SOLUCIÓN BOLETÍN 5.5 .- APLICACIONES DE LA DERIVADA (PROBLEMAS)

1

a.- Nos piden calcular $\lim_{t\to+\infty} P(t)$.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} 1000\left(15+\frac{t}{100+t^2}\right) = \lim_{t\to+\infty} 1000\left(15+\frac{\frac{t}{t^2}}{\frac{100}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} 1000\left(15+\frac{\frac{1}{t}}{\frac{100}{t^2}+1}\right) = 1000\left(15+\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{100}{\infty}+1}\right) = 1000\left(15+\frac{0}{0+1}\right) = 15000$$

Cuando transcurran muchos años la tendencia es que el número de habitantes se estabilice en torno a los 15000 habitantes.

b.- Utilizamos la derivada.

$$P(t) = 15000 + \frac{1000t}{100+t^2} \Rightarrow P'(t) = \frac{1000(100+t^2) - 2t(1000t)}{(100+t^2)^2} = \frac{100000 + 1000t^2 - 2000t^2}{(100+t^2)^2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} P'(t) = \dfrac{100000-1000t^2}{(100+t^2)^2} \\ P'(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{100000-1000t^2}{(100+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 100000 - 1000t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow t = \sqrt{100} = \pm 10$$

Nos quedamos solo con el valor positivo $t = 10$.

Estudiamos el cambio de signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $(0,10)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale

$P'(5) = \dfrac{100000 - 1000\cdot 5^2}{(100+5^2)^2} = \dfrac{75000}{125^2} > 0$. La función crece en $(0,10)$.

En el intervalo $(10,+\infty)$ tomamos $t = 20$ y la derivada vale

$P'(20) = \dfrac{100000 - 1000\cdot 20^2}{(100+20^2)^2} = \dfrac{-300000}{250000} < 0$. La función decrece en $(10,+\infty)$.

La población crece desde el año 2000 al año 2010 y decrece del año 2010 en adelante.

La población es máxima en el año 2010 y su población es el valor de $P(10)$.

$$P(10) = 1000\left(15 + \frac{10}{100+10^2}\right) = 15050$$

La población máxima es de 15050 habitantes en el año 2010.

c.- Igualamos la función a 15040.

$$P(t)=15040 \Rightarrow 1000\left(15+\frac{t}{100+t^2}\right)=15040 \Rightarrow 15+\frac{t}{100+t^2}=\frac{15040}{1000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{100+t^2}=15.04-15=0.04 \Rightarrow t=0.04\left(100+t^2\right) \Rightarrow t=4+0.04t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.04t^2+t-4=0 \Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-0.04)(-4)}}{2(-0.04)}=\frac{-1\pm 0.6}{-0.08}=\begin{cases}\dfrac{-1+0.6}{-0.08}=5=t\\ \dfrac{-1-0.6}{-0.08}=20=t\end{cases}$$

La población es de 15040 en dos momentos: transcurridos 5 y 20 años, es decir, en el año 2005 y en el 2020.

2

a.- Los ingresos son $I(x)=400x$, por lo que la función beneficios es:

$$B(x)=I(x)-C(x)=400x-\left(x^2+80x+10.000\right)=-x^2+320x-10000$$

Utilizamos la derivada para hallar sus puntos críticos.

$$B(x)=-x^2+320x-10000 \Rightarrow B'(x)=-2x+320$$
$$B'(x)=0 \Rightarrow -2x+320=0 \Rightarrow 2x=320 \Rightarrow x=\frac{320}{2}=160$$

Comprobamos si el punto crítico obtenido es máximo o mínimo usando el signo de la segunda derivada.

$$B'(x)=-2x+320 \Rightarrow B''(x)=-2 \Rightarrow B''(160)=-2<0 \Rightarrow x=160 \text{ es máximo}$$

El beneficio es máximo con 160 unidades producidas y vendidas.

$$B(160)=-160^2+320\cdot 160-10000=15600$$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 15600 €.

b.- Obtenemos la expresión del coste medio.

$$CM(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{x^2+80x+10.000}{x}=x+80+\frac{10000}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} CM'(x)=1-\dfrac{10000}{x^2} \\ CM'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-\frac{10000}{x^2}=0 \Rightarrow 1=\frac{10000}{x^2} \Rightarrow x^2=10000 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{10000}=+100}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda en $x = 100$.

$$CM'(x)=1-\frac{10000}{x^2}=1-10000x^{-2} \Rightarrow CM''(x)=-(-2)10000x^{-3}=\frac{20000}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM''(100)=\frac{20000}{100^3}>0 \Rightarrow \boxed{x=100 \text{ es mínimo}}$$

El coste medio se minimiza en un nivel de producción de 100 unidades.

a) Como sabemos que los días que se producen 3 toneladas, los beneficios son 112 miles de euros, se tiene que $112 = f(3) = 22 + 3a$, con lo que $a = 30$.

Por otro lado, la función es continua en cada uno de sus dos intervalos de definición (ambos son polinomios) y el único posible punto de discontinuidad es el 3, observamos que:

- En cuanto al valor de la función: $f(3) = 112$.
- En cuanto a los límites:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (22 + 30x) = 112 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (100 + 30 + 9b) = 130 + 9b$$

De todo lo anterior se deduce que $112 = 130 + 9b$ y, por tanto, $b = -2$, con lo que la función f viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + 30x & \text{si } 1 \le x \le 3, \\ 100 + 10x - 2x^2 & \text{si } 3 < x \le 10, \end{cases}$$

b) Según el enunciado, y al tratarse de una función definida a trozos mediante dos polinomios, es evidente que el dominio de definición de f es todo el intervalo $[1, 10]$.

En cuanto a los puntos de corte:

- Es evidente que f no se anula en el intervalo $[1, 3]$, puesto que $22 + 30x = 0 \Leftrightarrow x = -11/15 \notin [1, 3]$.
- $100 + 10x - 2x^2 = -2(x - 10)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 10 \in (3, 10]$ o $x = -5 \notin (3, 10]$, con lo que f corta al eje de abscisas en el punto $(10, 0)$.

Por otro lado se tiene que $f(1) = 22 + 30 = 52$.

Además, sabemos por el enunciado que es continua en todo su dominio.

Vamos a continuar estudiando la monotonía de esta función:

- En el primer trozo, $f'(x) = 30 > 0$, con lo que la función f es creciente en el intervalo $(1, 3)$.
- En el segundo trozo, $f'(x) = 10 - 4x < 0, \forall x \in (3, 10)$, con lo que f es decreciente en el intervalo $(3, 10)$.

En cuanto a la derivada segunda,

- En el primer trozo, $f''(x) = 0$, con lo que la función f es una recta en el intervalo $(1, 3)$.
- En el segundo trozo, $f''(x) = -4 < 0, \forall x \in (3, 10]$, con lo que f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(3, 10)$.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

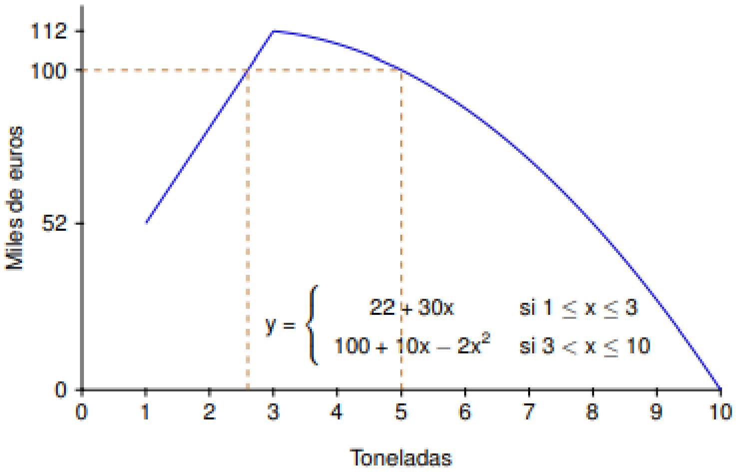


Figura 2: Representación gráfica de f.

Como se puede deducir de dicha representación gráfica, si el beneficio ha sido de 100 miles de euros, como $22 + 30x = 100 \Leftrightarrow x = 2.6$ y $100 + 10x - 2x^2 = 100 \Leftrightarrow 2x(5 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $x = 5$, se tiene que se pueden haber producido tanto 2.6 toneladas, como 5 toneladas.

También se deduce de dicha gráfica y del estudio de la función, que el beneficio mínimo es de 0 euros y que el beneficio máximo es de 112 miles de euro.

4

a) La función f viene dada por distintos polinomios en los tres intervalos considerados al definirla, con lo que los únicos posibles puntos de discontinuidad son x = 2 y x = 4. Se tiene que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 4a, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 3(x^2 - 6x + 12) = 12$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = 12, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} -x^2 + 11x - 16 = 12$$

con lo que f es continua en x = 4 y existe el límite en x = 2 si 4a = 12 o, equivalentemente, si a = 3. En tal caso el límite coincide con el valor de la función y, por tanto, si a = 3, f es continua en todo su dominio.

b) El dominio de definición de f es el intervalo [0, 8]. La función es lineal en el intervalo [0, 2], es una parábola en el intervalo (2, 4] y otra en el intervalo (4, 8]. Además hemos visto que es continua, con f(0) = 6, f(2) = 12, f(4) = 12 y f(8) = 8. Además se tiene que $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in [0, 8]$. En el primer tramo es una recta de pendiente positiva con f(0) = 6, en el segundo tramo es una parábola con vértice (mínimo) en x = 3 y f(3) = 9 y en el tercer tramo, al ser una parábola cuyo vértice es el máximo y f(4) = 12 y f(8) = 6, también se comprueba que no corta al eje X en su dominio. Por tanto, f no corta a los ejes más que en el punto (0, 6).

Si analizamos la expresión de la función en el intervalo [2, 4] tenemos que $f'(x) = 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, $f''(x) = 6 > 0$, con lo que x = 3 es un mínimo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia arriba. Además a partir de la derivada primera obtenemos que decrece en el intervalo (2, 3) y crece en (3, 4).

Si nos centramos en el intervalo [4, 8], $f'(x) = -2x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = 5.5$, $f''(x) = -2 < 0$, con lo que x = 5.5 es un máximo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo. Además a partir de la derivada primera obtenemos que crece en el intervalo (4, 5.5) y decrece en (5.5, 8).

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

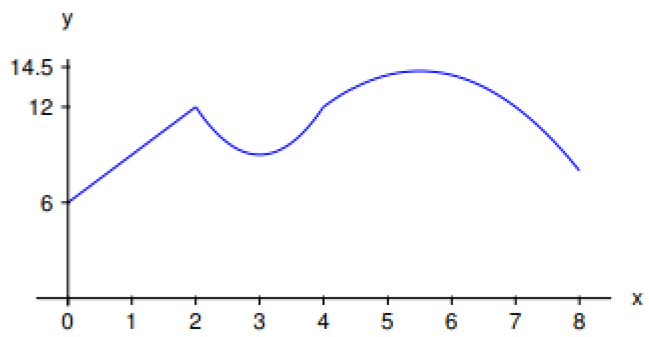


Figura 2: Representación gráfica de f.

Así pues, el consumo máximo se alcanza a las 11:30 de la mañana (x = 5.5) y el mínimo a las 6:00 (x = 0).

5

A. Utilizamos la derivada de la función para obtener sus puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{l} P'(t) = 60t - 240 \\ P'(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 60t - 240 = 0 \Rightarrow t - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 4}$$

Sustituimos *t* = *4* en la segunda derivada para comprobar si es un máximo o un mínimo relativo.

$$P''(t) = 60 \Rightarrow P''(4) = 60 > 0 \Rightarrow t = 4 \text{ es mínimo relativo}$$

Para *t* = *4* tenemos que $P(4) = 30 \cdot 4^2 - 240 \cdot 4 + 3000 = 2520\,kg$

El número mínimo de fruta se produce a las 4 horas de estar abierta la frutería, teniendo 2520 kg de fruta en dicho momento.

B. Obtenemos la expresión del beneficio como la diferencia entre los ingresos y los costes de producción.

Los costes de producir x pantalones es $C(x) = 120x + 700$.

Los ingresos por su venta son $P(x) = x(200 - x)$.

$$B(x) = P(x) - C(x) = x(200 - x) - (120x + 700) = 200x - x^2 - 120x - 700 = -x^2 + 80x - 700$$

Buscamos el máximo de la función beneficio usando la derivada primera y segunda.

$$\left.\begin{array}{l} B'(x) = -2x + 80 \\ B'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x + 80 = 0 \Rightarrow x - 40 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 40}$$

$$B''(x) = -2 \Rightarrow B''(40) = -2 < 0 \Rightarrow x = 40 \text{ es máximo relativo}$$

Con la fabricación y venta de 40 pantalones se obtienen unos beneficios máximos.
Estos beneficios máximos tienen un valor de $B(40) = -40^2 + 80 \cdot 40 - 700 = 900$ euros.

6

a) Nos piden el valor de *f(1)*.

$$f(1) = 10\left(-\frac{1^3}{8} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{9}{2} + 10\right) = \frac{275}{4} = 68.75$$

El primer lunes se gastaron 68.75 kg de comida.

Los kilos de comida del lunes siguiente es *f(8)*.

$$f(8) = 10\left(-\frac{8^3}{8} + \frac{3 \cdot 8^2}{2} - \frac{9 \cdot 8}{2} + 10\right) = 60$$

El lunes siguiente se gastaron 60 kg de comida.

Nos piden el valor de t para el que $f(t) = 100$.

$$100 = 10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10\right) \Rightarrow 10 = -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 \Rightarrow -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^3 + 12t^2 - 36t = 0 \Rightarrow -t\left(t^2 - 12t + 36\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 12t + 36 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(36)}}{2} = \dfrac{12 \pm 0}{2} = 6 \end{cases}$$

El valor $t = 0$ no se corresponde con ningún día de los considerados. Solo es válido el valor $t = 6$.
Se consumieron 100 kg de comida el día 6, es decir, el sábado.

b) Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

$$\left.\begin{array}{r} f'(t) = 10\left(-\dfrac{3t^2}{8} + \dfrac{6t}{2} - \dfrac{9}{2}\right) \\ f'(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 10\left(-\frac{3t^2}{8} + \frac{6t}{2} - \frac{9}{2}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{3t^2}{8} + \frac{6t}{2} - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3t^2 + 24t - 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(12)}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{8+4}{2} = \boxed{6 = t} \\ \frac{8-4}{2} = \boxed{2 = t} \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo [1, 8] y en los puntos críticos obtenidos para decidir donde se alcanza el valor máximo y mínimo.

$$f(1) = 10\left(-\frac{1^3}{8} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{9}{2} + 10\right) = \frac{275}{4} = 68.75$$

$$f(2) = 10\left(-\frac{2^3}{8} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{9 \cdot 2}{2} + 10\right) = 10(-1 + 6 - 9 + 10) = 60 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$f(6) = 10\left(-\frac{6^3}{8} + \frac{3 \cdot 6^2}{2} - \frac{9 \cdot 6}{2} + 10\right) = 10(-27 + 54 - 27 + 10) = 100 \text{ ¡Máximo!}$$

$$f(8) = 10\left(-\frac{8^3}{8} + \frac{3 \cdot 8^2}{2} - \frac{9 \cdot 8}{2} + 10\right) = 60 \text{ ¡Mínimo!}$$

El menor consumo se produjo el día 2 (martes) y el día 8 (lunes siguiente) siendo un consumo de 60 kg.
El mayor consumo se produjo el día 6 (sábado) siendo un consumo de 100 kg.

7

a) Utilizamos la derivada y según su signo la función crece o decrece.

$$N'(t) = 3t^2 - 48t + 180$$

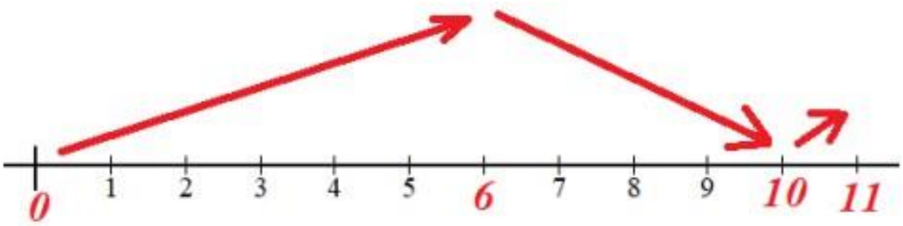
$$N'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 48t + 180 = 0 \Rightarrow t^2 - 16t + 60 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(1)(60)}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{16+4}{2} = 10 = t \\ \frac{16-4}{2} = 6 = t \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo (0, 6) tomamos $t = 1$ y la derivada vale $N'(1) = 3 \cdot 1^2 - 48 \cdot 1 + 180 = 135 > 0$.
La función crece en (0, 6).
En el intervalo (6, 10) tomamos $t = 7$ y la derivada vale $N'(7) = 3 \cdot 7^2 - 48 \cdot 7 + 180 = -9 < 0$.
La función decrece en (6, 10).
En el intervalo (10, 11) tomamos $t = 10.5$ y la derivada vale
$N'(10.5) = 3 \cdot 10.5^2 - 48 \cdot 10.5 + 180 = 6.75 > 0$. La función crece en (10, 11).

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en (0, 6) ∪ (10, 11) y decrece en (6, 10).

b) $N(11) = 11^3 - 24 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 + 8000 = 8407$.
En el año 11 hay depositados 8407 millones de litros en el embalse.

c) Observando el esquema de evolución de la función del dibujo superior el máximo absoluto solo puede estar en el año 6 o en el 11. Comparamos los valores de la función en dichos años.

$$\left.\begin{array}{l} N(6) = 6^3 - 24 \cdot 6^2 + 180 \cdot 6 + 8000 = 8432 \\ N(11) = 8407 \end{array}\right\} \Rightarrow N(6) > N(11)$$

El año 6 tuvo la mayor cantidad de agua depositada, siendo esta de 8432 millones de litros.

8

a) **Si** $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$ significa que la derivada segunda se anula en dicho valor.

$$B(t) = t(t-a)^2 = t\left(t^2 - 2at + a^2\right) = t^3 - 2at^2 + a^2 t$$

$$B'(t) = 3t^2 - 4at + a^2 \Rightarrow B''(t) = 6t - 4a$$

$$\left.\begin{array}{l} B''(t) = 6t - 4a \\ B''(6) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 6 \cdot 6 - 4a \Rightarrow 4a = 36 \Rightarrow \boxed{a = \frac{36}{4} = 9}$$

El valor buscado es $a = 9$.

b) Para $a = 9$ la función queda $B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t$.
Hallamos los puntos críticos usando la derivada.

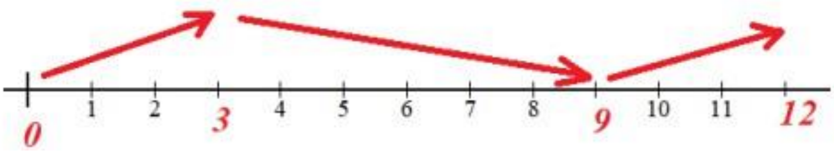
$$\left.\begin{array}{l} B'(t) = 3t^2 - 36t + 81 \\ B'(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(27)}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{12+6}{2} = 9 = t \\ \frac{12-6}{2} = 3 = t \end{cases}$$

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo (0, 3) tomamos $t = 1$ y la derivada vale $B'(1) = 3 \cdot 1^2 - 36 \cdot 1 + 81 = 48 > 0$. La función crece en (0, 3).
En el intervalo (3, 9) tomamos $t = 4$ y la derivada vale $B'(4) = 3 \cdot 4^2 - 36 \cdot 4 + 81 = -15 < 0$. La función decrece en (3, 9).
En el intervalo (9, 12) tomamos $t = 10$ y la derivada vale $B'(10) = 3 \cdot 10^2 - 36 \cdot 10 + 81 = 21 > 0$. La función crece en (9, 12).

La función sigue el esquema siguiente:



La función tiene un máximo relativo en $t = 3$ y un mínimo relativo en $t = 9$.
Valoramos la función en $t = 12$ y lo comparamos con el valor de la función en $t = 3$.

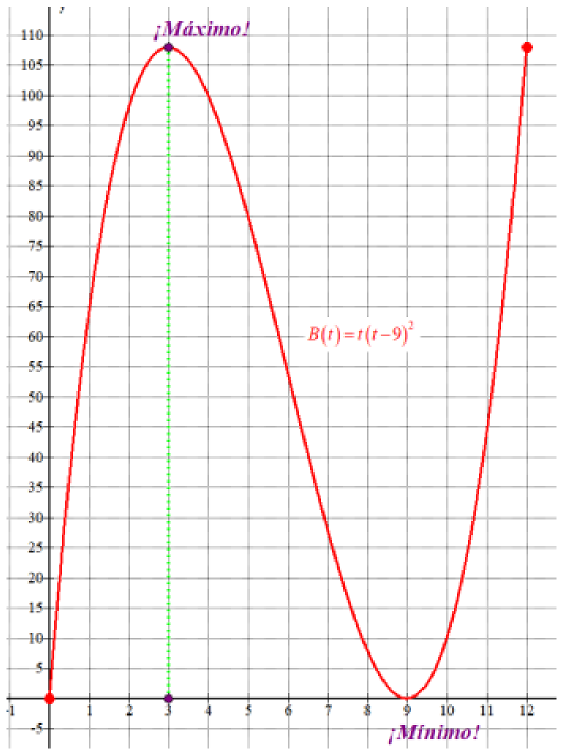
$$B(t)=t(t-9)^2 \Rightarrow \begin{cases} B(3)=3(3-9)^2=108 \\ B(12)=12(12-9)^2=108 \end{cases}$$

La función beneficio toma su máximo valor transcurridos 3 y 12 meses. Este beneficio máximo es de 108 cientos de euros = 10800 euros.

c) Según el esquema superior la función crece en (0, 3) ∪ (9, 12) y decrece en (3, 9). Realizamos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

$B(t)=t(t-9)^2, \quad 0 \le t \le 12$

t	$B(t)$
0	0
1	64
3	108
5	80
9	0
10	10
12	108



9

a.- $C_m(q)=C'(q)=300-20q+q^2$

Derivamos el coste marginal y vemos cuando la derivada es positiva.

$$C_m'(q)=-20+2q$$
$$C_m'(q)=0 \Rightarrow -20+2q=0 \Rightarrow q=\frac{20}{2}=10$$

El crecimiento del coste marginal es nulo cuando se producen 10 unidades. Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $q = 10$.

De 0 a 10 unidades tomamos $q = 5$ y tenemos que $C_m'(5)=-20+2(5)=-10<0$. Por lo que el coste marginal decrece cuando aumenta la producción.
De 10 en adelante tomamos $q = 15$ y tenemos que $C_m'(15)=-20+2(15)=10>0$. Por lo que el coste marginal crece cuando aumenta la producción en el intervalo (15, +∞).

El coste marginal aumenta a partir de la producción de 10 unidades.

b.- Obtenemos la expresión del coste medio.

$$CM(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{300q-10q^2+\frac{q^3}{3}}{q}=300-10q+\frac{q^2}{3}$$

Derivamos e igualamos a cero para obtener el punto crítico del coste medio.

$$CM'(q)=-10+2\frac{q}{3}$$

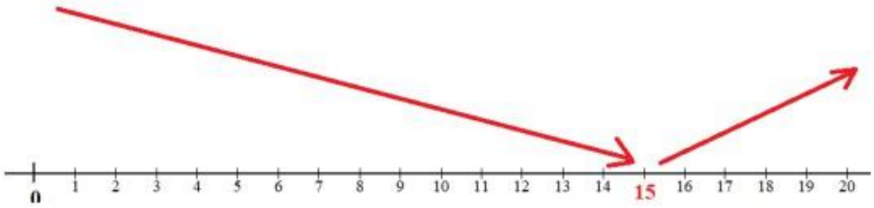
$$CM'(q)=0\Rightarrow -10+2\frac{q}{3}=0\Rightarrow -30+2q=0\Rightarrow q=\frac{30}{2}=15$$

Comprobamos la evolución del coste medio estudiando el signo de la derivada antes de $q = 15$ y después de dicho valor.

En (0, 15) tomamos $q = 10$ y tenemos que $CM'(10)=-10+2\frac{10}{3}=-\frac{10}{3}<0$. El coste medio decrece en (0, 15).

En (15, +∞) tomamos $q = 20$ y tenemos que $CM'(10)=-10+2\frac{20}{3}=\frac{10}{3}>0$. El coste medio crece en (0, 15).

La función sigue el esquema siguiente:



El coste medio se minimiza en $q = 15$. Con la producción de 15 unidades.

c.- Los ingresos son el número de unidades (q) multiplicado por el precio de una unidad ($P(q)$).

$$I(q)=q\cdot P(q)-C(q)=q(240-2q)=240q-2q^2$$

Obtenemos la expresión de la función Beneficios.

$$B(q)=I(q)-C(q)=240q-2q^2-\left(300q-10q^2+\frac{q^3}{3}\right)$$

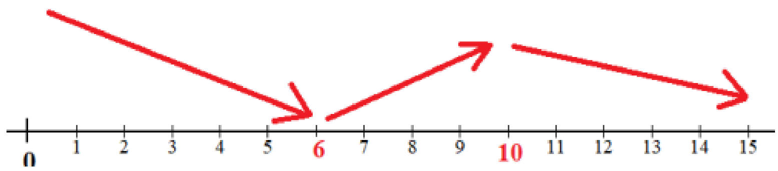
$$B(q)=240q-2q^2-300q+10q^2-\frac{q^3}{3}=-60q+8q^2-\frac{q^3}{3}$$

Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función beneficios.

$$B(q)=-60q+8q^2-\frac{q^3}{3}\Rightarrow B'(q)=-60+16q-q^2$$

$$B'(q)=0\Rightarrow 60-16q+q^2=0\Rightarrow q=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4(60)}}{2}=\frac{16\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{16+4}{2}=\boxed{10=q}\\ \frac{16-4}{2}=\boxed{6=q}\end{cases}$$

La función sigue el esquema siguiente:



El beneficio es máximo en $q = 10$, es decir, con la producción de 10 unidades.

10

a.- Para que sea continua debe serlo en $x = 0$ y en $x = 3$.

Continua en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{ax+b} = \sqrt{b} \\ f(0) = 2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{b} \Rightarrow 4\cdot 3 = b \Rightarrow \boxed{b = 12}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} & si \quad x \le 0 \\ \sqrt{ax+12} & si \quad 0 < x \le 3 \\ \frac{7}{2} - \frac{x}{6} & si \quad x > 3 \end{cases}$

Continua en $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{ax+12} = \sqrt{3a+12} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{7}{2} - \frac{x}{6} = \frac{7}{2} - \frac{3}{6} = 3 \\ f(3) = \sqrt{3a+12} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{3a+12} = 3 \Rightarrow 3a+12 = 9 \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 12$.
Con estos valores la expresión $\sqrt{-x+12}$ existe en el intervalo $0 < x \le 3$.

b.- Para $a = -1$ y $b = 12$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} & si \quad x \le 0 \\ \sqrt{-x+12} & si \quad 0 < x \le 3 \\ \frac{7}{2} - \frac{x}{6} & si \quad x > 3 \end{cases}$

La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{0,3\}$ es $f'(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x+12}} & si \quad 0 < x < 3 \\ -\frac{1}{6} & si \quad x > 3 \end{cases}$

Estudiamos su derivabilidad en $x = 0$ viendo si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 2\cdot 0 = 0 \\ f'(0^+) = \frac{-1}{2\sqrt{-0+12}} = -\frac{1}{2\sqrt{12}} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-) \ne f'(0^+)$$

No es derivable en $x = 0$.

Estudiamos su derivabilidad en $x = 3$ viendo si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = \frac{-1}{2\sqrt{-3+12}} = \frac{-1}{6} \\ f'(3^+) = -\frac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+)$$

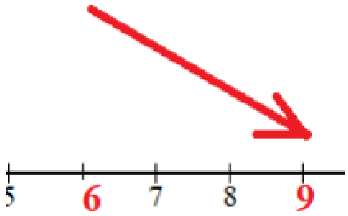
Si es derivable en $x = 3$.

c.- En el intervalo $[6,9]$ la función es $f(x)=\frac{7}{2}-\frac{x}{6}$.

Buscamos los extremos relativos.

$$f(x)=\frac{7}{2}-\frac{x}{6} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{6}<0$$

La función siempre es decreciente.



El valor máximo se alcanza en *x = 6* y el mínimo en *x = 9*.

El valor máximo es $f(6)=\frac{7}{2}-\frac{6}{6}=\frac{5}{2}=2.5$ y el mínimo es $f(9)=\frac{7}{2}-\frac{9}{6}=2$.

Las coordenadas del máximo son (6, 2.5) y del mínimo son (9, 2)

11

a) La función es continua en cada intervalo de definición. Comprobamos si lo es en cada cambio de definición.

¿En x = 1 es continua?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 35=35 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 25+10x=25+10=35 \\ f(1)=25+10=35 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=35$$

La función f(x) es continua en x = 1.

¿En x = 2 es continua?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 25+10x=45 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} -0.5x^2+4x+a=-0.5\cdot 2^2+4\cdot 2+a=6+a \\ f(2)=6+a \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow 6+a=45 \Rightarrow \boxed{a=39}$$

La función f(x) es continua en x = 2 si a = 39.

Para que la función sea continua en todo su dominio debe ser a = 39.

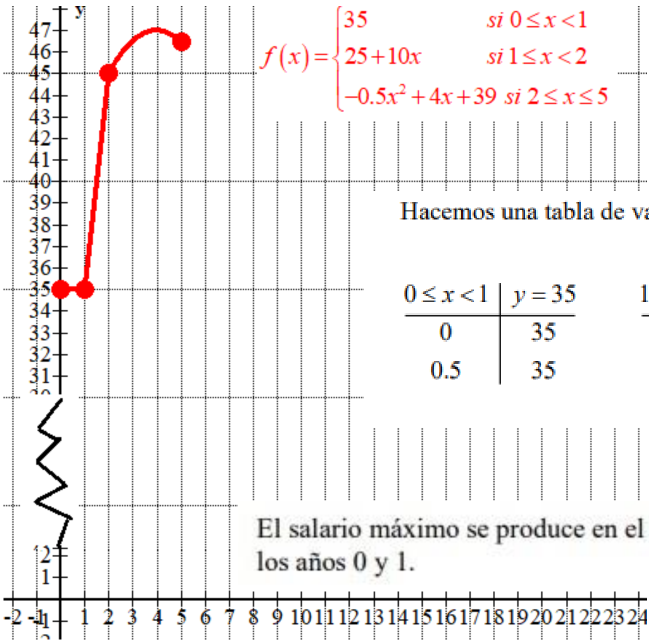
b) Para a = 39 la función queda:

$$f(x)=\begin{cases} 35 & si\ 0\le x<1 \\ 25+10x & si\ 1\le x<2 \\ -0.5x^2+4x+39 & si\ 2\le x\le 5 \end{cases}$$

La primera rama (entre 0 y 1) es una recta horizontal. La segunda rama (entre 1 y2) es una recta con pendiente 10 ($y=25+10x$) y la tercera rama (entre 2 y 5) es una parábola ($y=-0.5x^2+4x+39$).

Averiguamos las coordenadas del vértice de la parábola.

$$y'=-x+4$$
$$y'=0 \Rightarrow -x+4=0 \Rightarrow \boxed{x=4}\ Vértice$$



$$f(x)=\begin{cases}35 & si\ 0\le x<1\\ 25+10x & si\ 1\le x<2\\ -0.5x^2+4x+39 & si\ 2\le x\le 5\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores en cada intervalo de definición.

$0\le x<1$	$y=35$
0	35
0.5	35

$1\le x<2$	$y=25+10x$
1	35
1.5	40

$2\le x\le 5$	$y=-0.5x^2+4x+39$
2	$-2+8+39=45$
3	$-4.5+12+39=46.5$
4	$-8+16+39=47$ *Vértice*
5	$-12.5+20+39=46.5$

El salario máximo se produce en el vértice de la parábola x = 4 (al cuarto año) y el mínimo en los años 0 y 1.

12

a) Nos piden *f(0)*.

$$f(0)=\frac{0^2+15}{(0+1)^2}=15$$

En el año 2005 había 15 millones de aparatos móviles hackeados.

b) Usamos la derivada.

$$f(t)=\frac{t^2+15}{(t+1)^2}\Rightarrow f'(t)=\frac{2t(t+1)^2-2(t+1)(t^2+15)}{(t+1)^4}=\frac{(t+1)\left[2t(t+1)-2(t^2+15)\right]}{(t+1)^4}=$$

$$=\frac{(t+1)\left[\cancel{2t^2}+2t-\cancel{2t^2}-30\right]}{(t+1)^4}=\frac{2t-30}{(t+1)^3}$$

$$f'(t)=0\Rightarrow\frac{2t-30}{(t+1)^3}=0\Rightarrow 2t-30=0\Rightarrow \boxed{t=\frac{30}{2}=15}$$

En el intervalo $(0,15)$ tomamos $t = 5$ y la derivada es $f'(5)=\frac{10-30}{(5+1)^3}=-\frac{20}{6^3}<0$. La función decrece en $(0,15)$.

En el intervalo $(15,+\infty)$ tomamos $t = 20$ y la derivada es $f'(20)=\frac{40-30}{(20+1)^3}=\frac{10}{21^3}>0$. La función crece en $(15,+\infty)$.

Por lo que la función presenta un mínimo en $t = 15$, siendo el valor de la función

$$f(15)=\frac{15^2+15}{(15+1)^2}=0.9375.$$

El número mínimo de dispositivos hackeados es de 937500 y se produce en el año 2020.

c) Nos piden calcular el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(t)=\lim_{x\to+\infty}\frac{t^2+15}{(t+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{t^2+15}{t^2+1+2t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{t^2}{t^2}+\frac{15}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2}+\frac{1}{t^2}+\frac{2t}{t^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{15}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}}=\frac{1+0}{1+0+0}=1$$

A largo plazo el número de dispositivos hackeados será de un millón.

13

a) La función debe ser continua en $t = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 2^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 2^-} -t^2+6t+3 = -2^2+12+3 = 11 \\ \lim\limits_{t\to 2^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 2^+} -t+a = -2+a \\ f(2) = 11 \\ \lim\limits_{t\to 2^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 2^+} f(t) = f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow -2+a = 11 \Rightarrow \boxed{a=13}$$

El valor buscado es $a = 13$.

A partir de la segunda hora ($t = 2$) la función consumo es lineal con pendiente $m = -1$, por lo que por cada hora que pasa el consumo disminuye una unidad (1 litro/hora).
Para $t = 3$ el consumo es $P(3) = -3 + 13 = \mathbf{10}$ y $P(4) = -4 + 13 = \mathbf{9}$. Disminuye el consumo 1 litro/hora como se ha indicado.

b) Estudiamos la variación del consumo en cada intervalo de definición.

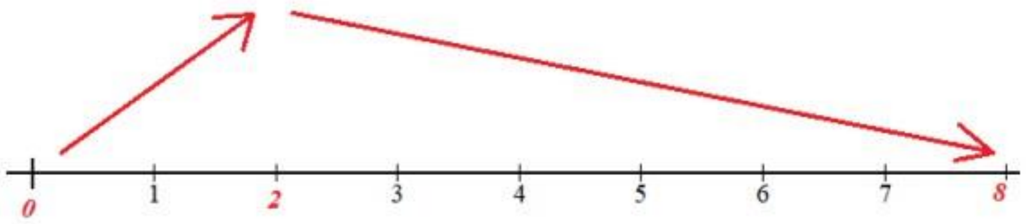
$$si\ 0 \le t \le 2 \to f(t) = -t^2+6t+3 \Rightarrow f'(t) = -2t+6$$
$$f'(t) = 0 \Rightarrow -2t+6 = 0 \Rightarrow t = 3 \notin [0,2]$$

Como el extremo de la parábola no pertenece al intervalo de definición la función es creciente o decreciente en [0, 2]. Como $f'(1) = -2+6 = 4 > 0$ la función es creciente en [0, 2].

$$si\ 2 < t \le 8 \to f(t) = -t+13 \Rightarrow f'(t) = -1$$

Como la derivada siempre es negativa la función es decreciente en (2,8].

La función sigue el esquema siguiente:



El máximo consumo se produce a las 2 horas.
Como $f(2) = 11$, el consumo en dicho momento es de 11 litros/hora.

Para averiguar en que periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora averiguamos cuando el consumo es de 8 litros/hora y por la evolución del consumo se superará entre esos dos valores que obtengamos.

$$f(t) = 8 \Rightarrow \begin{cases} -t^2+6t+3 = 8 \to -t^2+6t-5 = 0 \to t = \dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-20}}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-6+4}{-2} = \boxed{1=t} \\ \dfrac{-6-4}{-2} = 5 \notin [0,2] \end{cases} \\ -t+13 = 8 \to \boxed{t=5} \end{cases}$$

El consumo supera los 8 litros/hora entre la primera hora y la quinta.

14

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$N'(x) = -6x^2 + 150x - 600$$
$$N'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 150x - 600 = 0 \Rightarrow x^2 - 25x + 100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 400}}{2} = \frac{25 \pm 15}{2} = \begin{cases} \dfrac{25+15}{2} = \boxed{20 = x} \\ \dfrac{25-15}{2} = \boxed{5 = x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $(0,5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $N'(1) = -6 + 150 - 600 = -456 < 0$.

La función decrece en $(0,5)$.

En el intervalo $(5,20)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$N'(10) = -600 + 1500 - 600 = 300 > 0$. La función crece en $(5,20)$.

En el intervalo $(20,24)$ tomamos $x = 22$ y la derivada vale

$N'(22) = -6 \cdot 22^2 + 150 \cdot 22 - 600 = -204 < 0$. La función decrece en $(20,24)$.

El número de usuarios decrece durante las primeras cinco horas y también entre las 20 y las 24 horas. Crece en las horas centrales, entre la hora 5 y la hora 20.

b) Por la evolución del número de usuarios en la hora 5 hay un mínimo relativo y en la hora 20 hay un máximo relativo. Valoramos el número de usuarios en estas horas intermedias y en los extremos del intervalo [0, 24) para decidir cuándo se produce el máximo y mínimo absolutos.

$$\left.\begin{array}{l} N(0) = 2000 \\ N(5) = -2 \cdot 5^3 + 75 \cdot 5^2 - 600 \cdot 5 + 2000 = 625 \text{ ¡Mínimo!} \\ N(20) = -2 \cdot 20^3 + 75 \cdot 20^2 - 600 \cdot 20 + 2000 = 4000 \text{ ¡Máximo!} \\ N(24) = -2 \cdot 24^3 + 75 \cdot 24^2 - 600 \cdot 24 + 2000 = 3152 \end{array}\right\}$$

El número máximo de usuarios es de 4000 y se produce en la hora 5 y el mínimo es de 625 y se produce a la hora 20.

15

a) Comprobamos si la función es continua en $t = 10$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 10^-} N(t) = \lim\limits_{x \to 10^-} t^2 - 8t + 50 = 10^2 - 80 + 50 = 70 \\ \lim\limits_{x \to 10^+} N(t) = \lim\limits_{x \to 10^+} 95 - \dfrac{250}{t} = 95 - \dfrac{250}{10} = 70 \\ f(10) = t^2 - 8t + 50 = 10^2 - 80 + 50 = 70 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 10^-} N(t) = \lim\limits_{x \to 10^+} N(t) = \lim\limits_{x \to 10^+} N(t) = 70$$

La función es continua en el intervalo $[0, +\infty)$

Calculamos la función derivada.

$$N'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & si \quad 0 \le t < 10 \\ \dfrac{250}{t^2} & si \quad t > 10 \end{cases}$$

En el intervalo $(10, +\infty)$ la derivada es $N'(t) = \dfrac{250}{t^2} > 0$. Siempre es positiva y por tanto la función es creciente.

En el intervalo $[0,10)$ la derivada es $N'(t)=2t-8$. Se anula en $t = 4$.

En $[0,4)$ tomamos $t = 2$ y la derivada es $N'(2)=4-8=-4<0$. La función es decreciente en el intervalo $[0,4)$.

En $(4,10)$ tomamos $t = 8$ y la derivada es $N'(8)=16-8=8>0$. La función es creciente en el intervalo $(4,10)$.

Resumiendo: La función N(t) es decreciente en $[0,4)$ y creciente en $(4,+\infty)$
Decrece entre los años 0 y 4. Crece a partir del año cuarto.

b) El mínimo relativo se encuentra en $t = 4$, es decir, al final del cuarto año. Como $N(4)=4^2-8\cdot 4+50=34$ el número de aves es de 3400.

c) Veamos en que año se observan 5000 o 7500 aves.

$$N(t)=50 \Rightarrow \begin{cases} t^2-8t+50=50 \to t^2-8t=0 \Rightarrow t(t-8)=0 \to \begin{cases} t=0 \\ t=8 \end{cases} & si \quad 0 \le t \le 10 \\ 95-\dfrac{250}{t}=50 \to -\dfrac{250}{t}=-45 \to t=\dfrac{250}{45}=\dfrac{50}{9} \simeq 5.55 \notin (10,+\infty) & si \quad t>10 \end{cases}$$

$$N(t)=75 \Rightarrow \begin{cases} t^2-8t+50=75 \to t^2-8t-25=0 \to t=\dfrac{8 \pm \sqrt{8^2-4(-25)}}{2} \to & \\ \quad \to t=\dfrac{8 \pm 2\sqrt{41}}{2}= \begin{cases} t=4+\sqrt{41} \simeq 10.4 \notin (0,10) \\ t=4-\sqrt{41} \simeq -2.4 \notin (0,10) \end{cases} & si \quad 0 \le t \le 10 \\ 95-\dfrac{250}{t}=75 \to -\dfrac{250}{t}=-20 \to t=\dfrac{250}{20}=12.5 & si \quad t>10 \end{cases}$$

El número de aves al comienzo del estudio ($t = 0$) es de 5000, luego decrece, por lo que no nos sirve este valor.
El número de aves al final del año 8 es de 5000 (N(8) = 5000). Después crece la población hasta que al final del año 12.5 el número de aves es de 7500 (N(12.5) = 75).. A partir de este año el número de aves sigue creciendo y superará las 7500 aves.

Entre los años 8 y 12.5 el número de aves se encuentra entre 5000 y 7500.

Con el paso del tiempo vemos que ocurre con el número de aves calculando el limite de la función N(t) cuando t se acerca a $+\infty$.

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \lim_{t \to +\infty} 95-\frac{250}{t}=95-\frac{250}{+\infty}=95$$

Con el paso del tiempo el número de aves tiende a estabilizarse en 9500.

16

a) La función de beneficio es

$$B(x)=I(x)-C(x)=x\,\frac{170-0{,}85x}{5}-(10+2x+x^2)=32x-1{,}17x^2-10$$

$B'(x)=32-2{,}34x$, así que $B'(x)=0 \iff x=32/2{,}34=13{,}67$ miles de litros. $B''(x)=-2{,}34=B''(13{,}67)$, por tanto, hay un máximo en $x=13{,}67$. Para maximizar el beneficio se deben vender $13{,}67$ miles de litros y el beneficio máximo sería $B(13{,}67)=208{,}80$ miles de euros.

b) Para que el Coste Medio no supere los 10 mil euros,

$$\frac{C(x)}{x} \le 10 \iff \frac{10+2x+x^2}{x} \le 10 \iff x^2-8x+10=0 \iff x=\frac{8 \pm \sqrt{24}}{2}$$

Por tanto, la demanda debe encontrarse entre $1{,}55$ y $6{,}45$ miles de litros.