• INTEGRACIÓN INDEFINIDA

DEFINICIÓN

Sea f(x) una función definida en el intervalo (a, b), llamamos **primitiva de la función f(x)** a toda función real de variable real, F(x), tal que:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a, b)$$

Hallar primitivas es el proceso inverso al de calcular derivadas

Es evidente que **primitivas de una función hay infinitas**, puesto que si consideramos la función $G(x) = F(x) + C$ con $C = cte$ también es una primitiva de f(x).

Al conjunto formado por todas las primitivas de una función le llamamos integral indefinida de f(x) y lo denotaremos por:

$$\int f(x)dx$$

PROPIEDADES

- $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \quad con\ k \in R$
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

CÁLCULO INTEGRAL: INTEGRACIÓN INMEDIATA

No hay un método general para el cálculo de integrales indefinidas de funciones elementales, pero conocidas las derivadas de las funciones elementales y la regla de la cadena se deducen las integrales inmediatas.

Éstas son las que debemos conocer este curso:

FORMAS SIMPLES	FORMAS COMPUESTAS
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int f(x)^n . f'(x)dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)} . f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} . f'(x)dx = e^{f(x)} + C$

EJEMPLOS

- Tipo Potencial $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

• $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ • $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ • $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4} + C$ • $\int dx = x + C$ • $\int 5dx = 5x + C$

• $\int 5x^5 dx = 5\cdot\frac{x^6}{6} = \frac{5x^6}{6} + C$ • $\int 2x dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} = x^2 + C$ • $\int \sqrt[5]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} = \frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3} + C$

• $\int (x^4 + x^3) dx = \int x^4 dx + \int x^3 dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + C$ • $\int (2x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x + 3) dx = 2\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + \frac{7x^2}{2} + 3x + C$

• $\int 3x^2 + 4x - 5) dx = 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 5x = x^3 + 2x^2 - 5x + C$ • $\int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C$

- Tipo Potencial $\int f'(x)\cdot f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

• $\int 2x(x^2+1)^3 dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + C$ • $\int (3x+1)^4 dx = \frac{1}{3}\cdot\int 3\cdot(3x+1)^4 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^5}{5} = \frac{(3x+1)^5}{15} + C$

• $\int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$ • $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int 2x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{(x^2-1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^2-1} + C$

• $\int x\sqrt{x^2+3} dx = \int x(x^2+3)^{\frac{1}{2}} dx = = \frac{1}{2}\cdot\int 2x(x^2+3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{(x^2+3)^3}}{3} + C$

• $\int e^x\cdot(e^x+1)^2 dx = \frac{(e^x+1)^3}{3} + C$ • $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx = \int \frac{1}{x}\cdot(\ln x)^4 dx = \frac{\ln^5 x}{5} + C$

• $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x}\cdot(\ln x) dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$ • $\int \cos x\cdot sen^4 x dx = \int \cos x\cdot(sen\, x)^4 dx = \frac{sen^5 x}{5} + C$

• $\int \frac{x^2}{(2x^3+1)^2} dx = \int x^2\cdot(2x^3+1)^{-2} dx = \frac{1}{6}\int 6x^2\cdot(2x^3+1)^{-2} dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{(2x^3+1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{6(2x^3+1)} + C$

• $\int \frac{5}{(x+3)^2} dx = 5\cdot\int (x+3)^{-2} dx = 5\cdot\frac{(x+3)^{-1}}{-1} = -\frac{5}{x+3} + C$

- Tipo Exponencial $\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$

- $\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C$
- $\int e^{7x+1}dx = \frac{1}{7}\int 7\cdot e^{7x+1}dx = \frac{1}{7}e^{7x+1} = \frac{e^{7x+1}}{7} + C$
- $\int \cos x \cdot e^{sen x}dx = e^{sen x} + C$
- $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx = -\int -\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx = -e^{\frac{1}{x}} + C$
- $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx = \int \frac{1}{x}\cdot e^{\ln x}dx = e^{\ln x} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$

- Tipo Exponencial $\int f'(x)\cdot a^{f(x)}dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$

- $\int 7^{x+5}dx = \frac{7^{x+5}}{\ln 7} + C$
- $\int x\cdot 5^{3x^2+4}dx = \frac{1}{6}\int 6x\cdot 5^{3x^2+4}dx = \frac{1}{6}\frac{5^{3x^2+4}}{\ln 5} = \frac{5^{3x^2+4}}{6\cdot \ln 5} + C$

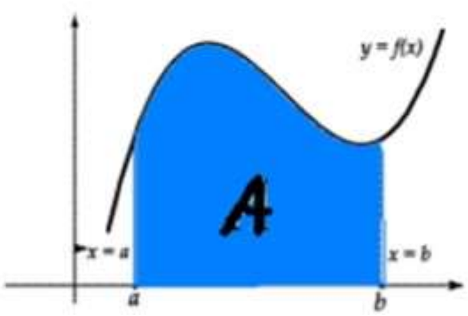
- Tipo Logarítmica Neperiana $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

- $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln|x^2+1| + C$
- $\int \frac{3}{5x-7}dx = \frac{3}{5}\int \frac{5}{5x-7}dx = \frac{3}{5}\cdot \ln|5x-7| + C$
- $\int \frac{1}{x\cdot \ln x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \ln|\ln x| + C$
- $\int tgx dx = \int \frac{sen\, x}{\cos x}dx = -\int -\frac{sen\, x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \frac{x+2}{x^2+4x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cdot(x+2)}{x^2+4x}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x| + C$
- $\int \frac{sen\, x + \cos x}{\cos x - sen\, x}dx = -\int \frac{-(sen\, x + \cos x)}{\cos x - sen\, x}dx = -\ln|\cos x - sen\, x| + C$
- $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cdot e^{2x}}{e^{2x}+5}dx = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+5| + C$

• INTEGRACIÓN DEFINIDA: CÁLCULO DE ÁREAS

La integral no surgió inicialmente como opción inversa a la derivación sino que se empleaba para dar respuesta al siguiente problema:

¿Cómo calcular el área limitada por la gráfica de una función $y = f(x)$, continua y positiva en el intervalo $[a, b]$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas?

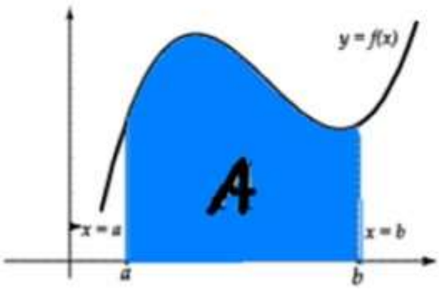


DEFINICIÓN

Sea $y = f(x)$ una función continua y positiva en el intervalo $[a, b]$. El área limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a,\ x = b$ se denomina integral definida entre a y b de $f(x)$ y se representa por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Es decir:



$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$$

PROPIEDADES

a) Se $c \in [a, b]$ $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$

b) $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$

c) $\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$

d) $\boxed{\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx}$

e) $\boxed{\int_a^b (k.f)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx}$ con k un número real

CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS: REGLA DE BARROW

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si F(x) es una primitiva de f se cumple:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplos:

- $\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$
- $\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} - \frac{(-1)}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $\int_1^3 (3x^2 - 2x + 5)dx = \left[3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^3 = \left[x^3 - x^2 + 5x\right]_1^3 = 3^3 - 3^2 + 5\cdot 3 - (1^3 - 1^2 + 5\cdot 1) =$

$= 27 - 9 + 15 - (1 - 1 + 5) = 27 - 9 + 15 - 5 = 28$

- $\int_0^4 (-x + 2x^4)dx = \left[-\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = -\frac{4^2}{2} - 2\cdot\frac{4^5}{5} - \left(-\frac{0^2}{2} - 2\cdot\frac{0^5}{5}\right) = -\frac{16}{2} - 2\cdot\frac{1024}{5} - (0) =$

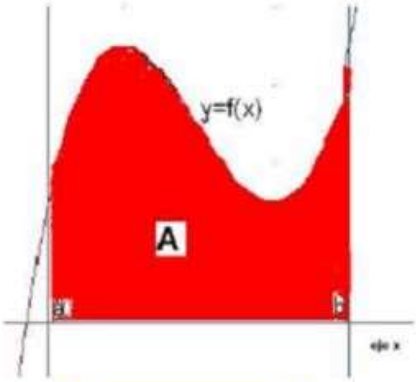
$= -8 - \frac{2048}{5} = \frac{-40 - 2048}{5} = \frac{-2088}{5}$

- $\int_0^3 e^x dx = \left[e^x\right]_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$

CÁLCULO DE ÁREAS

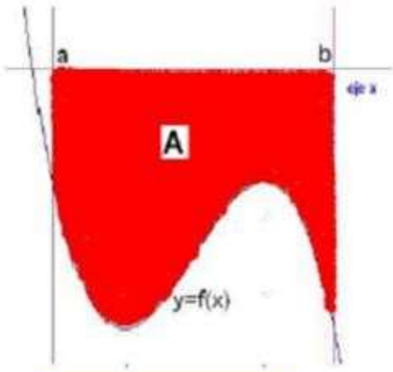
- **Área comprendida entre una curva y el eje OX en el intervalo $[a,b]$**

a) $\boxed{Si\ \ f(x) \geq 0 \ \text{ en } \ [a,b]}$



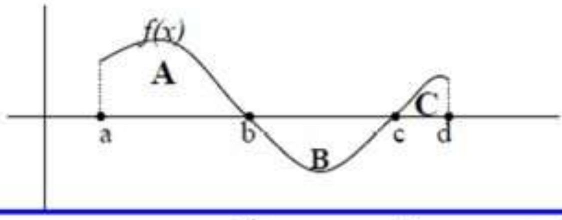
$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$$

b) $\boxed{Si\ \ f(x) \leq 0 \ \text{ en } \ [a,b]}$



$$\boxed{A = -\int_a^b f(x)dx}$$

c) $\boxed{Si\ \ f(x) \ \text{ cambia de signo en } \ [a,b]}$: Ejemplo



$$\boxed{Área = A + B + C = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx}$$