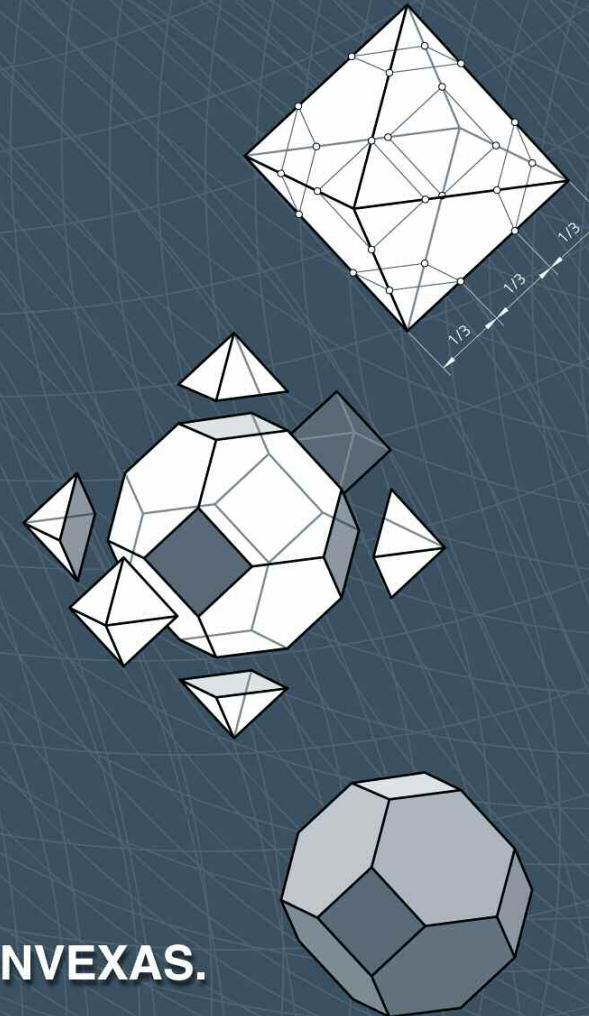


# geometría descriptiva

12

SUPERFICIES POLIÉDRICAS CONVEXAS.



BLOQUE

# 19

## SUPERFICIES POLIÉDRICAS CONVEXAS

### OBJETIVOS

- Conocer las características y relaciones métricas del tetraedro, hexaedro o cubo y octaedro, para su representación en el sistema diédrico en sus múltiples proyecciones.
- Representar, mediante secciones por truncamientos o biselados, poliedros irregulares Arquimediano generados a partir del tetraedro, hexaedro o octaedro regular.
- Determinar el desarrollo de cuerpos poliédricos, así como la transformada de las secciones que pueden producirse al cortar, por planos, las superficies poliédricas anteriores.

### 1 SUPERFICIES POLIÉDRICAS

Se entiende por superficie poliédrica la formada por superficies poligonales que limitan y cierran un espacio, dando lugar a un cuerpo poliédrico.

El segmento que une dos superficies poligonales recibe el nombre de **arista**: el punto de corte de las aristas, **vértice**; las superficies poligonales, **caras** del poliedro; y el ángulo formado por las caras, **ángulo diédrico** de la superficie poliédrica. En cada vértice concurren, al menos, tres caras, que al cortarse determinan un **ángulo poliedro**.

Una superficie poliédrica es **convexa** (fig. 1a) si se verifica que todas sus caras, respecto al plano de cada una de ellas, quedan situadas en un mismo semiplano; en caso contrario, la superficie será **cónvaca** (fig. 1b). Dicho de otra forma, a diferencia de las cónvexas, las superficies convexas no pueden ser atravesadas por una recta en más de dos puntos.

En los **poliedros convexos** la relación entre el número de caras, vértices y aristas la establece el conocido Teorema de Euler: «La suma del número de caras y vértices ha de ser igual al de aristas más dos», esto es:  $C + V = A + 2$ .

Las superficies poliédricas se agrupan en **regulares e irregulares**, dependiendo de que sus caras poligonales sean o no regulares. Su estudio queda justificado por la gran aplicación práctica que tienen en los ámbitos de la Arquitectura, de la Ingeniería y del Diseño.

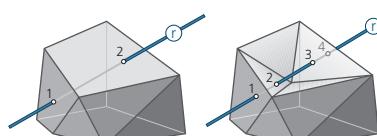
### 2 POLIEDROS REGULARES

Toman el nombre de poliedros regulares, aquellos poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares del mismo tipo. Únicamente son posibles cinco cuerpos: **tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro**. Cinco sólidos que también reciben el nombre de **Poliedros Platónicos**, en honor al filósofo griego Platón que les presentó en su obra «El Timeo», allá por el año 427 a.C.

Sus representaciones no ofrecen dificultad si se parte de conocer la sencilla estructura de cada uno de ellos; es decir, el conocimiento de su métrica que viene definida y codificada en la llamada **sección base o sección principal**, de fácil obtención en cada poliedro regular y, de la que se hablará al analizar cada uno de ellos. En esta exposición únicamente se profundiza en el estudio de los tres primeros poliedros.

#### Propiedades generales:

- Sus caras están formadas por un mismo polígono; por tanto, son equiláteros y equiángulos.
- Tanto las **caras (C)** como los **vértices (V)** o las **aristas (A)** equidistan del centro geométrico del poliedro.
- La suma de los ángulos de todas las caras del poliedro es igual a tantas veces cuatro rectos



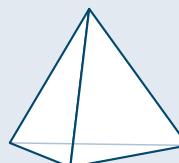
[1a] Poliedro convexo.

[1b] Poliedro cónico.

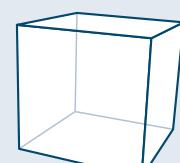


[2] En la cosmología platónica el **Tetraedro** representa al Fuego, el **Hexaedro** a la Tierra, el **Octaedro** al Aire, el **Icosaedro** al Agua y el **Dodecaedro** a la Armonía Universal.

### POLIEDROS REGULARES CONVEXOS



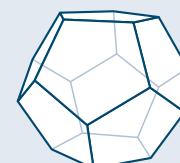
TETRAEDRO



HEXAEDRO O CUBO



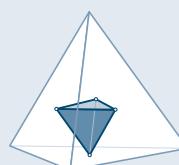
OCTAEDRO



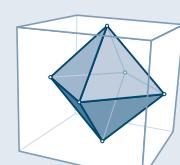
DODECAEDRO



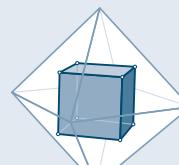
ICOSAEDRO



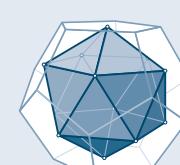
TETRAEDRO



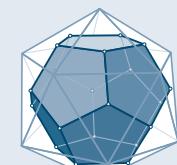
OCTAEDRO



HEXAEDRO O CUBO



ICOSAEDRO



DODECAEDRO

### POLIEDROS CONJUGADOS O DUALES

como número de vértices, menos dos, tenga.

- Son inscriptibles entre sí.
- Admiten tres esferas tangentes: la **inscrita** o tangente a las caras, la **circunscrita**, que pasa por sus vértices y, la **tangente a las aristas**.
- Los **poliedros conjugados o duales** también son poliedros regulares.

### 3 POLIEDROS CONJUGADOS

El poliedro que tiene por vértices un punto en cada una de las caras de otro poliedro, se llama **conjugado o dual** de este, y por tanto, se verifica que el número de vértices del primero es igual al número de caras del segundo.

En el caso de los poliedros regulares convexos,

el conjugado de uno determinado es otro poliedro regular, que tiene por vértices los centros de las caras de aquél.

La figura superior muestra los conjugados de cada uno de los cinco poliedros regulares. Nótese la correspondencia métrica que se establece entre el número de caras, vértices y aristas de cada poliedro y su dual.

#### 4 TETRAEDRO

Poliédro cuyas cuatro caras son triángulos equiláteros; tiene cuatro vértices y seis aristas. No tiene diagonales. En cada vértice concurren tres caras. La altura del poliedro queda definida por un triángulo rectángulo en el que un cateto es  $2/3$  de la altura de una cara y la hipotenusa la arista  $a$ , siendo el otro cateto la altura  $h$  buscada (fig. 4a).

Para su representación diédrica se conocerá, como mínimo, la magnitud de la arista, lo que nos permitirá dibujar la llamada **sección principal**, determinada por un plano que contiene a una arista (por ejemplo  $\overline{AB}$ ) y al punto medio ( $M$ ) de la opuesta ( $\overline{CD}$ ). Se trata de un triángulo isósceles de lado desigual la dimensión de la arista ( $a$ ) del tetraedro y por magnitud de los otros dos, la altura ( $h_c$ ) de una cara (fig. 4b). Dicha sección proporciona todas las relaciones métricas necesarias para representar al tetraedro en cualquier posición espacial.

##### 4.1 Secciones planas particulares.

- **Sección triángulo equilátero (fig. 4.1.1).**  
Cuando el plano de corte es paralelo a una de las caras del tetraedro.

- **Sección cuadrada (fig. 4.1.2).**  
Cuando el plano de corte pasa por el centro ( $O$ ) del poliedro y es paralelo a dos aristas opuestas. El valor del lado del cuadrado sección es igual a la mitad de la arista del poliedro.  
Puesto que un tetraedro se compone de seis aristas formando tres pares de opuestas, dos a dos, es evidente que son posibles tres secciones cuadradas.

- **Sección rectangular (fig. 4.1.3).**  
Cuando el plano de corte no pasa por el centro geométrico del tetraedro, pero sin embargo es paralelo a dos aristas opuestas. En este caso se verifica que la suma de los dos lados desiguales de la sección es igual a la arista del tetraedro.

##### 4.2 Posiciones singulares del tetraedro.

###### 1. Con una cara horizontal.

La proyección horizontal será un triángulo equilátero y el cuarto vértice se proyectará en el centro geométrico de la cara.

Su proyección vertical tendrá tres vértices a igual cota y el cuarto ( $A$ ) distante la altura  $h$ .

###### 2. Con una arista vertical.

Puesto que en el tetraedro dos aristas opuestas son ortogonales, su proyección horizontal será el de una sección principal.

La proyección vertical tendrá dos vértices ( $C$  y  $D$ ) a cota intermedia de los situados en los extremos  $A$  y  $B$  de la arista vertical.

###### 3. Con dos aristas paralelas al plano horizontal.

La proyección horizontal es un cuadrado de diagonal la arista del poliedro.

Su proyección vertical está condicionada por la distancia  $m$ , entre las dos aristas opuestas cuyo valor, como siempre, se obtiene de dibujar, previamente, la sección principal del poliedro.

**ELEMENTOS**

Caras	4
Vértices	4
Aristas	6

4a Tetraedro y una de sus seis secciones principales.

**ELEMENTOS Y RELACIONES MÉTRICAS**

4b Verdadera magnitud de la sección principal de un tetraedro de arista  $a$ .

**LEYENDA DE LA SECCIÓN**

$a$	Arista del tetraedro.
$h_c$	Altura de una cara.
$h$	Altura del tetraedro ( $AH$ ).
$O$	Centro geométrico del tetraedro.
$m$	Distancia entre dos aristas opuestas y diámetro de la esf. tang. a las aristas.
$OA$	Radio de la esfera circunscrita ( $=OB$ ).
$OH$	Radio de la esfera inscrita.

**SECCIONES PLANAS**

4.1.1 Sección triángulo equilátero.

4.1.2 Sección cuadrada de lado  $a/2$ .

4.1.3 Sección rectangular.

**POSICIONES SINGULARES DEL TETRAEDRO**

**1 CON UNA CARA HORIZONTAL**

**2 CON UNA ARISTA VERTICAL**

**3 CON DOS ARISTAS HORIZONTALES**

**Sección principal**

## 5.1 HEXAEDRO O CUBO

Poliédro formado por seis caras cuadradas y paralelas entre sí, dos a dos; tiene ocho vértices y doce aristas. Cada uno de sus vértices forma un triángulo trirrectángulo, concurriendo por tanto, tres caras en cada vértice, perpendiculares entre sí dos a dos.

En el hexaedro o cubo, una *sección principal* (aquella que posee toda la información del poliedro), es la producida por un plano que pasa por el centro geométrico ( $O$ ) del hexaedro y contiene a dos aristas opuestas (fig. 5a). Por tanto una *sección principal* viene determinada por un rectángulo de lado menor la arista ( $a$ ) del poliedro y lado mayor la diagonal ( $d_c$ ) de una cara.

Para poder representar el poliedro, en cualquier posición espacial, es conveniente dibujar su sección principal (fig. 5b), al objeto de conocer las relaciones métricas necesarias que faciliten las dimensiones relativas entre los elementos (vértices, caras, aristas, etc.) del poliedro.

### 5.1 Secciones planas particulares.

Todas las secciones de interés en el hexaedro se obtienen al cortar al poliedro por planos que sean perpendiculares a una de sus diagonales.

#### • Sección triángulo equilátero (fig. 5.1.1).

Cuando el plano de corte es perpendicular a una diagonal en los tercios extremos de la misma. En este caso, el plano sección pasa por los vértices contiguos al vértice truncado (fig. 5.1.3).

#### • Sección hexágono regular (fig. 5.1.2).

Este tipo de secciones se obtienen cortando al hexaedro perpendicularmente a una diagonal por el punto medio de la misma, es decir, por el centro geométrico ( $O$ ) del poliedro (fig. 5.1.3).

### 5.2 Posiciones singulares del hexaedro.

Al igual que se hizo con el tetraedro, vamos a estudiar las tres posiciones en las que habitualmente se encuentra ubicado el hexaedro, respecto a los planos de proyección.

#### 1. Apoyado, por una cara, en el plano horizontal.

O lo que es lo mismo, con dos caras paralelas a un plano de proyección horizontal.

#### 2. Con una sección principal perpendicular a uno de los planos de proyección.

Por ejemplo, la sección  $ABFE$ . Lo que significa que la proyección sobre dicho plano es, asimismo, otra sección principal en verdadera magnitud.

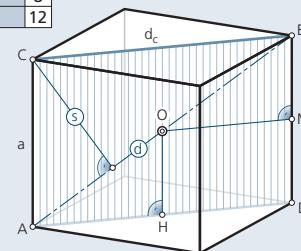
#### 3. Con una diagonal del cubo perpendicular a uno de los planos de proyección.

En la figura adjunta se ha representado con la diagonal  $AH$  vertical.

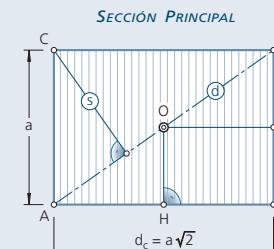
El radio  $s$  de la circunferencia circunscrita a los seis vértices intermedios del cubo, -situados en planos perpendiculares a la diagonal vertical y a los tercios de esta-, se determina construyendo la sección principal del poliedro: es la distancia de un vértice a una diagonal de la misma, esto es, a la diagonal del cubo (fig. 5b).

## ELEMENTOS Y RELACIONES MÉTRICAS

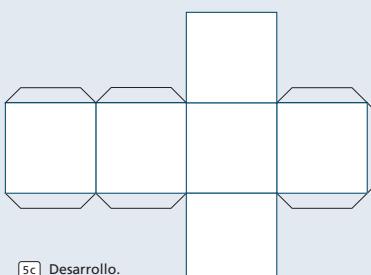
ELEMENTOS
Caras 6
Vértices 8
Aristas 12



5a) Hexaedro o cubo y una de sus seis secciones principales.



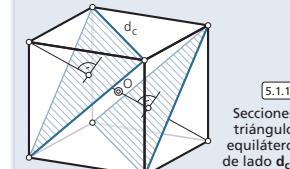
5b) Verdadera magnitud de la sección principal de un hexaedro de arista  $a$ .



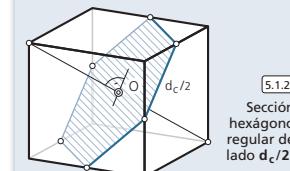
5c) Desarrollo.

LEYENDA DE LA SECCIÓN	
a	Arista del hexaedro o cubo.
$d_c$	Diagonal de una cara: $d_c = a\sqrt{2}$ .
d	Diagonal del cubo: $\overline{AB} = \overline{CD} = a\sqrt{3}$ .
O	Centro geométrico del hexaedro.
$\overline{OA}$	Radio de la esfera circunscrita: $d/2 = \overline{OB}$ .
$\overline{OH}$	Radio de la esfera inscrita al hexaedro.
$\overline{OM}$	Radio de la esf. tg. a las aristas, ( $= d_c/2$ ).
S	Distancia de un vértice a la diagonal d.

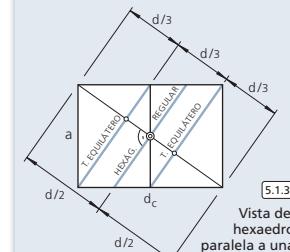
## SECCIONES PLANAS



5.1.1) Secciones triángulo equilátero de lado  $d_c$ .



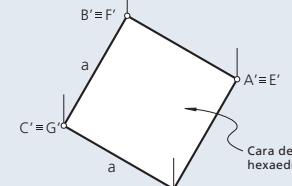
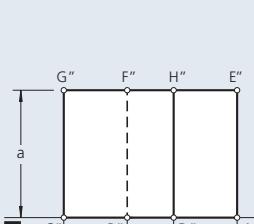
5.1.2) Sección hexágono regular de lado  $d_c/2$ .



5.1.3) Vista del hexaedro paralela a una sección principal.

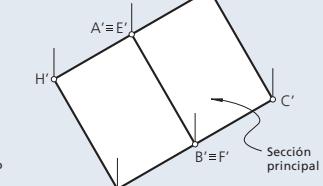
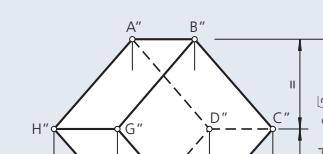
## POSICIONES SINGULARES DEL HEXAEDRO O CUBO

### 1 CON UNA CARA HORIZONTAL



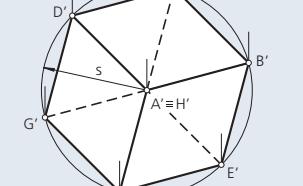
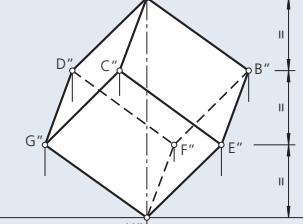
Cara del hexaedro  
Sección principal

### 2 CON UNA SECCIÓN PRINCIPAL VERTICAL



Cara del hexaedro  
Sección principal

### 3 CON UNA DIAGONAL VERTICAL



Cara del hexaedro  
Sección principal

## 6 OCTAEDRO

Poliédro formado por ocho caras triángulos equiláteros; tiene seis vértices y doce aristas. En cada vértice concurren cuatro caras (fig. 6a).

En el octaedro, una *sección principal* (fig. 6a) es la producida por un plano que atraviesa al poliedro pasando por su centro ( $O$ ) y por los puntos medios ( $M$  y  $N$ ) de dos aristas opuestas.

En definitiva, la *sección principal* viene determinada por un rombo de diagonal menor la arista ( $a$ ) y diagonal mayor la diagonal ( $d$ ). Sus lados serán iguales a la altura de una cara ( $h_c$ ). Para poder representar correctamente el octaedro, en cualquier posición, es conveniente dibujar la sección principal, partiendo de conocer la arista del poliedro (fig. 6b) y, con ello, obtener toda la información necesaria sobre las distancias relativas entre elementos (vértices, aristas, etc.) del poliedro.

### 6.1 Secciones planas particulares.

#### • Sección cuadrada (fig. 6.1.1).

Cuando el plano de corte es perpendicular a cualquiera de las tres diagonales del poliedro.

#### • Sección hexágono regular (fig. 6.1.2).

Esta sección se obtiene cortando al octaedro por un plano que pase por el centro geométrico del poliedro y que sea paralelo a dos caras opuestas.

#### • Sección hexágono irregular (fig. 6.1.3).

Cuando el plano de corte pasa por el centro del poliedro y atraviesa a dos aristas concurrentes en puntos diferentes de sus puntos medios.

### 6.2 Posiciones singulares del octaedro.

También en este poliedro podemos considerar tres posiciones clásicas en cuanto a su posicionamiento respecto a los planos de proyección.

#### 1. Con una diagonal perpendicular a un plano de proyección.

En la figura, la diagonal  $\bar{AB}$  del octaedro es vertical. La proyección horizontal es un cuadrado con sus correspondientes diagonales.

La proyección vertical tiene los cuatro vértices intermedios a la mitad de la diagonal del poliedro.

#### 2. Con un plano diagonal (cuadrado de lado $a$ ) perpendicular a un plano de proyección.

En la figura adjunta, se dibuja el octaedro con un plano diagonal vertical, lo que significa que la proyección sobre el plano horizontal es una sección principal. En la proyección vertical la cota relativa entre la arista inferior y la superior es igual a la magnitud de la arista del octaedro; los otros dos vértices se encuentran en su cota media.

#### 3. Con una cara paralela a un plano de proyección.

En la figura, las caras opuestas  $ABC$  y  $DEF$  son horizontales y, por tanto, se proyectan en verdadera magnitud, estando giradas  $60^\circ$  una respecto a la otra.

La proyección vertical se obtiene considerando la cota relativa que separa los tres vértices de la cara superior respecto de la inferior, magnitud ( $u$ ) que se determina en la sección principal.

**ELEMENTOS**

Caras	8
Vértices	6
Aristas	12

6a Octaedro y una de sus seis secciones principales.

**ELEMENTOS Y RELACIONES MÉTRICAS**

6b Verdadera magnitud de la sección principal de un octaedro de arista  $a$ .

**LEYENDA DE LA SECCIÓN**

- $a$  Arista del octaedro.
- $h_c$  Altura de una cara.
- $d$  Diagonal del octaedro ( $\bar{AB} = a\sqrt{2}$ ) y diámetro de la esf. circunscrita al poliedro.
- $O$  Centro geométrico del octaedro.
- $MN$  Distancia entre aristas opuestas ( $a$ ) y diámetro de la esf. tag. a las aristas.
- $u$  Distancia entre dos caras opuestas y diámetro de la esfera inscrita.

6.1.1 Sección cuadrada.

6.1.2 Sección hexágono regular de lado  $a/2$ .

6.1.3 Sección hexagonal irregular.

**POSICIONES SINGULARES DEL OCTAEDRO**

**1 CON UNA DIAGONAL VERTICAL**

**2 CON UN PLANO DIAGONAL VERTICAL**

**3 CON UNA CARA HORIZONTAL**

Sección principal