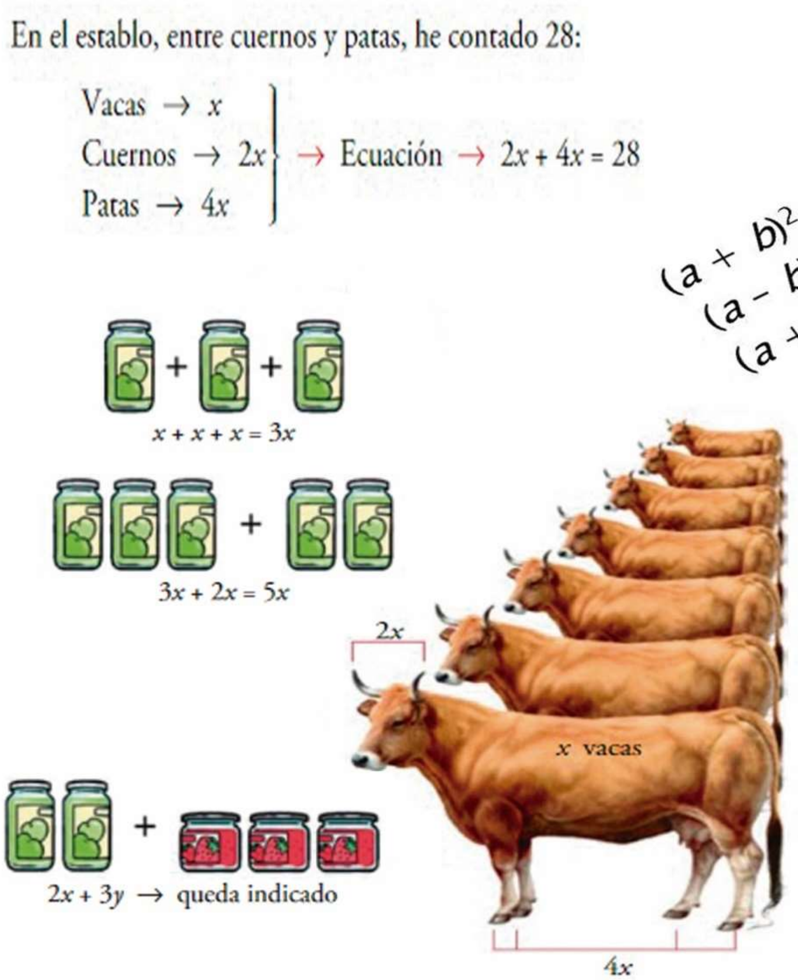
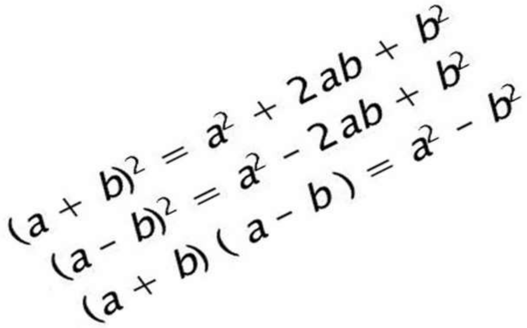
Ud 9: Al-ŷabr





CONTENIDOS:

- El Algebra: qué es y para qué sirve.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, y viceversa.
- Valor numérico de una expresión algebraica.
- Expresiones algebraicas: monomios y polinomios.
- Operaciones con expresiones algebraicas.
- Productos o identidades notables.
- Extracción de factor común y aplicación a la simplificación de fracciones algebraicas.

EL ALGEBRA:

El álgebra abarca la parte de las matemáticas en la que se utilizan letras para expresar **números cuyo valor nos es desconocido**. A una expresión formada por letras y números conectadas por operaciones matemáticas se la llama **expresión algebraica**.

A veces pasar del **“lenguaje ordinario”** al **“lenguaje algebraico”** puede ser dificultoso. En álgebra una letra es un número desconocido y cuando queremos hacer alguna operación con esa letra podemos pensar en lo que haríamos con un número conocido. Lo veremos con ejemplos:

Un número conocido cualquiera: (el 5 por ejemplo)	**Un número desconocido: x**
El doble de cinco: $2 \cdot 5$	El doble de un número desconocido: $2 \cdot x = 2x$
Un número conocido distinto: 8	Un número desconocido distinto: y
La cuarta parte de cinco: $\frac{5}{4}$	La cuarta parte de un número desconocido: $\frac{x}{4}$
El cuadrado de cinco: 5^2	El cuadrado de un número desconocido: x^2
La suma de cinco y siete: $5 + 7$	La suma de dos números desconocidos distintos: $x + y$
Cinco aumentado en tres unidades: $5 + 3$	Un número aumentado en tres unidades: $x + 3$

Practicamos:

1. **Si “x” es la edad de una persona, expresa en lenguaje algebraico:**
   - **a)** Los años que tiene hoy.
   - **b)** Los años que tendrá dentro de un año.
   - **c)** Los años que faltan para que cumpla 80 años.
   - **d)** Los años que tendría hace 6 años.
   - **e)** La edad que tendrá dentro de 15 años.
   - **f)** Los años que tiene una persona que tiene el doble de edad.
   - **g)** Los años que tiene una persona que tiene la mitad de edad.

2. **Asocia la edad de cada personaje con una expresión algebraica:**
   - **a)** Jorge tiene una edad desconocida.
   - **b)** Pilar, su esposa, tiene 3 años menos.
   - **c)** Manuel, su padre, le dobla la edad.
   - **d)** Lola, su madre, tiene 5 años menos que su padre.
   - **e)** Gemma, su hija, nació cuando Jorge tenía 26 años.
   - **f)** Javi, el pequeño, tiene la mitad de años que Gemma.

3. **Asigna una expresión algebraica a cada uno de los siguientes enunciados:**
   - **a)** El sueldo de un informático en cierta empresa es desconocido.
   - **b)** El jefe de su sección gana 700 € más que el informático.
   - **c)** Una operaria manual gana 400 euros menos que un informático.
   - **d)** El gerente gana el doble que un jefe de sección.
   - **e)** La directora gana 800 euros más que el gerente.
   - **f)** El sueldo de un peón sobrepasa en 200 euros al de un operario manual.

g) Una administrativa cobra el 90% que el informático.

h) Un contable gana un 15% menos que el informático.

4. **Expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:**

a) Un número cualquiera:

b) Dos números distintos:

c) El doble de un número:

d) El triple de un número:

e) La mitad de un número:

f) La tercera parte de un número:

g) Un número aumentado en una unidad.

h) Un número disminuido en 20.

i) 15 menos la mitad de un número.

j) Un número par.

k) Un número impar.

l) Dos números consecutivos.

m) Dos números pares consecutivos.

n) Dos números impares consecutivos.

o) El cuadrado de un número.

p) El cubo de un número.

q) La diferencia de dos números distintos.

r) La suma de un número más su mitad.

s) La suma de dos números consecutivos.

t) La suma de dos números pares consecutivos.

u) El triple de un número menos la mitad de un número distinto.

v) El doble de la suma de dos números.

w) La suma de los cuadrados de dos números.

x) El cuadrado de la suma de dos números.

5. Transcribe al "lenguaje ordinario" las siguientes expresiones algebraicas. Observa las diferencias.

a) x

b) $\frac{x}{6}$

c) $5x$

d) $5x - 1$

e) $2a + b$

f) $2\,(a + b)$

g) $x^2 + y^2$

h) $(x + y)^2$

i) $3x^2$

j) $(3x)^2$

6. Indica las expresiones algebraicas correspondientes a los siguientes enunciados:

a) El siguiente de un número, más tres unidades.

b) El anterior de un número, menos doce unidades.

c) El doble de un número más su mitad.

d) El triple de un número, menos su cuarta parte.

e) La tercera parte de un número, más el doble de dicho número.

f) La mitad del siguiente de un número, menos cuatro unidades.

g) La quinta parte del triple de un número, más dieciocho unidades.

h) El valor resultante de restar 3 del cuadrado de un número.

i) La diferencia entre un número y la raíz de la suma de otros dos.

j) La Mitad del triple de un número.

7. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa un número de dos cifras ab? (si no lo ves intenta ver similitudes a partir de un número de dos cifras cualesquiera):

a) $a + b$

b) $a \cdot b$

c) $a : b$

d) a + 10b

e) 10a + b

8. En una granja hay un número desconocido de vacas y avestruces. Escribe una expresión que nos indique:

a) El número de cabezas de vacas.

b) El número de cabezas total.

c) El número de alas.

d) El número de patas de vacas.

e) El número de patas total.

9. Sabiendo que el número x es un número entero, expresa en "lenguaje ordinario" siguientes expresiones algebraicas:

a) x + 1

b) x – 1

c) $2x + \frac{x}{3}$

d) (x + 1) : 2

e) $\frac{3x}{5}$

<u>VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA:</u>

No sólo usamos expresiones algebraicas en matemáticas sino también en ciencias naturales, física y química, tecnología y en nuestro día a día. Puesto que las letras no son más que números (cuyo valor desconocemos) en el momento que conozcamos este valor si lo sustituimos en la expresión algebraica obtenemos el valor numérico de la dicha expresión algebraica.

EXAMPLE Calcula el valor el valor numérico de $3x^2$ cuando x = - 1.

1) En primer lugar, sustituimos las letras por los valores que nos han indicado, en este caso, se cambia la "x" por un " -1". Es decir $3 \cdot (-1)^2$

2) Simplificamos esta expresión numérica según el orden de las operaciones combinadas que ya conocemos.

$$3x^2 = 3 \cdot (-1)^2 = 3 \cdot (+1) = 3$$

Practicamos:

1. Completa la siguiente tabla. Fíjate en el EJEMPLO de la primera columna.

n	- 2	- 1	0	1	2
n - 2	-2 – 2 = -4				
3n - 1	3 • (-2) – 1 = - 6 – 1 = -7				
$n^2 + 3n$	$(-2)^2 + 3 \cdot (-2) = 4 - 6 = -2$				
$\frac{n}{2} + 3$	$\frac{-2}{2} + 3 = -1 + 3 = 2$				
$\frac{1-n}{n+3}$	$\frac{1-(-2)}{-2+3} = \frac{1+2}{1} = \frac{3}{1} = 3$				

2. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $2x + 1$ para $x = 1$

b) $2x^2 - 3x + 2$ para $x = -1$

c) $x^3 + x^2 + x + 2$ para $x = -2$

d) $2x^2 - 5x + 1$ para $x = \frac{1}{2}$

3. Rellena la siguiente tabla y calcula el valor de cada una de las expresiones algebraicas:

Expresión algebraica	x	y	z	Expresión numérica	Valor de la expresión
$3x + 2y + z$	5	3	2		
$x^2 + y - z$				$5^2 + 7 - 9$	
	4	3	7	$4 \cdot 3^2 - 7$	
$x \cdot (y^2 - z)$	2'5	3	7		
$x : 2 + y : 3 - z$				$11 : 2 + 12 : 3 - 9$	

4. Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas:

a) $\frac{n \bullet (n+1)}{2}$ para: $n = 0$

b) $2 \cdot x - 3$ para: $x = 7$

c) $2 \cdot (x - 3)$ para: $x = -3$

d) $x + 2 \cdot y$ para: $x = 5´55$

$y = -11´3$

e) $ax + \frac{b}{y}$ para: $a = 4$

$b = -6$

$x = 3'6$

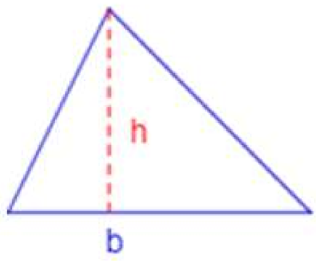
$y = 0'5$

5. Completa la siguiente tabla (comprueba los resultados con calculadora):

x	**- 2**	**- 1**	**0**	**1**	**2**
$\mathbf{x - 3}$					
$\mathbf{2x - 1}$					
$\mathbf{x^2 + 3x}$					
$\mathbf{2x^3 + 3}$					
$\mathbf{\frac{x}{2}}$					
$\mathbf{\frac{x-1}{4}}$					
$\mathbf{\frac{2x^3 - x}{x+3}}$					

6. Calcula el valor de las siguientes expresiones algebraicas:

- Calcula el valor de la expresión $\frac{b \cdot h}{2}$ cuando b = 10 y h = 4.



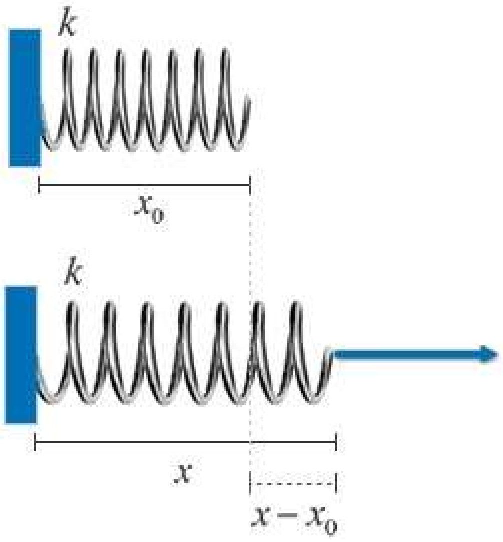
Con esta expresión se calcula el área de un triángulo de base "b" y altura "h".

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

- Dado **un cuadrado** de lado "a":
  - Investiga cual es la expresión algebraica para calcular su área.
  - Dibújalo y deduce una expresión para calcular el perímetro de cualquier cuadrado.
  - Calcula **área y perímetro** de un cuadrado de lado 5 cm y de otro de 25m.

- Dado **un rectángulo** de lado mayor "a" y lado menor "b".
  - Dibújalo.
  - Investiga cual es la expresión para calcular su área.
  - Deduce la expresión algebraica para calcular su perímetro.
  - Calcula el área y perímetro de los siguientes rectángulos:
    - a = 3   b = 2
    - a = 6   b = 4
    - a = 10   b = 5

- **Ley de Hooke: $F = K (x - x_o)$:** Un muelle cuya constante elástica vale K = 150 N/m tiene una longitud de 35 cm cuando no se aplica ninguna fuerza sobre él. Calcula la fuerza que debe ejercerse sobre el muelle para que su longitud sea de 45 cm.

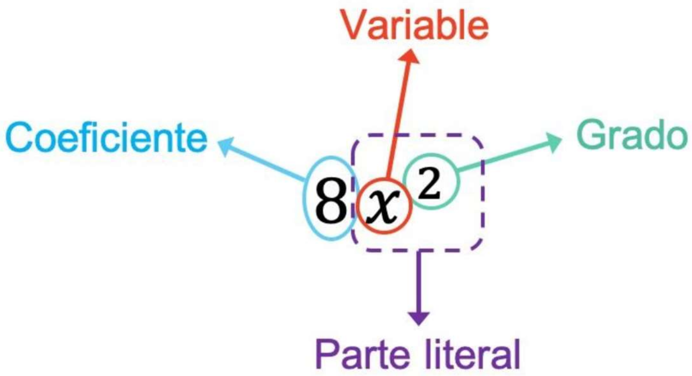


- **Ley de Gravitación Universal: $F = G\frac{m1 \cdot m2}{r^2}$:** Sabiendo que la masa de la Tierra es 5´98 · 10^{24} kg y la de la Luna 7´34 · 10^{22} kg, ¿Con qué fuerza atrae la Tierra a la Luna si la distancia entre ambas es de r = 3´84·10^5 Km?

- **Ley de Ohm: V = R · I:** La piel húmeda tiene una resistencia al paso de corriente eléctrica de 2500 Ω. ¿Qué tensión (voltaje) sería suficiente para provocar en estas condiciones el paso de una corriente peligrosa de 0´03 A por el cuerpo humano?

LOS MONOMIOS:

Es la expresión algebraica más sencilla. Las únicas operaciones que aparecen entre las letras son productos y potencias de exponentes naturales. Consta de una parte numérica (**coeficiente**) y una **parte literal** formada por las letras y sus exponentes. En un monomio distinguimos:



- **Parte literal:** letra o letras con sus respectivos exponentes.
- **Coeficiente:** El número que multiplica a la parte literal (incluido su signo). Nos indica el número de veces que se repite la parte literal.
- **Grado:** Es la suma de los exponentes de las letras de la parte literal. Podemos pensar en que el **grado de un monomio** indica cuántas letras figuran en la expresión. Veámoslo con ejemplos:
  - $5x \rightarrow$ grado 1 (una letra).
  - $6am^2 = 6amm \rightarrow$ grado: $1 + 2 = 3$ (tres letras).
  - $7 = 7 \cdot x^0 = 7 \cdot 1 = 7 \rightarrow$ grado 0 (ninguna letra).

La única operación matemática que podemos tener entre las letras de un monomio es un producto y, por tanto, si tenemos alguna letra dividiendo, es decir, en el denominador de una fracción no será un monomio.

$x^{-4} = \frac{1}{x^4} \rightarrow$ NO es un monomio.

$3x^{-2} = \frac{3}{x^2} \rightarrow$ NO es un monomio.

$\frac{-5x^{-3}}{2} = \frac{-5}{2x^3} \rightarrow$ NO es un monomio.

$\frac{3}{5}x^2 \rightarrow$ SI es un monomio. Sería lo mismo que $\frac{3x^2}{5}$

RECUERDA

Potencias de Exponente Negativo:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \qquad a \neq 0$$

Ejemplo:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

Dos monomios son **semejantes** cuando tienen la misma parte literal:

Son semejantes $\begin{cases} 6a^2b \\ -3a^2b \end{cases}$ Son semejantes $\begin{cases} 5xy^2 \\ -3y^2x \end{cases}$

No son semejantes $\begin{cases} 2a^2x \\ -4a^2b \end{cases}$

Practicamos:

1. Indica cuales de los siguientes monomios son semejantes.

$3x$	$8xy$	$5x$	$-4y^2x$	$-4x$	$25x^2$
$-5xy$	$7x^2$	$12xy$	$7yx$	$7y$	$3x^3$
$5yx^2$	$2x^2y$	8	$-2x$	$\frac{11}{5}$	$3x^3y$

2. Rodea con un círculo aquellas expresiones que sean monomios y completa una tabla con las siguientes columnas.

$-3a^2b^3$	$-\frac{1}{3}xy^3$	$8x$	$\frac{2}{x}$	$2x - 3y$
p^3b^4	$2x^2yb^3$	5	$8 - 3x$	$\frac{4x^2}{5}$
$\frac{2}{7}x^2z$	$7xyz^5$	$\sqrt{5}\, m^2$	$2x^{-2}$	ñ

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO

OPERACIONES CON MONOMIOS:

❖ **Sumas y restas:** Para sumar o restar monomios, estos deben ser **semejantes**.

$x + x + x = 3x$

$3x + 2x = 5x$

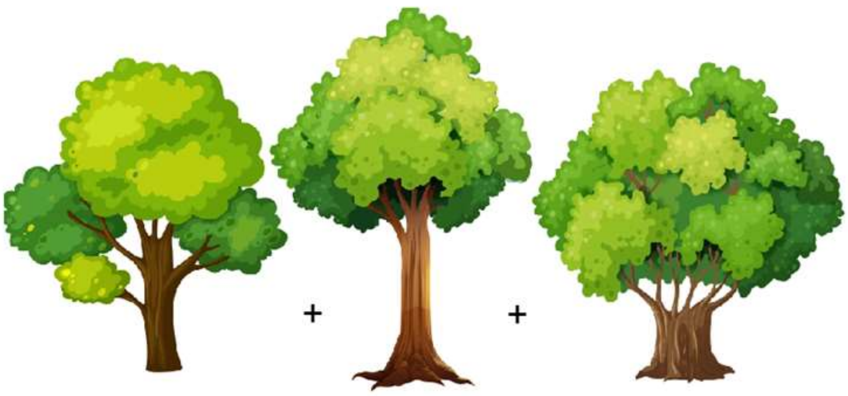
$2x + 3y \rightarrow$ queda indicado

EJEMPLO 1 $a + a + a = 3a$	EJEMPLO 2 $5x - 3x = 2x$
EJEMPLO 3 $3a + 2b \Rightarrow$ queda indicada	EJEMPLO 4 $x^2 + x \Rightarrow$ queda indicada
EJEMPLO 5 $a^2 + a^2 = 2a^2$	EJEMPLO 6 $2x^2 - 5 + 3x^2 - 3 = 5x^2 - 8$

Fíjate en la siguiente analogía:

3 árboles = 1 árbol + 1 árbol + 1 árbol

$3x^2$



x^2 x^2 x^2

$1x^2 + 1x^2 + 1x^2 = \mathbf{3x^2}$

- **Producto:** Los monomios no necesitan ser semejantes. Multiplicaremos coeficiente con coeficiente y parte literal con parte literal.

$$(2x) \cdot (4y) = 2 \cdot 4 \cdot x \cdot y = 8xy$$

$$4 \cdot (-5x) = 4 \cdot (-5) \cdot x = -20x$$

$$2x^4 \cdot 4x^3 = (2 \cdot 4) \cdot (x^4 \cdot x^3) = 8\, x^{4+3} = 8x^7$$

Recuerda: Para multiplicar potencias de la misma base se conserva la base y suman los exponentes. Con letras se hace igual:

$$4^3 \cdot 4^2 = 4^{3+2} = 4^5$$

$$x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$$

$$(-2a) \cdot 5a = (-2) \cdot 5 \cdot a \cdot a = -10a^2$$

$3 \cdot (2x - 5) = 3 \cdot 2x - 3 \cdot 5 = 6x - 10$ (Propiedad distributiva)

- **Potencia:** Recordemos que una potencia no es más que una manera de expresar una multiplicación y por tanto:

$$(2x^4)^3 = (2x^4) \cdot (2x^4) \cdot (2x^4) = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (x^4) \cdot (x^4) \cdot (x^4) = 8\, x^{4+4+4} = 8x^{12}$$

Una manera más sencilla de operar será viendo que la potencia afecta a TODO lo que hay dentro del paréntesis y, por tanto:

$$(2x^4)^3 = 2^3 \cdot (x^4)^3 = 8 \cdot x^{4 \cdot 3} = 8x^{12}$$

❖ **<u>División (o Cociente):</u>** Los monomios no necesitan ser semejantes. Dividimos coeficiente entre coeficiente y parte literal entre parte literal.

- $8x^4 : 4x^3 = (8 : 4) \cdot (x^4 : x^3) = 2\,x^{4-3} = 2x^1 = 2x$
- $\dfrac{8x^4}{4x^3} = \dfrac{\cancel{2\cdot 2}\cdot 2\cdot \cancel{x\,x\,x}\,x}{\cancel{2\cdot 2\cdot x\,x\,x}} = 2x$
- $(6a^2b) : (3a^2b) = \dfrac{2\cdot 3\cancel{a^2}\,\cancel{b}}{3\cancel{a^2}\,\cancel{b}} = 2$
- $(15x^4) : (3x^3) = \dfrac{5\cdot \cancel{3x^3}\cdot x}{\cancel{3x^3}} = 5x$
- $(2ab) : (6b^2) = \dfrac{\cancel{2}\cdot a\cdot \cancel{b}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{b}\cdot b} = \dfrac{a}{3b}$

<u>Practicamos:</u>

1. Reduce las siguientes expresiones:

a) $a + a + a + a$

b) $m + m - m$

c) $a + 2a + b + b$

d) $2x + 5x + 4x - 3x$

e) $9x^2 - 2x^2 - x^2 + 5x^2$

f) $6a + 2a - 5 + 4a - 3a + a$

g) $10x^4 - x^4$

h) $3x - 2x - 7x + y$

i) $10x^3 - 3x^3 - x^3$

j) $3x^2 + 6x^2 + 5x^2$

k) $6z^2y + 3yz^2 + \frac{1}{2}yz^2$

l) $7x^3 + 2x^3 + \frac{1}{3}x^3$

m) $\frac{3}{4}z^2y^3 + \frac{1}{2}z^2y^3 + \frac{5}{3}z^2y^3$

n) $6xy + 2xy + 3xy$

o) $ab^3 + ab^3 + \frac{2}{9}b^3a$

p) $2yx^2 + xy^2 - 3xy^2$

q) $7ba^2 - \frac{2}{5}a^2b + 2b^2a$

r) $9x^3 + 4x^7 - 8x^6$

s) $6ab - 3ab - 5ba + 2 + 3a$

t) $xy^3 - y^3x$

2. Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $\frac{4}{5}x^2 \cdot \frac{2}{3}x$

b) $\frac{5}{4}xy \cdot \frac{6}{7}x^2$

c) $\frac{7}{3}ab^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)a$

d) $b^2 \cdot (-3)ab^2y$

e) $\frac{1}{2}yx^3 \cdot (2x^3)$

f) $-5x^3 \cdot 2x^2$

g) $10x^3y \cdot (-6x^3y)$

h) $-3x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}x\right)$

3. Efectúa los siguientes cocientes de monomios.

a) $50x^4 : 25x^2$

b) $15a^6 : 3x^6$

c) $25x^6 : 10x^2$

d) $36a^3 : 6a^2$

e) $(6x^5):(-2x^3)$

f) $(-9x^3 y^4) : (3x^2y^2)$

g) ‘uio45q+

h) $(7a^7b^6) : (3b^4a^3)$

i) $(5x^6) : (-2x^3)$

4. Efectúa los siguientes cocientes de monomios expresándolos previamente como una fracción:

a) $(-9x^3) : (3x^2)$

b) $(4x^2) : (-2x^5)$

c) $(4a^5b^2) : (5ba^4)$

d) $(-27x^7) : (3x^4)$

e) $(8yx^6) : (-2yx^3)$

f) $(-2x^4) : (5x^6)$

g) $(-3x^4) : (-2x)$

h) $(7x^4) : (14x^3)$

5. Efectúa los siguientes cocientes de monomios:

a) $\frac{25x^5}{5x^3}$

b) $\frac{15a^3}{5a^3}$

c) $\frac{4q^5}{4q^3}$

d) $\frac{8x^4}{4x^3}$

e) $\frac{-6x^4y^2}{2x^3y^4}$

6. Realiza las siguientes operaciones entre monomios:

a) $-x^2 + x + x^2 + x^3 + x$

b) $8xy^2 - 5x^2y + x^2y - xy^2$

c) $8x^2 - x + 9x + x^2$

d) $2x^2 \cdot 4x^3 \cdot 5x^6$

e) $-3x^2 \cdot xyz \cdot 6y^3 \cdot x^2$

f) $15x^3 : 5\,x^2$

g) $-8x^3y^2 : 2x^2y$

h) $10x^4yz^2 : 5xyz$

i) $-3x \cdot (-2x) \cdot \frac{7}{4}x$

7. El cociente de dos monomios A(x) : $5x^3$ es igual a -3x. ¿Cuánto vale A(x)?

8. El cociente de dos monomios $6x^4$: B(x) es igual a $2x^3$. ¿Cuánto vale B(x)?

9. Efectúa las siguientes potencias de monomios:

a) $(3x^2)^3 =$

b) $(-2x^2)^4 =$

c) $(-2x^2)^4 =$

d) $(4y)^2 =$

e) $\left(\frac{1}{2}x\right)^3 =$

f) $(-3ab)^5 =$

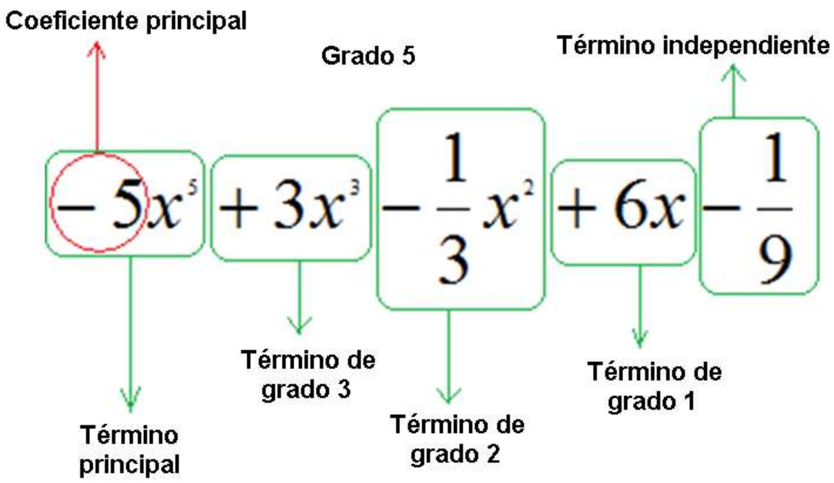
g) $\left(\frac{3}{2}x^3\right)^5 =$

h) $(6xy)^3 =$

i) $\left(\frac{4}{5}ab^3\right)^3 =$

LOS POLINOMIOS:

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por una **suma o diferencia indicada** de varios monomios.



La suma (o resta) indicada de dos monomios es un binomio. La suma (o resta) indicada de tres monomios es un trinomio. En general, la suma (o resta) de varios monomios es un polinomio.

Los **polinomios se nombran** en función de la variable (o variables) que están y usando, generalmente, una letra mayúscula tales como P, Q, R…

$P(x) = 3x^2 + 2x.$

$Q(x, y) = 2x^3 + 3y + 2x$

$R(y) = 4y^4 + 4y - 2$

El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman. Ejemplos:

$P(x) = 2 \rightarrow$ polinomio de grado cero (el polinomio solo consta de término independiente).

$R(y) = 3y + 2 \rightarrow$ polinomio de grado uno.

$Q(x) = 3x^2 + 2x – 1 \rightarrow$ polinomio de grado 2

$Q(x, y) = 2x^3y - 3xy + 1 \rightarrow$ polinomio de grado 4

(…)

Valor numérico de un polinomio:

Cuando en un polinomio las letras toman valores conocidos, también el polinomio toma un valor conocido.

EXAMPLE Dado el polinomio $\mathbf{P(x) = 3x^2 – 2x + 5}$, calcularemos su valor para:

a) $x = 0 \rightarrow P(0) = 3 \cdot 0^2 – 2 \cdot 0 + 5 = 0 – 0 + 5 = 5.$

El valor numérico del polinomio para $x = 0$ es $5 \rightarrow P(0) = 5.$

b) $x = –2 \rightarrow P(-2) = 3 \cdot (–2)^2 – 2 \cdot (–2) + 5 = 12 + 4 + 5 = 21.$

El valor numérico del polinomio para $x = -2$ es $21 \rightarrow P(-2) = 21$

Practicamos:

1. **Indica el grado, el coeficiente principal y el término independiente de los siguientes polinomios:**

a) $A(x) = 3x^3 - 4x + 5x^5 - 3$

b) $B(x) = 8x - 4x^2 + 5x^3 + x^6$

c) $C(x, y) = 8xy - 7xyz + 7x^3y + 3$

d) $D(x, y) = x^6 - 7xy + 6xy - 3$

e) $E(x, y) = 6x^2 - 3xy + y^5$

f) $F(x) = 2x - x + 7x$

g) $G(x) = x^6 – 1 + 7x^7 + 6x^3 + 1$

h) $H(x) = x^2 - 3x + x^3 – 3$

2. **Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ para:**

a) $x = 1$

b) $x = 3$

c) $x = -1$

d) $x = -2$

e) $x = 0$.

3. **Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = 2x^4 - x^2 + 5x$ para:**

a) $x = 1$

b) $x = 2$

c) $x = -1$

d) $x = ½$

e) $x = 0$.

4. **Calcula el valor de "a" para que los polinomios $p(x) = 2x - 3$ y $q(x) = 2x + a$ sean iguales.**

Suma y resta de polinomios:

Para sumar o restar polinomios se suman (o restan) los monomios semejantes.

Ejemplo: Sean: $P(x) = 2x^3 - 3x + 5$ y $Q(x) = x^3 + 2x^2 + x$

$$\mathbf{P(x) + Q(x) =} (2x^3 - 3x + 5) + (x^3 + 2x^2 + x) =$$

$$2x^3 - 3x + 5 + x^3 + 2x^2 + x = \mathbf{3x^3 + 2x^2 - 2x + 5}$$

Ejemplo: Sean $R(x) = 6x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ y $S(x) = 4x^3 - x^2 + 2x + 1$.

$$\mathbf{R(x) - S(x)} = (6x^3 + 2x^2 - 3x + 1) - (4x^3 - x^2 + 2x + 1) =$$

$$6x^3 + 2x^2 - 3x + 1 - 4x^3 + x^2 - 2x - 1 = \mathbf{2x^3 + 3x^2 - 5x}$$

Practicamos:

1. Dados los polinomios:

$\mathbf{p(x) = 3x^3 - x^2 + 2x}$

$\mathbf{q(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 4}$

$\mathbf{r(x) = 2x^2 - 7x + 6}$

Realiza las siguientes operaciones:

a) $p(x) - q(x) + r(x) =$

b) $p(x) + q(x) - r(x) =$

c) $p(x) - [q(x) + r(x)] =$

d) $r(x) - [p(x) - q(x)] =$

2. **¿Qué polinomio hay que sumar al polinomio $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ para que su suma sea $x^4 - 3x^2 + 2x - 1$?**

3. **¿Qué polinomio hay que restar a $P(x) = 2x^2 - 6x + 1$ para obtener como resultado $x^4 - 2x^2 + 6x - 1$?**

4. **Dados los polinomios $p(x) = mx^3 - 5x - 3$ y $q(x) = -4x^3 - 5x + 7$, calcula m sabiendo que $p(x) + q(x) = -2x^3 - 10x + 4$.**

5. **Dado el polinomio: $p(x) = \frac{3}{4}x^4 - 3x^2 + 6x - \frac{2}{3}$ halla otro polinomio q(x) tal que: $p(x) + q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$**

Producto de polinomios:

Para multiplicar polinomios debemos aplicar la **propiedad distributiva:**

❖ Para multiplicar un polinomio por un monomio se multiplica dicho monomio por cada uno de los monomios del polinomio:

$$4x^2 \cdot (3x^3 - 2x^2 + 6x) =$$
$$= 4x^2 \cdot 3x^3 + 4x^2 \cdot (-2x^2) + 4x^2 \cdot 6x =$$
$$= 12x^5 - 8x^4 + 24x^3$$

❖ Para multiplicar dos polinomios se multiplican TODOS los monomios de ambos polinomios entre sí:

$$(x^2 + 3xy)(5y + 4x - 5) =$$

$$5x^2y + 4x^3 - 5x^2 + 15xy^2 + 12x^2y - 15xy$$

$$\boxed{17x^2y + 4x^3 - 5x^2 + 15xy^2 - 15xy}$$

Practicamos:

1. Halla los siguientes productos:

a) $(2x^2) \cdot (x^4 - 3x^2 + 2x - 1) =$

b) $(-2x^2) \cdot (x^4 - 3x^2 + 2x - 1) =$

c) $(x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot (3x) =$

d) $(x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot (-3x) =$

e) $(-x^3 + 2x^2 - x + 1) \cdot (3x) =$

f) $(-x^3 + 2x^2 - x + 1) \cdot (-3x) =$

2. Realiza las siguientes operaciones con polinomios. Reduce el resultado.

a) $(2x-3)\cdot(4x+2)$

b) $(3x-1)\cdot(2x^2-8x+3)$

c) $(-x-1)\cdot(-x^2-5x+3)$

3. Observa los productos y completa los términos que faltan:

a) $(3x) \cdot (\square + 3x^3 - \square - x + \square) = 6x^5 + \square - 6x^3 - \square + 3x$

b) $(2x^5 - \square + 2x^2 + \square - 2) \cdot (-2x) = \square + 8x^4 - \square - 2x^2 + \square$

c) $(-4x^3) \cdot (3x^5 + \square - 2x^3 - \square + 4x - \square) = \square - 8x^7 + \square + x^5 - \square + 8x^3$

4. Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

$p(x) = 3x^3 + 6x - 5$ $q(x) = x^3 - 2$ $r(x) = x^2 - 6x$

a) $[p(x) + q(x)] \cdot r(x)$

b) $p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot r(x) =$

c) $[p(x)]^2$

d) ¿Cómo son los resultados de los apartados a y b? ¿Sabes por qué? ¿Qué propiedad estás utilizando?

e) p (0)

f) q(-1)

g) r(2)

5. Completa la siguiente tabla:

Grado p(x)	Grado q(x)	Grado p(x) · q(x)
1	5	
1		3
	4	5
1		6

6. **Sabiendo que *P(x)* = *2x⁴* + *x²* – *4x* –*1* y *Q(x)* = *4x⁴* – *2x*. Calcula:**

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $3x^2 \cdot P(x)$

d) $(-2x^3) \cdot Q(x)$

División (o cociente) de polinomios:

1) **División de un polinomio entre un monomio:** Se divide cada uno de los monomios que forman el polinomio entre el monomio.

$$\frac{2x^4-4x^3+8x^2-12x}{2x}=\frac{2x^4}{2x}-\frac{4x^3}{2x}+\frac{8x^2}{2x}-\frac{12x}{2x}=x^3-2x^2+4x-6$$

2) **División de dos polinomios:** Usaremos el **algoritmo de la división** que ya conocemos. Resolveremos un ejemplo paso a paso:

$$\frac{3x^4+5x^3-2x+3}{x^2-3x+2}=$$

❖ Colocamos dividendo (numerador) y divisor (denominador) para empezar la división. Los términos se escriben **en orden decreciente de los grados de sus términos**, es decir, empezando por el de mayor grado, hasta llegar al término de grado 0 (término independiente). **Si falta el término de algún grado en el dividiendo, se deja un espacio.** En nuestro caso no hay término de grado 2:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+5x^3 \qquad\quad -2x+3 & x^2-3x+2 \\ \hline & \end{array}$$

❖ En segundo lugar, dividimos el **primer término del dividendo entre el primer término del divisor** y lo colocamos en el cociente:

$$\begin{array}{l|l} 3x^4+5x^3 \qquad\quad -2x+3 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} & 3x^2 \end{array} \qquad \frac{3x^4}{x^2}=3x^2$$

❖ Ahora, debemos **multiplicar este término del cociente por cada uno de los términos del divisor**. Los colocamos con signo contrario debajo del dividendo, cada uno **debajo de su término semejante**:

$$\begin{array}{l|l} 3x^4+5x^3 \qquad\quad -2x+3 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -3x^4+9x^3-6x^2 & 3x^2 \end{array}$$

❖ Ahora **sumamos** las dos expresiones que tenemos. Al tener cada término debajo de su término semejante, esta suma se realiza de manera más ordenada. Al realizar esta suma, **el término de mayor grado se anula** (es el objetivo de los pasos que hemos dado).

$$\begin{array}{l|l} \cancel{3x^4}+5x^3 \qquad\quad -2x+3 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -\cancel{3x^4}+9x^3-6x^2 & 3x^2 \\ \cline{1-1} \quad 14x^3-6x^2-2x+3 & \end{array}$$

❖ Ahora tenemos una nueva expresión algebraica en el dividendo cuyo grado es mayor que el grado del divisor. **Seguiremos dividiendo, repitiendo todos los pasos, hasta que el dividendo sea de menor grado que el divisor.**

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+5x^3 \qquad - \ 2x+3 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -3x^4+9x^3-\ 6x^2 \qquad\qquad & 3x^2 \\ \hline 14x^3-\ 6x^2-\ 2x+3 & \end{array} \qquad \frac{14x^3}{x^2}=14x$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+5x^3 \qquad - \ 2x+3 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -3x^4+9x^3-\ 6x^2 \qquad\qquad & 3x^2+14x \\ \hline 14x^3-\ 6x^2-\ 2x+3 & \\ -14x^3+42x^2-28x \qquad & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+5x^3 \qquad - \ 2x\ +3 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -3x^4+9x^3-\ 6x^2 \qquad\qquad & 3x^2+14x \\ \hline \cancel{14x^3}-\ 6x^2-\ 2x\ +3 & \\ -\cancel{14x^3}+42x^2-28x \qquad & \\ \hline 36x^2-30x\ +3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+5x^3 \qquad - \ 2x\ +3 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -3x^4+9x^3-\ 6x^2 \qquad\qquad & 3x^2+14x+36 \\ \hline 14x^3-\ 6x^2-\ 2x\ +3 & \\ -14x^3+42x^2-28x \qquad & \\ \hline 36x^2-30x\ +3 & \end{array} \qquad \frac{36x^2}{x^2}=36$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^4+5x^3 & & -2x & +3 & x^2-3x+2 \\ \cline{5-5}
-3x^4+9x^3 & -6x^2 & & & 3x^2+14x+36 \\ \cline{1-4}
14x^3 & -6x^2 & -2x & +3 & \\
-14x^3 & +42x^2 & -28x & & \\ \cline{1-4}
 & 36x^2 & -30x & +3 & \\
 & -36x^2 & +108x & -72 & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^4+5x^3 & & -2x & +3 & x^2-3x+2 \\ \cline{5-5}
-3x^4+9x^3 & -6x^2 & & & 3x^2+14x+36 \\ \cline{1-4}
14x^3 & -6x^2 & -2x & +3 & \\
-14x^3 & +42x^2 & -28x & & \\ \cline{1-4}
 & \cancel{36x^2} & -30x & +3 & \\
 & \cancel{-36x^2} & +108x & -72 & \\ \cline{2-4}
 & & 78x & -69 & \\
\end{array}
$$

❖ La expresión resultante en el dividendo tiene **menor grado** que el divisor y, por tanto, **hemos terminado de dividir.** El resultado de la división es el cociente C(x): $3x^2 + 14x + 36$. El resto R(x): $78x - 69$.

¿Recuerdas la prueba de la división? Dividendo (D) = Divisor (d) · Cociente (C) + Resto (r). En la división de polinomios también se cumple.

$$
\begin{array}{r|l}
127 & 15 \\ \cline{2-2}
7 & 8
\end{array}
$$

$$127 = 8 \times 15 + 7$$

Practicamos:

1. **Determina el cociente y el resto del polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 1$ entre el polinomio $Q(x) = x^2 - 2x + 3$.**

2. **Halla los siguientes cocientes y comprueba el resultado:**

   a) $(18x^5 - 8x^4 + 6x^2) : (-2x)$

   b) $(24x^6 + 9x^4 - 6x^2) : (3x^2)$

   c) $(3x^5 - 12x^4 + 6x^3) : 3x^2$

   d) $(5x^7 - 15x^5 + 20x^4 - 5x^3) : 5x^3$

   e) $(24x^6 - 12x^5 + 32x^4 - 4x^3) : 4x^2$

   f) $(81x^8 - 9x^7 + 15x^5 - x^4 - 3x^3) : 3x$

   g) $(36x^6 - 24x^5 + 12x^4 - 66x^3 + 54x^2) : 6x^3$

   h) $(10x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 12x - 6) : 2x$

3. **Realiza las siguientes divisiones y comprueba el resultado:**

   a) $(3x^5 - 5x^2 - 3x + 4) : (x + 3)$

   b) $(6x^3 + 8x^2 - 10x - 3) : (2x - 4)$

   c) $(4x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 4x - 3) : (2x^2 - 4x)$

   d) $(6x^4 - 9x^3 - 12x^2 + 3x - 5) : (3x^2 - 3x + 6)$

4. **El cociente entre un polinomio y el monomio $3x^2$ es $5x^4 - 3x^2 + 2x$ y el resto $2x$. ¿Cuál es dicho polinomio?**

5. **¿Cuánto tiene que valer "a" en el polinomio $3x^4 - 2x^3 + 6x^2 + a$ para que al dividirlo entre el monomio $3x^2$ el cociente sea exacto?**

BINOMIOS (PRODUCTOS O IDENTIDADES) NOTABLES:

Llamamos así a ciertos **productos de binomios** cuya memorización resulta útil para abreviar los cálculos con expresiones algebraicas.

❖ Cuadrado de una suma:

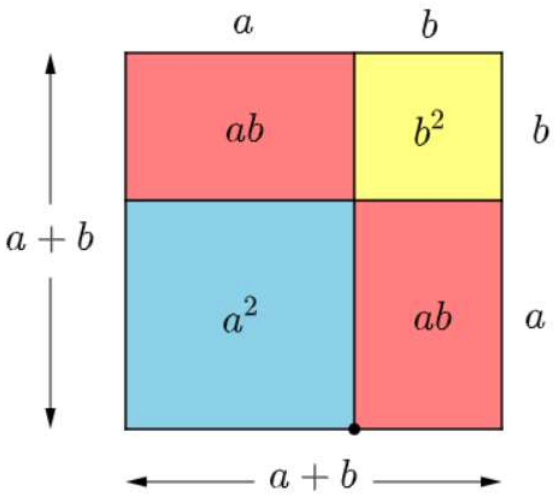
$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- **Demostraciones:**

  - ✓ **Desarrollando la expresión:**

    $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

  - ✓ **Geométricamente:**



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$(a+b)^2$: *área del cuadrado completo.*

a^2 : *área del cuadrado azul.*

$2ab$: *área de los dos rectángulos rojos.*

b^2 : *área del cuadrado amarillo.*

❖ Cuadrado de una diferencia:

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

✓ **Demostración (desarrollando la expresión):**

$\mathbf{(a - b)^2} = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$

❖ Suma por diferencia:

$$\boxed{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

✓ **Demostración (desarrollando la expresión):**

$\mathbf{(a + b) \cdot (a - b)} = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ba} - b^2 = \mathbf{a^2 - b^2}$

RECUERDA **Cuadro Resumen:**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Practicamos:

1. **Desarrolla las siguientes expresiones y comprueba que su resultado es el mismo que empleando la fórmula:**

a) $(x + y)^2 =$ **d)** $(x^2 + 2)^2 =$ **g)** $(a^3 + b^2)^2 =$

b) $(3x - 2)^2 =$ **e)** $(3x + 2) \cdot (3x - 2)$ **h)** $(-3a^2 + x)^2 =$

c) $(x + 1) \cdot (x - 1) =$ **f)** $(\frac{x}{2} - 1)^2 =$ **i)** $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 =$

2. **Desarrolla las siguientes expresiones:**

a) $(x - 2)^3$ **c)** $(x - 3)^4$

b) $(2a + 3)^3$ **d)** $(2y - x)^4$

3. **Desarrolla las siguientes igualdades notables:**

a) $(x+2)^2$

b) $(x-2)^2$

c) $(3x+1)^2$

d) $(3x-1)^2$

e) $(x^2-2)^2$

f) $(x^2+2x)^2$

g) $(x+2)\cdot(x-2)$

h) $(3x+1)\cdot(3x-1)$

i) $\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{3}\right)$

4. **Calcula los siguientes productos:**

a) $(x + y) \cdot (x - y) =$ **f)** $(\frac{1}{2}x + 1) \cdot (\frac{1}{2}x - 1) =$

b) $(3x + 2) \cdot (3x - 2) =$ **g)** $(a^3 + b^2) \cdot (a^3 - b^2) =$

c) $(x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2) =$

h) $(-3a^2 + x) \cdot (3a^2 + x) =$

d) $(2ax + 4) \cdot (2ax - 4) =$

i) $(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$

e) $(\sqrt{x} + 2) \cdot (\sqrt{x} - 2) =$

5. Expresa, siempre que sea posible, en forma de binomio notable:

a) $x^2 - 4x + 4$
b) $x^2 + 6x + 9$
c) $x^2 - 2x + 1$
d) $a^4 – 6a^2 + 9$
e) $x^2 - 2x - 1$
f) $x^2 + 4xy + y^2$
g) $4x^2 - 4x + 1$
h) $x^2 - 1$
i) $x^2 + 1$
j) $4x^4 – 9x^2$
k) $9 – x^2$
l) $x^2 +10x + 25$
m) $25 + x^2 + 10x$
n) $-10a + 25 + a^2$
o) $9y^2 + 2yx + x^2$
p) $x^2 - 25$

6. Completa los términos que faltan en las siguientes expresiones:

a) $(a + 2b^2)^2 = a^2 +$ __ $+ 4b^4$

e) $(2y + 3xz)^2 =$ __ $+ 12xyz +$ __

b) $(x - 3y)^2 = x^2 - 6xy +$ __

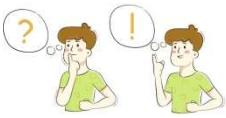
f) $(x^3 - 3y^2z)^2 = x^6 -$ __ $+$ __

c) $x^2 -$ __ $+ 16 = (x - 4)^2$

g) $16x^2 -$ __ $+ 9 = ($ __ $-$ __ $)^2$

d) $25x^2 +$ __ $+ 1 = (5x +$ __ $)^2$

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL O FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO:



Recordemos: Descomponer en factores un número es descomponerlo en forma de una multiplicación de números cuyo resultado es el número en cuestión. Por ejemplo, el 24 lo podemos descomponer de diversas maneras:

$24 = 2 \times 12$

$24 = 6 \times 4$

$24 = 1 \times 24$

Y también…

$24 = 6 \times 2 \times 2$

$24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1$

Todas las descomposiciones anteriores son descomposiciones en factores, pero sólo una (3 × 2 × 2 × 2 ×1) es **una descomposición en factores primos** puesto que en ella todos los factores son números primos. Un modo de obtener esta descomposición en factores primos sería dividir sucesivamente el número entre los números primos hasta que ya no podamos hacerlo más.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$50 = 2 \cdot 5^2 \qquad 165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

Descomponer factorialmente un polinomio es un proceso similar y consiste en expresar dicho polinomio como un **producto de otros polinomios de menor grado**. Para ello podemos seguir una o varias de las siguientes estrategias:

1) **Factorizar aplicando identidades notables:**

$16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2$

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

$x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$

$x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$

2) **Factorizar extrayendo factor común:** Sacar factor común es la operación inversa a aplicar la **propiedad distributiva**. Fíjate en los siguientes ejemplos. Debemos factorizar cada monomio y luego fijarnos en cual es la parte común. Esa parte común no es más que el máximo común divisor de cada monomio.

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{r|l} 93 & 3 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 62 & 2 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 124 & 2 \\ 62 & 2 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

$$93a^3x^2y \quad - \quad 62a^2x^3y^2 \quad - \quad 124a^2x$$

$$\boxed{3}\cdot\cancel{31}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\boxed{a}\cdot\cancel{x}\cdot\boxed{x\cdot y}-\boxed{2}\cdot\cancel{31}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{x}\cdot\boxed{x\cdot x\cdot y\cdot y}-\boxed{2\cdot 2}\cdot\cancel{31}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{x}$$

Saquemos lo común

$$(31\cdot a\cdot a\cdot x)\;(3\cdot a\cdot x\cdot y-2\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y-2\cdot 2)$$

Factor común

$$(31a^2x)(3axy-2x^2y^2+4)$$

Ejemplo 2:

$25x^4 - 30x^3 + 5x^2 = \mathbf{5}\cdot 5\cdot \mathbf{x}\cdot \mathbf{x}\cdot x\cdot x - 2\cdot 3\cdot \mathbf{5}\cdot \mathbf{x}\cdot \mathbf{x}\cdot x + \mathbf{5}\cdot \mathbf{x}\cdot \mathbf{x} = 5x^2\,(5x^2 - 6x + 1)$

$5x^2$ es el factor común

3) **Factorizar calculando las raíces del polinomio.** Regla de Ruffini. Lo haremos en cursos venideros.

Practicamos:

1. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $5x^3 + 15x^2$

b) $4x^3 - 2x^2 + 5x$

c) $8x^3y^4 + 4x^2y$

d) $2a^4b^3 - a^2b^3$

2. Factoriza los siguientes polinomios usando productos notables:

a) $x^2 - 4x + 4$

b) $x^2 + 6x + 9$

c) $x^2 - 2x + 1$

d) $x^2 - 1$

e) $x^2 - 4$

f) $4x^2 - 9$

3. Saca factor común y/o emplea los productos notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 2x^2 + x =$

b) $x^3 - 4x^2 + x =$

c) $3x^3y - 9xy^2 + 27x^4y^3 =$

d) $5y^2x - 15yx^2 + y^3x^4 =$

e) $6x^2y^2 - 9x^3y^6 + 27xy^3 =$

f) $4x^3y^2 - 8x^2y^3 + 2x^4y =$

g) $3x^5y^4 + 9x^2y^3 - 3xy + 3y =$

h) $6xy + 54x^2y - 3xy^2 =$

i) $16x^2y^2 + 4xy^3 - 28x^3y^3 =$

j) $5z^3 + z^5 - z^2 =$

FRACCIONES ALGEBRAICAS:

Una fracción algebraica es un cociente entre polinomios:

$$\frac{4x+3}{2x-2y} \qquad \frac{3a^2-2b}{5x+3a} \qquad \frac{2x}{3xy+2x}$$

En algunos casos se pueden **simplificar las fracciones algebraicas** y para ello podemos utilizar cualquiera de las estrategias vistas en el punto anterior. Se simplifican del mismo modo que simplificamos las fracciones "ordinarias".

$$\frac{24}{36}=\frac{2^3\bullet 3}{2^2\bullet\ 3^2}=\frac{\cancel{2}\bullet\cancel{2}\bullet 2\bullet\cancel{3}}{\cancel{2}\bullet\cancel{2}\bullet\cancel{3}\bullet 3}=\frac{2}{3}$$

Ejemplo 1: Usando las "Igualdades Notables".

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}$$

Ejemplo 2: Extrayendo factor común:

$$\frac{3x-9}{x^2-3x}=\frac{3\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}}=\frac{3}{x}$$

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{3x^2-3}{9x^2+18x+9}$

c) $\dfrac{3a}{9a^2+6a}$

d) $\dfrac{7}{7x+7}$

e) $\dfrac{4a^2x}{16axy}$

f) $\dfrac{3ax-3ay}{6x^2-6y^2}$

g) $\dfrac{2xy+4y^2}{6xy}$

h) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

i) $\dfrac{x+y}{x^2+xy}$

j) $\dfrac{x^4-1}{(x+1)\cdot(x-1)}$

k) $\dfrac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$

l) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{3x+3y}$

m) $\dfrac{x^2+xy}{x+y}$

n) $\dfrac{x^2-a^2}{x+a}$

o) $\dfrac{5x+5}{3x+3}$

p) $\dfrac{x^2-3x}{2x-6}$

q) $\dfrac{4x^5+4x^4}{12x^4+24x^3+12x^2}$

r) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$

s) $\dfrac{12x}{4x^2+2x}$

t) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$

u) $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$

v) $\dfrac{x^2-4}{2x-4}$

w) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

x) $\dfrac{x^2-16}{x^2+8x+16}$

y) $\dfrac{x(x+2)}{x^2+4x+4}$

z) $\dfrac{x^2-9}{x^4-81}$

@ WEBGRAFÍA:

- División de polinomios. Ekuatio.com. https://ekuatio.com/como-dividir-polinomio-entre-polinomio/#google_vignette

- Divisiones de polinomios. www.superprof.es. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/polinomios/division-de-polinomios.html