5$	$x = 2$	$x = 5$
d) $2 \cdot (3x - 1) = 3 \cdot (4x + 2)$	$x = \frac{4}{3}$	$x = \frac{-4}{3}$	$x = 4$
e) $\frac{x-3}{2} = \frac{x+3}{4}$	$x = 9$	$x = 2$	$x = -9$

7. Comprueba, sin resolver, cual es la solución de las ecuaciones:

f) $15x + 4 = 7x + 20$	$x = -2$	$x = 2$	$x = 0$
g) $5x + 2 = x - 2$	$x = -2$	$x = -1$	$x = 1$
h) $10 + 2x = 7x - 15$	$x = -5$	$x = 2$	$x = 5$
i) $2 \cdot (3x - 1) = 3 \cdot (4x + 2)$	$x = \frac{4}{3}$	$x = \frac{-4}{3}$	$x = 4$

j) $\frac{x-3}{2} = \frac{x+3}{4}$ x = 9 x = 2 x = -9

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x - 15 = 2$

b) $x + 8 = 12$

c) $-3x = 9$

d) $3x = 4 + 2x$

e) $2x + 3 = 16 - 4x$

f) $18 + 2x - 8 = x - 25$

g) $7 - 5x = 13 - 4x - 17$

h) $-2x + 4 + 6x = 7 - x + 15$

i) $11x = 10x - 6$

j) $9x = 8x - 13$

k) $21 - 6x = 27 - 8x$

ECUACIONES CON PARÉNTESIS:

Para resolverlas previamente debemos ***"quitar los paréntesis",*** para ello aplicaremos la **propiedad distributiva**. Veámoslo con un ejemplo:

$$\mathbf{6 \cdot (3 - 2x) + 4 = 3 - (2 + x - 4)}$$

- El 6 delante del primer paréntesis debe multiplicarse por TODO lo que hay dentro de dicho paréntesis.
- El signo menos delante del segundo paréntesis le cambia el signo a todo lo que hay dentro del paréntesis.

$$\mathbf{18x - 12x + 4 = 3 - 2 - x + 4}$$

- Una vez hemos "quitado los paréntesis" ya podemos resolver:

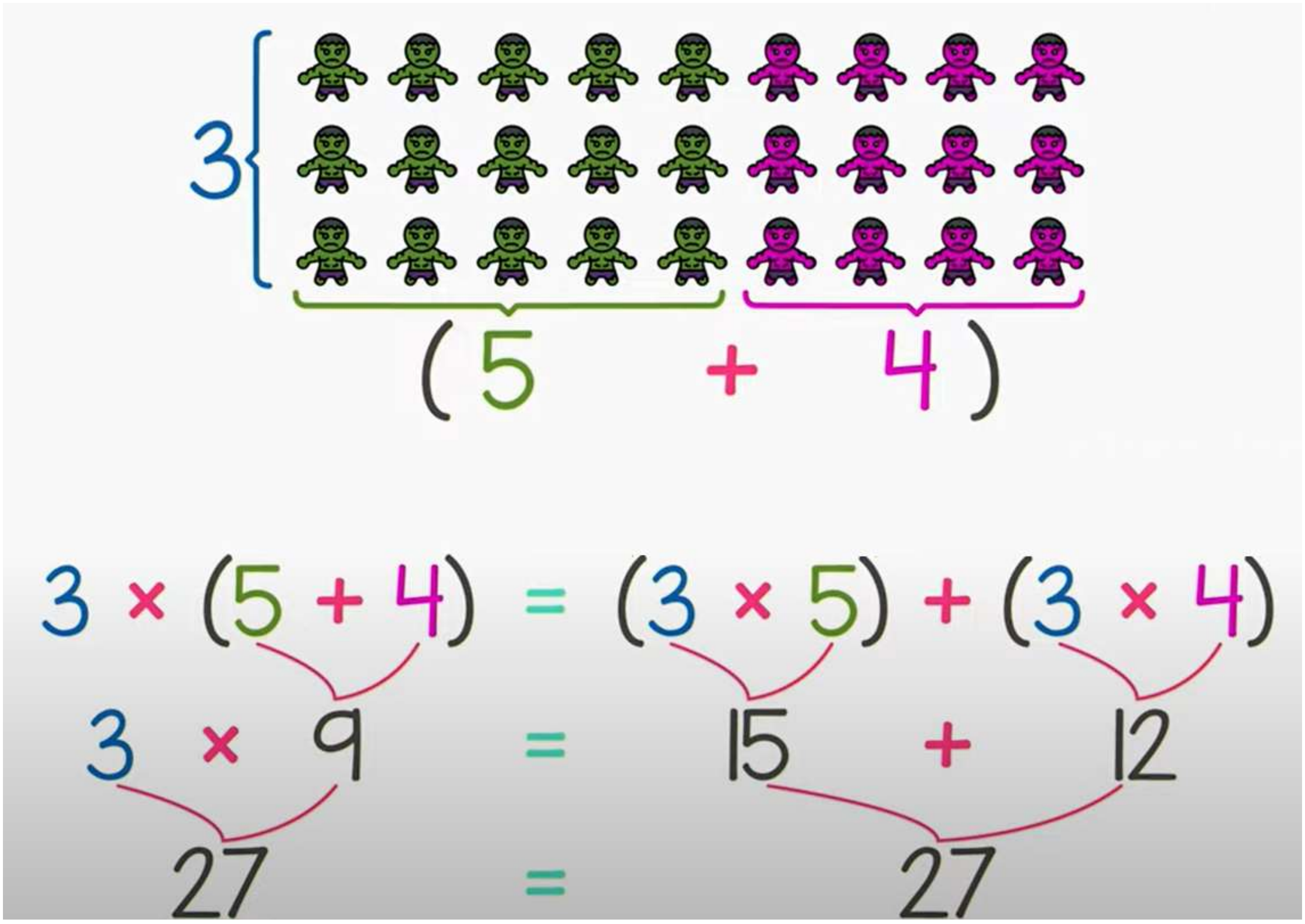
$$18x - 12x + x = 3 - 2 + 4 - 4$$

$$7x = 1$$

$$\frac{\cancel{7}x}{\cancel{7}} = \frac{1}{7}$$

$$x = \frac{1}{7}$$

<u>Propiedad Distributiva:</u> La propiedad distributiva nos ofrece dos formas alternativas de realizar las operaciones.



Practicamos: **Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:**

a) x – (1 – 3x) = 8x – 1
b) x – 7 = 2·(x – 3)
c) 2x – (4 +x) = 2·(x - 5)
d) 12 – (x – 3) = 6
e) 3·(6 + x) = 2·(x – 5)
f) 9·(x – 1) = 6·(x – 3)
g) 8·(x -2) = 12·(x – 3)
h) - (4 - x) = (2 - 5x) - 6
i) 8 - (-2x + 5) = 4x + 1
j) 3·(2 - x) + 4 = 5 - (3x - 10) - x
k) 4·(2x + 3) - 2x = 5·(3x + 2)

ECUACIONES CON DENOMINADORES:

Para resolverlas debemos ***"quitar denominadores",*** es decir, obtener una ecuación equivalente que no tenga denominadores y resolverla como hemos aprendido. Veámoslo con un ejemplo:

$$2 - \frac{x}{3} = \frac{3x}{2} + 4$$

1) En primer lugar, debemos darnos cuenta de que aunque no lo parezca todos los términos de la ecuación tienen denominador:

$$\frac{2}{1} - \frac{x}{3} = \frac{3x}{2} + \frac{4}{1}$$

2) **Reducimos a común denominador.** Para ello calculamos el m.c.m de los denominadores y ese será el denominador común. El m.c.m (2, 3) = 6.

3) Multiplicamos TODA la ecuación por ese número y luego simplificamos las expresiones.

$$6 \cdot \left(\frac{2}{1} - \frac{x}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{3x}{2} + \frac{4}{1}\right)$$

$$\frac{6 \cdot 2}{1} - \frac{6 \cdot x}{3} = \frac{6 \cdot 3x}{2} + \frac{6 \cdot 4}{1}$$

$$\frac{12}{1} - \frac{6\,x}{3} = \frac{18x}{2} + \frac{24}{1}$$

$$12 - 2x = 9x + 24$$

4) ¡Denominadores eliminados! Ahora resolvemos "normalmente":

$$-9x - 2x = 24 - 12$$

$$-11x = 12$$

$$\frac{\cancel{-11}x}{\cancel{-11}} = \frac{12}{-11}$$

$$x = \frac{12}{-11} = -\frac{12}{11}$$

Practicamos:

1. **Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:**

1º $\frac{x}{2} - 4 = \frac{x}{3} - 3$

2º $\frac{x}{4} + \frac{5}{2} = \frac{x}{6} - 5$

3º $\frac{5}{4}x + 2 = 7$

4º $-\frac{3}{5}x = -36 + 3x$

5º $-\frac{x}{2} + x = x - 6$

6º $\frac{x-2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3x-1}{2} - \frac{3}{2}$

7º $x + 5 = \frac{x+3}{3}$

8º $\frac{x}{3} - \frac{x-2}{2} = \frac{x-13}{9}$

9º $4 + \frac{x-2}{3} - \frac{x-1}{2} = x - \frac{1}{4}$

2. **Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:**

a) $\frac{2x}{3} = -6$

b) $\frac{5x+1}{6} = \frac{4x-2}{9}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 6$

d) $\frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{x-5}{2} + 5$

e) $3(2-x) - \frac{x+3}{2} = 5x + \frac{x}{2}$

f) $\frac{5x+7}{2} - \frac{2x+4}{3} = \frac{3x+9}{4} + 5$

3. **Resuelve las ecuaciones con denominadores:**

1. $\frac{x}{5}+1=7$

2. $\frac{3x}{5}+10=x$

3. $\frac{x}{3}-\frac{7}{2}=\frac{5}{2}$

4. $\frac{2x}{3}-\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$

5. $\frac{x-5}{3}=\frac{x-5}{2}$

6. $\frac{2x-5}{5}=\frac{1+2x}{2}$

7. $\frac{x-5}{2}=\frac{8-x}{4}$

8. $\frac{x}{2}+\frac{x}{5}-\frac{3x}{7}=38$

9. $\frac{2x}{5}-x=12-3x$

10. $\frac{2x-7}{3}+3=1-x$

11. $\frac{x}{2}+x-21=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}$

12. $\frac{x}{2}-\frac{3x}{4}=5-\frac{2x}{3}$

13. $1-\frac{4}{7}x=4-x$

14. $\frac{5x}{3}+1=\frac{1}{3}-\frac{x}{6}$

15. $\frac{2}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3x}{4}=\frac{1}{2}$

PROBLEMAS DE PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES:

A la hora de resolver un problema que requiera planteamiento de ecuaciones se recomienda:

1) Leer atentamente el enunciado en su totalidad.

2) Detectar qué es lo que nos preguntan. Esa es la incógnita, le llamaremos “x” (si hay más de una incógnita, usaremos más letras).

3) Plantear la ecuación (o sistema) que relaciona los datos del enunciado y la(s) incógnita(s). Consiste en “traducir” la información desde el “lenguaje ordinario” al “lenguaje algebraico”.

4) Resolver la ecuación.

5) Interpretar los resultados obtenidos y comprobar que verifican las condiciones del enunciado.

<u>Practicamos:</u> Plantear un problema es “traducir” desde el lenguaje ordinario al algebraico. Traduce al lenguaje algebraico las expresiones:

a) El triple de un número más 2 es igual a 17.

b) Tres números consecutivos suman 33.

c) La tercera parte más la mitad de un número suman 25.

d) El doble de un número más 4 es igual a 20.

e) Tres números pares consecutivos suman 30.

f) Tres números impares consecutivos suman 27.

g) Un número y su anterior suman 41.

h) El triple de un número más 2 es igual a 17.

<u>Ejercicio Resuelto:</u> **Halla tres números consecutivos cuya suma sea 96.**

1) Elegimos la/s incógnitas:

Primer número: x

Segundo número: $x + 1$

Tercer número: $x + 2$

2) **Planteamos una ecuación:**

1er Número + 2º Número + 3er Número = 96

$$x \quad + \quad (x+1) \quad + \quad (x+2) = 96$$

3) **Resolvemos la ecuación:**

$$x + x + 1 + x + 2 = 96$$

$$x + x + x = 96 - 1 - 2$$

$$3x = 93$$

$$x = \frac{93}{3}$$

$$x = 31$$

4) **Solución:**

Primer número: $x = 31$

Segundo número: $x + 1 = 31 + 1 = 32$

Tercer número: $x + 2 = 31 + 2 = 33$

5) **Comprobación e interpretación del resultado:** Efectivamente estos tres números suman 96 ya que $31 + 32 + 33 = 96$.

Ejercicio Resuelto: Al sumar un número natural con el doble de su siguiente, se obtiene 14. ¿Qué número es?

a) Deja claro lo que conoces y da nombre a lo que no conoces.

- El número $\longrightarrow$ x
- Su siguiente $\longrightarrow$ $x + 1$
- El doble del siguiente $\longrightarrow$ $2(x + 1)$
- El número más el doble de su siguiente es igual a 14.

b) Relaciona, con una igualdad, los elementos conocidos y los desconocidos.

$$\boxed{\text{EL NÚMERO}} + \boxed{\text{EL DOBLE DEL SIGUIENTE}} = 14$$

$$x + 2(x + 1) = 14$$

c) Resuelve la ecuación.

$$x + 2(x + 1) = 14 \rightarrow x + 2x + 2 = 14 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

d) Expresa la solución en el contexto del problema y compruébala.

Solución: El número buscado es 4.

Comprobación: $4 + 2(4 + 1) = 4 + 2 \cdot 5 = 4 + 10 = 14$

Practicamos: Resuelve los siguientes problemas mediante el planteamiento de una ecuación:

Puedes resolver problemas de proporcionalidad, porcentajes, fracciones, geometría y muchos otros empleando ecuaciones. Por esa razón son tan importantes las ecuaciones.

1. La suma de tres números naturales consecutivos es 144. ¿Cuáles son?

2. Halla un número natural tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en tres.

3. Calcula un número natural tal que si le sumamos su doble y su triple se obtiene 48.

4. Tengo 4 años más que mi hermano. Calcula nuestras edades sabiendo que entre los dos sumamos 56 años.

5. Dos hermanas se llevan 3 años. Entre las dos tienen 33 años. ¿Qué edades tienen?

6. La edad de Pedro es el triple que la de su hermano Juan y entre ambas edades suman 40 años. Halla las edades de Pedro y Juan.

7. En un corral hay conejos y gallinas. En total hemos contado 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

8. Un padre tiene 36 años y su hijo 10, ¿cuántos años tienen que pasar para que la edad del padre sea el doble de la del hijo?

9. Acabo de comprarme tres camisas y dos pantalones por 126 euros. La dependiente me ha dicho que precio del pantalón era el doble que el de la camisa ¿Cuánto cuesta cada uno?

10. En la papelería nos han cobrado 6´20 € por 15 lápices y 8 bolígrafos. Sabemos que el precio de los bolígrafos es el doble del precio de los lápices. ¿Cuánto cuesta cada uno?

11. Calcula un número natural cuyo triple más 7 unidades da 22.

12. Calcula tres números naturales consecutivos cuya suma sea igual a 66.

13. En rebajas compre tres camisas y dos pantalones por 126 euros. El precio del pantalón era el doble que el de la camisa ¿Cuánto costaba cada uno?

14. ¿Cuánto miden los lados de un rectángulo si su perímetro es de 26cm y es 1 cm más largo que ancho?

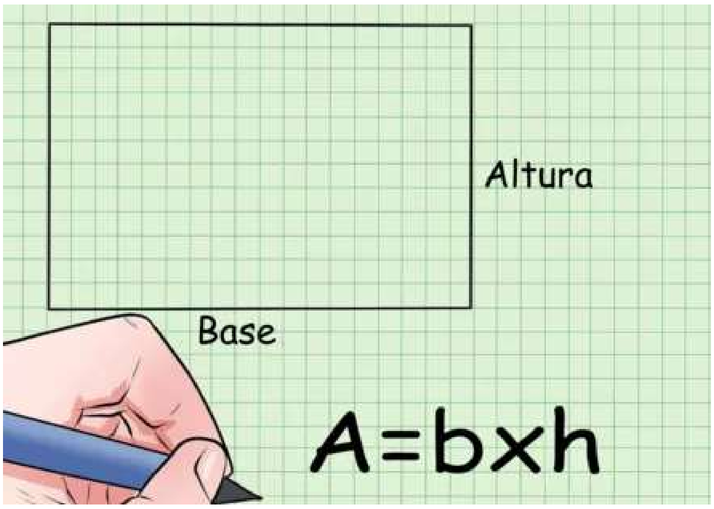
15. El perímetro de un rectángulo es de 32 cm. La altura es 1 centímetro mayor que la mitad de la base. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

16. Calcula las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que es 2 m más largo que ancho y que el perímetro mide 210m.

17. Calcula las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que es 25 m más largo que ancho y que el perímetro mide 210 metros.

18. Calcula las dimensiones de un campo de fútbol si sabemos que es 30m más largo que ancho y que su perímetro es de 420m.

19. Una finca de forma rectangular tiene 123 metros de perímetro y es el doble de larga que de ancha. ¿Qué superficie (área) tiene la finca?



20. Una ONG ha recibido un cargamento de 30.780 libros. Sabemos que hay el doble de libros de lengua que de poesía y el triple de novelas que de libros de lengua. ¿Cuántos libros hay de cada?

21. La biblioteca del instituto ha recibido un cargamento de 1200 libros, entre libros de Filosofía, Historia Antigua y Poesía Renacentista. Sabemos que hay el triple de libros de Filosofía que de Poesía Renacentista y 200 libros más de Historia Antigua que de Poesía Renacentista. ¿Cuántos libros hay de cada tipo?

22. Tenemos 6´6 euros en monedas de 20 y 50 ct. Si hay el triple de monedas de 20 que de 50 ¿Cuántas hay de cada tipo?

23. Se han pagado 66 € por una prenda que estaba rebajada un 12 %. ¿Cuál era el precio sin rebaja?

24. Laura ha comprado una falda y una blusa por 66 €. Ambas tenían el mismo precio, pero en la falda le han hecho un 20 % de rebaja, y en la blusa, solo un 15%. ¿Cuánto costaba cada prenda?

25. Se ha plantado 1/5 de la superficie de una huerta con cebollas; 1/15 con patatas; 2/3 con judías y el resto, que son 240 m^2, con tomates. ¿Qué superficie TOTAL tiene la huerta?

26. Tengo 4 años más que mi hermano. Calcula nuestras edades sabiendo que entre los dos sumamos 56 años.

27. Dos hermanos tienen 11 y 9 años, y su madre 35. Halla el número de años que han de pasar para que la edad de la madre sea igual a la suma de las edades de los hijos.

28. Encuentra el valor de los ángulos de un triángulo sabiendo que la diferencia entre los dos menores es de 20º y que el mayor es el doble del menor.

29. Tres números se diferencian entre ellos en 5 unidades. La suma de los tres es de 9 unidades. ¿Cuáles son dichos números?

30. La suma de la tercera parte de un número con la mitad de su anterior y la cuarta parte del siguiente es igual al mayor de los tres. ¿Cuáles son esos números?

31. De un barril lleno de agua se saca la mitad de su contenido, y después un tercio del resto, quedando en el mismo 200 litros. Calcula la capacidad TOTAL del barril.

32. **<u>MEZCLAS:</u>** Un comerciante tiene dos clases de aceite, la primera de 6€/L y la segunda de 7´2€/L. ¿Cuántos litros de cada clase debemos añadir para obtener 60L de mezcla de aceites a 7€/L?

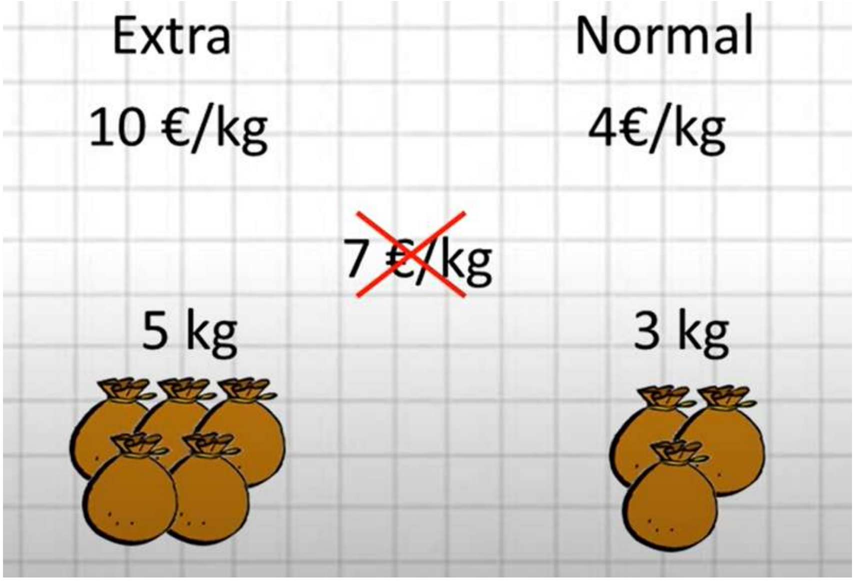
33. **<u>MEZCLAS:</u>** Se mezcla una cierta cantidad de café de 34 €/Kg, con 80 kilos de otro café de 50€/kg, para obtener una mezcla que se pueda vender a 44€/Kg. ¿Cuánto café de 34 € debe emplearse en la mezcla?

34. **<u>MEZCLAS:</u>** Un joyero tiene dos lingotes de oro, con un 80% de pureza y el otro con un 95% de pureza. ¿Cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 kilos con un 86% de pureza?

35. **<u>MEZCLAS:</u>** Un tipo de aceite de 3,2 € el litro se obtiene mezclando un 60 % de aceite virgen extra de 4 € litro y el resto con otro más barato. ¿Cuál es el precio de ese otro? Sol: 2 € el litro.

36. **<u>MEZCLAS:</u>** ¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74% de alcohol se debe mezclar con 5 litros de otro que tiene 90% de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84% de alcohol?

EXAMPLE **<u>PROBLEMA RESUELTO (PROBLEMAS DE “MEZCLAS”):</u>** Un comerciante mezcla 5 Kg de sales de baño de calidad “extra” con un precio de 10 €/Kg con 3 Kg de sales de baño de calidad “normal” cuyo precio es de 4€/Kg. ¿A qué precio se venderá la mezcla?



En este tipo de problemas, al igual que con los de edades, puede ser interesante esquematizar los datos en una tabla:

	Kilogramos (Kg)	Precio unitario (€/Kg)	Valor (€)
Extra	5 Kg	10 €/Kg	
Normal	3 Kg	4 €/Kg	
Mezcla (extra + normal)			

Completamos la tabla "rellenando" las celdas vacías:

	Kilogramos	Precio unitario	Valor (€)

	(Kg)	(€/Kg)	
Extra	5 Kg	10 €/Kg	**5Kg • 10 €/Kg = 50€**
Normal	3 Kg	4 €/Kg	**3Kg • 4 €/Kg = 12€**
Mezcla (extra + normal)	**3 + 5 = 8 Kg**	x €/Kg	**50€ + 12€ = 62€**

Planteamos una ecuación para resolver el problema:

(Kilogramos de la Mezcla) • (Precio del Kilogramo) = Valor de la Mezcla

$$8 \cdot x = 62 \rightarrow x = \frac{62}{8} = 7'75\ €/Kg$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO (O CUADRÁTICAS):

Una ecuación de segundo grado es una ecuación que puede ser representada por un **polinomio de segundo grado**. Por ejemplo:

$$\mathbf{3x^2 - 3x = x - 1}$$

Para resolverlas en primer lugar pasaremos al primer miembro de la ecuación todos los términos de forma que el segundo miembro quede igualado a 0. A continuación reduciremos términos:

$$3x^2 - 3x = x - 1$$

$$3x^2 - 3x - x + 1 = 0$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Obtenemos así la **EXPRESIÓN GENERAL** de una ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{para } a \neq 0$$

Resolución ecuaciones 2º grado: Ecuaciones completas e incompletas:

La solución/es de la ecuación de 2º grado vienen dadas por la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo ± delante de la raíz cuadrada tiene que ver con las **dos posibles soluciones** de la raíz cuadrada.

✓ Una ecuación de segundo grado es **completa** ($ax^2 + bx + c = 0$) cuando TODOS los coeficientes (a, b y c) son distintos de cero. Para resolverla debemos usar la **fórmula general:**

Ejemplo: $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

- En primer lugar, debemos identificar los coeficientes:

  $a = 3 \qquad b = 5 \qquad c = -2$

- A continuación, sustituimos los coeficientes en la fórmula y operamos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+7}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-5-7}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

✓ Si los coeficientes b ó c (o ambos), son nulos, la ecuación se llama **incompleta**. Se pueden resolver utilizando la **fórmula general,** pero existen **métodos abreviados**:

- **Ecuaciones tipo $ax^2 = 0$.** En ellas **b = 0 y c = 0**. El método más sencillo de resolución es despejar la incógnita. Su solución siempre será 0.

  <u>Ejemplo:</u> $4x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{0}{4} \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{0} \rightarrow x = 0$

- **Ecuaciones tipo $ax^2 + c = 0$.** En ellas **b = 0**. El método más sencillo de resolución es despejar la incógnita.

  <u>Ejemplo:</u> $x^2 – 49 = 0$

  Despejamos **x** para resolver la ecuación:

  $$x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm\sqrt{49} \begin{cases} x_1 = +7 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

- **Ecuaciones tipo $ax^2 + bx = 0$**. Ocurre cuando **c = 0.** Lo más sencillo es sacar factor común “x”.

  <u>Ejemplo:</u> $4x^2 = – 32x$

Pasamos $-32x$ al primer miembro cambiado de signo:

$$4x^2 + 32x = 0$$

Se saca factor común **x**:

$$x\,(4x + 32) = 0$$

Para que un producto sea 0, uno de los dos tiene que ser 0:

$$x\,(4x + 32) = 0 \begin{cases} x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 \\ 4x + 32 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{32}{4} \Longrightarrow x_2 = -8 \end{cases}$$

RECUERDA

$$\text{Ec. 2º Grado: } \begin{cases} \textit{Completas} \rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \textit{FÓRMULA GENERAL} \\ \textit{Incompletas} \begin{cases} \textit{Tipo } ax^2 + c = 0 \quad (b = 0) \quad \rightarrow \textit{Despejamos la "x"} \\ \textit{Tipo } ax^2 + bx = 0 \quad (c = 0) \quad \rightarrow \textit{Sacamos Factor Comun} \end{cases} \end{cases}$$

Discusión de la Soluciones de la Ecuación de Segundo Grado:

El número de soluciones de una ecuación de 2º grado depende del signo de la expresión **$\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante).** Se pueden plantear tres situaciones:

- Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales:
- Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene una única solución (que será doble).
- Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales.

Practicamos:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado. Indica, previamente, el número de soluciones que tendrá cada ecuación:

a) $3x^2 + x + 4 = 0$

b) $x^2 + x - 6 = 0$

c) $x^2 - 5x = 0$

d) $x^2 = 36$

e) $5x^2 - 7x + 2 = 0$

f) $x^2 - 3x = 0$

g) $2x^2 + 36 = 0$

h) $2x^2 - 8 = 0$

i) $x^2 - 5x + 6 = 0$

j) $x^2 - 49 = 0$

k) $x^2 - 2x + 1 = 0$

l) $x^2 = 2x + 4$

m) $x^2 - 25 = 24$

n) $x^2 - 2x - 24 = -2x + 1$

o) $2(x^2 - 4) + 2x = 2x$

p) $5x^2 - 7x + 2 = 0$

q) $\frac{x^2}{9} - x + 2 = 0$

r) $(x - 3) \cdot (x - 8) = 0$

s) $5x^2 - 4x + \frac{4}{5} = 0$

t) $2(x^2 - 1) + 3x = 4x^2 - x$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 49 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $x^2 - 3x = 0$

d) $15 - x^2 = 0$

e) $x - 4x^2 = 0$

f) $x^2 - 3x + 2x^2 + 9x = 0$

g) $x^2 - x - 6 = 0$

h) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

i) $x^2 + 6x + 8 = 0$

j) $x^2 + 6x + 9 = 0$

k) $\frac{x+1}{3} - \frac{2x^2 - 5}{6} = \frac{7x+4}{2}$

l) $6x^2 - 5(x - 1) = x(x + 1) + 5$

m) $\frac{7x-2}{3} = \frac{2(x^2-x)}{6} - \frac{15}{9}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado. Opera previamente para pasarlas a la FORMA GENERAL:

1) $\frac{(x+2)^2}{9} = \frac{7}{9} - \frac{(x+3)(x-3)}{5}$ *(Sol: $x_1=2$, $x_2=-24/7$)*

2) $\frac{(2x+1)^2}{5} - \frac{(x+3)(x-3)}{3} = \frac{20}{3}$ *(Sol: $x_1=2$, $x_2=-26/7$)*

3) $\frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(x+1)(x-1)}{3} = \frac{4x^2-19x+31}{6}$ *(Sol: $x_1=-3$, $x_2=2$)*

4) $\frac{3(x^2-11)}{5} - \frac{2(x^2-60)}{7} = 36$ *(Sol: $x=\pm 9$)*

5) $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{5x+6}{6} = \frac{(x+3)(x-3)}{3} + 6$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=7$)*

6) $\frac{(x+2)(x-2)}{4} - \frac{(x-3)^2}{3} = \frac{x(11-x)}{6}$ *(Sol: $x_1=-8$, $x_2=6$)*

Practicamos: Problemas con ecuaciones de 2º grado:

1. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 181. ¿De qué números se trata? Si hay varias soluciones, señálalas.

2. Si un número natural aumentado en tres unidades se multiplica por el mismo número disminuido en otras tres, se obtiene 55. ¿Qué número es?

3. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 181. Halla dichos números.

4. Dentro de 11 años la edad de Uxía será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Uxía ahora?

5. Hallar dos números positivos, sabiendo que uno es el triple del otro más cinco y que el producto de ambos es igual a 68.

6. El lado de un cuadrado mide 3m más que el lado de otro cuadrado. Si la suma de las dos áreas es 89 m^2, calcula las dimensiones de los cuadrados.

7. Encuentra dos números consecutivos cuyo producto sea 56.

8. Uno de los lados de un rectángulo mide 6 cm más que el otro. ¿Cuáles son sus dimensiones si sabemos que su área es de 91 cm^2.