# BOLETÍN 5.5 .- APLICACIONES DE LA DERIVADA II ( problemas de ABAU)

**1**

Sea $P(t) = 1.000\left(15 + \frac{t}{100+t^2}\right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo $t$ el número de años transcurridos desde el año $2.000$. Se pide:

**a.-** *(2 puntos)* Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.

**b.-** *(5 puntos)* Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?

**c.-** *(3 puntos)* ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15.040 individuos?

**2**

El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10.000$, donde $x$ representa el número de unidades producidas y vendidas.

**a.-** (*5 puntos*) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

**b.-** (*5 puntos*) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$?

**3**

. La producción diaria de una determinada empresa oscila entre 1 y 10 toneladas. El beneficio diario (f), en miles de euros, depende de la producción (x) y su relación puede expresarse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + a \cdot x & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ 100 + 10 \cdot x + b \cdot x^2 & \text{si } 3 < x \le 10 \end{cases}$$

*a)* **[0.75 puntos]** Determina las constantes a y b si se sabe que los días en los que se producen 3 toneladas el beneficio es de 112 miles de euros y que la función f es continua en todo su dominio.

*b)* **[1.75 puntos]** Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo [1, 10]. Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de euros, ¿cuánto se ha producido ese día? ¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio máximo?

**4**

El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2) & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si } 2 < x \le 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si } 4 < x \le 8 \end{cases}$$

*a)* **[0.75 puntos]** Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

*b)* **[1.75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

**5**

**A.** [1,25 PUNTOS] Una frutería ha conseguido determinar que el peso total de la fruta que guarda en el almacén, expresado en kilogramos, viene dado por la función $P(t) = 30t^2 - 240t + 3000$, donde $t \in [0,6]$ representa las horas transcurridas desde el momento de la apertura. ¿En qué momento hay menos fruta en el almacén? ¿Cuántos kilogramos hay en ese momento?

**B.** [1,25 PUNTOS] En una sastrería familiar, el coste total que supone producir $x$ pantalones, en €, viene dado por la función $C(x) = 120x + 700$. Por otro lado, el precio de venta de esos $x$ pantalones, en €, viene dado por la función $P(x) = x(200 - x)$. Suponiendo que todos los pantalones que se producen se venden, ¿cuántos pantalones habría que producir para que el beneficio obtenido sea máximo?

6

El número de kilogramos de comida que han gastado en un albergue de animales durante una semana concreta se puede calcular mediante la función $f(t)=10\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10\right)$, en la que $t$ es el tiempo en días y va desde el día $t = 1$ (lunes) hasta el día $t = 8$ (lunes de la semana siguiente).

a) Calcule cuántos kilogramos de comida se gastaron el primer lunes y el lunes siguiente. Encuentre qué día de esa semana se gastaron 100 kg de comida. [1 punto]

b) Determine los días de la semana en que el gasto en comida fue mayor y los días en que fue menor. ¿Cuántos kilogramos de comida se gastaron estos días? [1,5 puntos]

7

El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función $N(t)=t^3-24t^2+180t+8000,\ 0\le t\le 11$

**a)** Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del agua almacenada.

**b)** Calcule la cantidad de agua almacenada en el último año (t =11).

**c)** Calcule el año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo y el volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

8

. Los beneficios obtenidos durante el primer año (en cientos de euros) por un establecimiento dedicado al reparto de comida a domicilio vienen dados por la función

$$B(t)=t(t-a)^2,\quad 0\le t\le 12$$

en donde $t$ es el tiempo transcurrido en meses desde la apertura del establecimiento.

**a)** Calcule el valor del parámetro $a$ teniendo en cuenta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t=6$.

**b)** Para $a$ = 9, ¿cuál ha sido el mayor beneficio obtenido? ¿En qué momento o momentos se ha producido? Justifica las respuestas. **c)** Para $a$ = 9, represente la gráfica de la función $B(t)$ teniendo en cuenta la información anterior y el estudio de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

9

(*10 puntos*) En una empresa el coste total, en euros, de producir $q$ unidades viene dado por:

$$C(q)=300q-10q^2+\frac{q^3}{3}$$

donde $t$ representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

**a.-** (*3 puntos*) Calcule la función coste marginal $\left(C_m(q)=C'(q)\right)$ ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

**b.-** (*3 puntos*) Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio $CM(q)=\frac{C(q)}{q}$.

**c.-** (*4 puntos*) Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q)=240-2q$ Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

10

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} & si \quad x\le 0 \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0<x\le 3 \\ \frac{7}{2}-\frac{x}{6} & si \quad x>3 \end{cases}$$

**a.-** (*3 puntos*) Determine el valor de los parámetros para que *f(x)* sea continua.

**b.-** (*4 puntos*) Para dichos valores, analice si *f(x)* es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$.

**c.-** (*3 puntos*) Calcule el valor máximo y mínimo de *f(x)* si $x \in [6,9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.

11

**2A.** El salario diario (f) de un trabajador durante los primeros cinco años en una determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde x representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$f(x)=\begin{cases} 35 & si\ 0\le x<1 \\ 25+10x & si\ 1\le x<2 \\ -0.5x^2+4x+a & si\ 2\le x\le 5 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Estudia la continuidad de la función, determinando el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

b) **[1,75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento el salario fue máximo? ¿y mínimo?

12

Un estudio realizado por el Centro Nacional de Ciberseguridad español ha revelado que el número de dispositivos móviles hackeados en España viene determinado, en millones de aparatos, por la función $f(t)=\dfrac{t^2+15}{(t+1)^2}$, donde $t$ indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo que corresponde al año 2005.

a) ¿Cuál es el número inicial de dispositivos hackeados?
b) Calcular el número mínimo de dispositivos hackeados, ¿En qué año se alcanza ese mínimo?
c) Calcular el número de dispositivos que habrá hackeados en España a largo plazo.

13

El consumo (medido en litros/hora) de combustible, en una explotación industrial durante un turno de 8 horas, se puede expresar por la función: $f(t)=\begin{cases} -t^2+6t+3 & si\ 0\le t\le 2 \\ -t+a & si\ 2<t\le 8 \end{cases}$

donde $t$ representa el tiempo desde el inicio del turno, medido en horas.

a) Establecer el valor de $a$ para que el consumo sea continuo a lo largo de todo el turno. ¿A partir de la segunda hora cuánto cambia el consumo por cada hora que pasa?

b) ¿En qué momento se alcanza el máximo consumo? ¿Cuánto se está consumiendo en ese momento? ¿En qué periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora?

14

El número de usuarios de una estación de metro a lo largo de un domingo evoluciona según la función $N(x)=-2x^3+75x^2-600x+2000$ $con\ 0\le x<24$, donde $x$ indica la hora del día.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de usuarios de la estación a lo largo del domingo.

b) ¿A qué hora el número de usuarios es máximo y a qué hora es mínimo? Calcular el número de usuarios correspondiente a dichas horas.

15

En una zona protegida de un parque natural el número de aves $N(t)$, en cientos, en función del tiempo t (años transcurridos desde que se contabilizan las aves) viene dado por la función: $N(t)=\begin{cases} t^2-8t+50 & si\quad 0\le t\le 10 \\ 95-\dfrac{250}{t} & si\quad t>10 \end{cases}$

a) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función N(t)¿Entre que años crece la función?¿Entre que años decrece?

b) ¿Cuándo se alcanza el número mínimo de aves en el parque? ¿Cuántas aves hay en ese momento?

c) Calcule el intervalo de tiempo en el que la población de aves se mantiene entre 5000 y 7500 aves. ¿A qué valor tiende la población de aves con el paso del tiempo?

16

(2 puntos) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función

$$I(x)=x\,\frac{170-0{,}85x}{5},$$

en la que $x$ representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x)=10+2x+x^2$.

*a)* Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda $x$ y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

*b)* Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $C(x)/x$, no supere los diez mil euros.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.